

1次関数を利用してドミノ倒しについて考察する教材の開発と実践

吉井裕哉¹, 愛木豊彦²

一定の間隔で直線的に並べたドミノは、倒してからある程度時間がたつと、倒れる速さは、ほぼ一定になる。この実験結果を1次関数を用いてまとめ、その結果に対して連立1次方程式を活用して問題解決する中学生用の教材開発を行った。本論文ではその教材の内容、授業実践の結果について報告する。

<キーワード> ドミノ倒し, 1次関数, 連立方程式, 数学の有用性

1. はじめに

2008年に改定された中学校学習指導要領・数学編[1]の目標には、「事象を数理的に考察し表現する能力を高めること」と定められている。この目標を達成できる教材を開発するにあたって、大がかりなドミノ倒しのテレビ番組がどのように企画されているのか興味を持ち、テレビ局に電話で質問した。その結果、内容や放送時間の詳細を事細かに決めてからでないと、番組の企画を提案できないことがわかった。特に、ドミノ倒しを生放送で行う際には、倒すドミノの個数や仕掛けの規模、そして全部のドミノが倒れるまでにかかる時間を事前に計算しているという。

そこで、以下の理由によりドミノ倒しを題材とする授業案を開発することにした。

- ・ドミノ倒しは、テレビでもしばしば放送されるので、子どもたちも関心が高いと考えられる。
- ・テレビ局で、ドミノ倒しを放送する前に計画を立てていることを子ども達に伝えられる。
- ・2節で示すように、1次関数や連立方程式を用いて問題解決することができる。従って、この解決過程を通して、通常の数学の学習内容の有用性を実感し、学習意欲を高める

ことができる。

ドミノ倒しの数理は、[2]で取り上げられている。[2]では物理学を駆使し、漸化式による数理モデルが提案されている。ここでは中学生でも考察できるように、1次関数で表されるモデルを扱うことにした。また、本実践の結果は[3]で簡単に報告したので、本論文ではその詳細を論じる。

2. 授業の計画

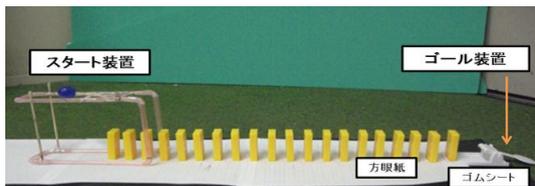
2.1 授業の概要

授業の概要を述べる。写真1にあるように、ゴムシートの上に方眼紙を敷き、ドミノを直線的かつ間隔を一定にして並べる。使用するドミノは市販されている「日本ドミノ協会公認ドミノ牌 120 (H46 × W23 × D8 / mm)」である。そして、スタート装置(2.2節参照)を作動させ、ドミノが倒れてゴール装置が作動するまでの時間をストップウォッチで計測する。その計測した時間を「ドミノが倒れるのにかかる時間」と呼ぶことにする。ここでは、間隔が2cmと3cmの場合について実験を行う。そして、統計ソフトのグラフ作成と近似直線の計算機能を使い、ドミノの個数とドミノが倒れるのにかかる時間の関係、ドミノを並べる間隔や倒れる速さについて考察してい

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

く。さらに、その結果を用いて、問題1(2.3節参照)について考える。



(写真1)

2.2 実験について

写真2は写真1で示したスタート装置を拡大したものである。この装置はストロー、竹串、爪楊枝、ゴムボールを組み合わせて自作したものである。爪楊枝を引くとゴムボールがドミノを倒す仕組みになっている。ゴール装置(写真3)は、先ほどのドミノセットに付属しているものを使用した。

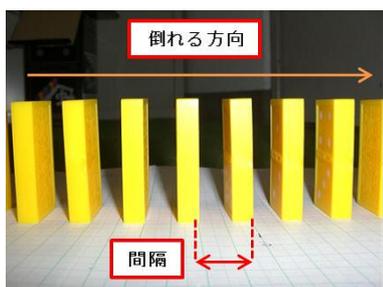


(写真2)



(写真3)

また、本授業では「ドミノを並べる間隔」は、ドミノの倒れる方向に対して、ドミノの先端から次に倒れるドミノの先端までの長さを意味するものとする(写真4)。



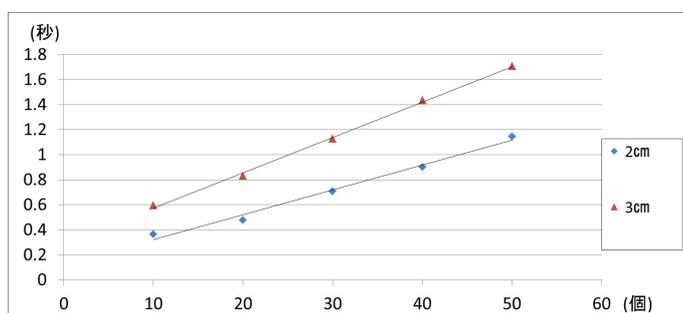
(写真4)

ドミノを10個、20個、30個、40個、50個の場合にそれぞれ10回ずつ倒し、「ドミノが倒れるのにかかる時間」を計測した。図1は間隔が2cmのときと3cmのときの、ドミノの

個数と「ドミノが倒れるのにかかる時間」の平均値をグラフにしたものである。統計ソフトを用いて、実験データに対する近似直線の方程式を求めると、以下ようになる。ただし、(1)は間隔が2cm、(2)は間隔が3cmの場合であり、 x はドミノの個数、 y は「ドミノが倒れるのにかかる時間」である。

$$y = 0.0198x + 0.1236 \dots (1)$$

$$y = 0.0283x + 0.2909 \dots (2)$$



(図1)

この実験結果から、ドミノの個数と倒れるのにかかる時間の関係を1次関数とみなすことにする。これは、一定の間隔で直線的に並べたドミノが倒れる速さは、倒れ始めてから一定になるように見えることに起因している。さらに、2つの式から間隔が2cmのときの方が3cmのときよりも倒れる速さが速いことがわかる。[2]で示された数値シミュレーションにおいても、倒してから時間が経つとドミノの速度はほぼ一定になっている。

2.3 教材について

上の実験結果をもとに、次の問題1を考える。ただし、ドミノの個数とドミノが倒れるのにかかる時間との関係式において、(1)(2)の傾きの小数第4位、切片の小数第3位を四捨五入した値を用いる。

(問題1) ドミノのピース160個を使って、間隔が2cmの区間と3cmの区間を合わせて直線のコースを作る。このコースに並べたドミノ

を4.0秒で倒すには、2cmと3cmの区間にそれぞれ何個のドミノをおけばよいか。

(解答例)2cmの間隔で置くドミノを n 個、3cmの間隔で置くドミノを m 個とする。ドミノの合計個数は160個なので、

$$n + m = 160 \cdots \textcircled{1}$$

n 個倒すのにかかる時間は(1)より $0.02n + 0.12$ (秒)、 m 個倒すのにかかる時間は(2)より $0.28m + 0.29$ (秒)と表せる。2cmの区間と3cmの区間で倒れるドミノの合計時間は4.0秒なので、

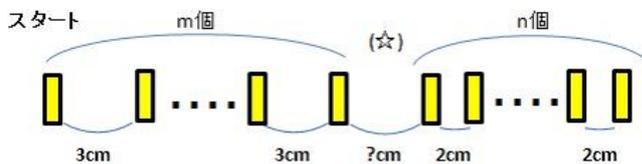
$$(0.02n + 0.12) + (0.028m + 0.29) = 4.0 \cdots \textcircled{2}$$

①、②を n と m について解くと

$$n = 111.25, m = 48.75$$

小数第1位を四捨五入して、次の答えを得る。(答え)2cmの区間111個 3cmの区間49個として、実験を行うと、「ドミノが倒れるのにかかる時間」は約4.0秒になる。

上の解答において、次の点に注意する必要がある。



(図2)

これは上の図のようにある2cmの間隔で並べたドミノと3cmで並べたドミノの間()を何cmにするかということである。また、実験ではスタート装置を使って倒したが、()の地点ではスタート装置を使っていないのに、実験で得られた式を使うのかということも慎重に考える必要がある。しかし、上の解答例から得られた値と実験結果がほぼ一致するので、()の部分をも3cmにし、実験結果の式をそのまま使って良いことにした。

また、1次関数の切片に物理的な意味を持たせられなかったため、この点について授業

では触れないようにした。

2.4 授業のねらい

本授業のねらいを次のように設定した。

- I. 実験結果を数理的に考察し、倒れるドミノの個数と時間の関係、倒れる速さなどについて発見したことを自分でまとめ、表現することができる。
- II. 実験した結果を使って、問題解決することで、事象を数理的に考察することに対する有用性を実感する。

2.5 授業の流れ

授業は2時間構成である。

(1時間目)

(1) 問題提示

まず、ドミノ倒しの生放送番組の動画を見せて、約20万個のドミノが倒れるのにかかる時間を、少ない個数で実験した結果から求めていることを話す。その後、一定の間隔で直線的に並べたドミノを倒すとき、ドミノの個数と倒れるのにかかる時間にはどんな関係があるかという問題を提示する。

(2) 課題設定

実験方法を説明し、「ドミノの個数と倒れるのにかかる時間にはどんな関係があるか実験で調べよう。」という課題を設定する。

(3) グループ追究

全体を、2cmの間隔で実験するグループと、3cmの間隔で実験するグループに分ける。各グループの人数は2人か3人である。ドミノの個数が10個、20個、30個、40個、50個のときの実験を行う。その後、全体の結果を集計し、統計ソフトを使って実験結果のグラフと近似式を示す。そして、それらをもとにグループごとにグラフや近似式からわかることをまとめる。

(4) 全体交流

グループで追究した内容を全体で交流することで、一定の間隔でドミノを直線的に並べたとき、ドミノの個数と倒れるのにかかる時間の関係は1次関数とみなせること、ドミノ

の倒れる速さは倒し始めると一定になりそう
だということ、間隔によってドミノの倒れる
速さが異なることを理解する。そして「間隔が
2cmの方が3cmより速く倒れる。さらに、ド
ミノの倒れる速さは倒し始めてから一定にな
るので、ドミノの倒れる個数と時間の関係は
1次関数の式やグラフで表すことができる。」
とまとめる。

(2時間目)

(1) 問題提示

まず、「ドミノのピース160個を使って間隔
が2cmの区間と3cmの区間を合わせて直線の
コースを作ります。このコースを4.0秒で倒
すには2cmと3cmの区間にそれぞれ何個ドミ
ノをおけばよいでしょう。」という問題を提
示する。

(2) 課題設定

2cmの区間に置くドミノを n 個、3cmの区
間に置くドミノを m 個とすると、1時間目の
1次関数の式からドミノが倒れるのにかかる
時間を式で表せることを確認し、課題を「連
立方程式を立てて2cmの区間と3cmの区間に
使うドミノの個数を求めよう。」と設定する。

(3) グループ追究

2.3節で示したように連立方程式を立てて、
解を求める。最後に、計算で求めた答えが正
しいかどうか実験で確かめる。

(4) まとめ

「事象を数理的に考察することで問題解決
に役立てることができる。」とまとめる。

3. 実践結果

3.1 授業実践

講座名：「じっかん!! ドミノ番組」
場所：岐阜県白川町立白川中学校
実施日：平成22年9月16日(木)
第5~6校時

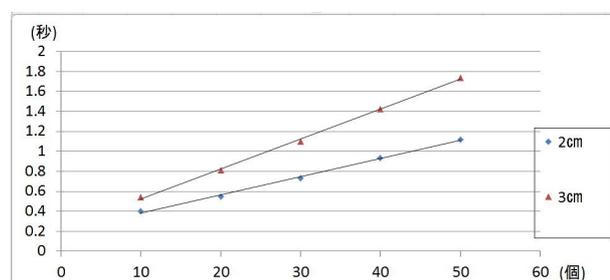
対象：中学3年生(63名)

授業はSPP事業の一貫として行われた。

3.2 活動の様子

(1時間目)

課題提示後の実験で、生徒たちが積極的に
実験に取り組む姿が多く見られた。また、実
験に時間がかかってしまったため、実験結果
のグラフ、式の意味については、授業者がお
さえることにした。図2は実践時の実験結果
である。近似直線の方程式は、間隔が2cmの
とき、 $y = 0.0182x + 0.1991$ 、間隔が3cmのと
き、 $y = 0.03x + 0.2254$ となった。実験結果を
見て、ドミノの個数と倒れるのにかかる時間
の関係は1次関数になるということ、間隔が
2cmの方が3cmより速く倒れるということ、
多くの生徒は納得しているようだった。



(図3)

(2時間目)

1時間目の実験結果をもとに、(問題1)に
ついて考えた。生徒たちは学習プリント(資料
1)を参考にして、2cmの間隔で置くドミノを
 n 個、3cmの間隔で置くドミノを m 個として、

$$\begin{cases} n + m = 160 \\ (0.018n + 0.2) + (0.03m + 0.23) = 4.0 \end{cases}$$

という連立方程式を立て解を求めた。小数の
計算にかなり苦戦していたが、多くの生徒が
間隔が2cmの区間に102個、3cmの区間に58
個並べれば、160個のドミノを4.0秒で倒せる
という解答にたどり着いていた。

最後にドミノを答えの通りに160個並べて
倒す実験を行ったところ、4.03秒という記録
になった。このことに対し、生徒たちは喜び、
拍手をしていた。

4. 考察

授業後にアンケートを実施した。その結果の一部を紹介する。

- ① 実験結果を考察したときに、どのようなところに着目しましたか。
 - ・グラフの形に着目して1次関数だということを考えることができました。
 - ・2cmの区間の時の方が倒れるのにかかる時間が、はやかったこと。
 - ・グラフが直線になっているか。
 - ・ドミノの個数が増えるごとに、何秒ずつ増えているかに着目しました。
- ② ドミノが倒れるのにかかる時間について方程式が立てられたのはなぜですか。
 - ・ドミノの個数と倒れるのにかかる時間が関係あるから。
 - ・実験の結果が1次関数に当てはまっていたから。
 - ・倒れる速さが一定だから
- ③ ドミノ番組はどのようにして放送時間を決めて、提案されていると思いますか。
 - ・今日の学習のように、1次関数のグラフにしたり、方程式を計算して、時間を決めていると思う。
 - ・少ない個数で実験をして時間を考える。
 - ・少ない個数で実験をしてその結果をもとに実際にかかる時間を計算して提案すると思います。
 - ・見る方が満足する時間で放送時間も決まっているので、しっかり計算してから放送している。
 - ・速すぎても、遅すぎてもいけないので、視聴者の方がちょうどいいと思うくらいの時間を考えていたのだと思います。
- ④ 授業の感想を教えてください。
 - ・ドミノを見ていてこういうことは何も考えていなかったの、今度ドミノの番組を見たら思い出せると思います。
 - ・連立方程式は使うところがあまりなくてなんでやるんだろう?とっていたけど、今

回の授業で身近に使われていることを知れてよかったです。

- ・連立方程式で求めた結果と最後の実験の結果がほとんどあっていたのですごいと思いました。
- ・計算は難しかったけど楽しくできたのでよかったです。

次に、本授業のねらいの達成度について考察する。

Iについて

式の意味については授業者が2時間目の(問題1)を行う前に説明し、生徒たち自身が考える時間が取れなかった。そのため、ドミノの倒れる時間について方程式を立てる際に、1時間目の実験結果の式をどのように使っていいのかわからない生徒が多かった。アンケートの①、②に対し「わからない」や空白の回答が多くあり、式の意味を理解するのが困難であったと考えられる。よって、このねらいは、あまり達成できなかったと判断した。

IIについて

アンケートの質問③や④の回答からも分かるように、実験した結果を使って、問題解決することで、事象を数理的に考察することに対する有用性を実感し、数学的な面白さに気づいた生徒が多かった。さらに、数理的に考察したり、問題解決するのに、既習の1次関数や連立方程式が使えることがわかり、それらの学習内容に有用性を実感している生徒も多かった。よって、このねらいは達成できたと考える。

5. 今後の課題

今回の実践における課題は、次の2点である。

1つ目は、課題を生徒たちが自ら発見し、解決できるような授業づくりがである。今回の授業では、問題提示や実験結果の考察は授業者が主体であった。生徒たち自身が考え発

見をすることで理解が深まると考えているので、生徒たち自身が問題を見つけ、それを解決する授業展開にする必要がある。特に、実験の時間が短縮する工夫を考え、考察する時間を増やすようにしたい。

2つ目は、数理的な処理のよさについて、伝えきれなかったことである。アンケートの③、④の回答から、事象を数理的に考察する面白さ、有用性については十分に理解が得られたと判断している。しかし、アンケートの①、②の回答や、ドミノの倒れる時間について方程式を立てる際に、1時間目の実験結果の式をどのように使ってよいのかわからない生徒が多かったことから、実験結果をグラフや式に表すことの利便性が伝わらなかったことがわかる。事象を数学的な表現を使って式やグラフにすることで、数理的に処理することができる。そういった数学的な表現の利便

性を伝えられる授業展開やまとめが必要であると考える。

実践の場を提供していただいた、岐阜県白川町立白川中学校の関係者の皆様方に感謝いたします。

引用文献

- [1] 文部科学省, 2008, 中学校学習指導要領解説数学編, 教育出版株式会社.
- [2] Fumio Fujii, Tosie Satoh and Shota Fukumoto, 2009, Dynamic contact mechanics of the domino wave propagation, 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference J.Ambrosio et.al.(eds) Lisbon, Portugal, September 7-11, 1-13.
- [3] 愛木豊彦, 吉井裕哉, 2010, 事象を数理的に考察する教材の開発と実践, 2010年度数学教育学会秋季例会発表論文集, 86-88.

(資料1)



じっかん!!ドミノ番組

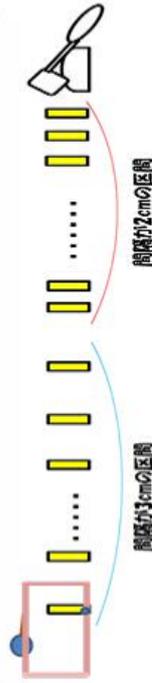
～2時間目～

3年組 班 名前

(1時間目の結果から)

※ドミノの個数と時間の式 個数 x (個) 時間 y (秒)
 (間隔が2cm) $y = 0.0x + 0$ (間隔が3cm) $y = 0.0x + 0$

問題 ドミノのピース160個を使って、間隔が2cmの区間と3cmの区間を合わせて、直線のコースを作ります。このコースを4.0秒で倒すには間隔が2cmと3cmの区間にそれぞれ何個ドミノを置けばよいでしょう。



(求めたい数量を文字でおく)
 間隔が2cmの区間に置くドミノを n 個 間隔が3cmの区間に置くドミノを m 個とする。

(わかっている数量関係)

2cmの区間に置くドミノの個数	+	3cmの区間に置くドミノの個数	=	160 (個)
2cmの区間でドミノが倒れるのにかかる時間	+	3cmの区間でドミノが倒れるのにかかる時間	=	4 (秒)

課題 連立方程式を立てて、2cmの区間と3cmの区間に使うドミノの個数を求めよう。

※解が整数にならない場合、解の小数第一位を四捨五入しましょう。

(解答)