岐阜数学教育研究
2010, Vol.9, 103-110

測定誤差を題材とした教材の開発と実践

山田恵介[1]，愛木豊彦[2]

2008 年に学習指導要領の改訂が行われ，中学校数学科の内容に，新しく「資料の活用」という領域が設けられた。そこで，この領域における 1 年生の学習内容である「近似値」に他の単元の内容を関連させた教材の開発を行った。授業の題材は，測定したときに生じる誤差の大きさに関する性質を不等式を用いて証明することである。本稿では，授業の内容と 2010 年 2 月に実践した結果について報告する。

＜キーワード＞測定値，誤差，真の値，不等式，比例・反比例

1．はじめに

2008 年に改訂された中学校学習指導要領数学科に「資料の活用」という領域が新しく設けられ,「近似値」が第 1 学年の学習内容となった。そこで，学習指導要領の完全実施に先立ち，近似値や誤差について考察する教材を開発することにした。その理由は次の 3 つである。

1 つ目は，生徒が誤差に興味を持つと考えたからである。ほとんどの生徒は，実験などで行われる測定の経験から,「誤差」という語句を聞いたことがあるはずである。また，どんな測定器具を使っても，必ず誤差が生じるという事実からも，数学的な興味・関心をひきだせるのではないかと考えた。

2 つ目は，今回の改訂で「不等式」が第 1 学年の学習内容となったことである。[1] における内容の取扱いでは,「大小関係を不等式を用いて表すことを取り扱うものとする。」とあり，前々回の学習指導要領とは大きく異なっており，中学校における「不等式」の指導は重要な研究課題である。そこで，不等式は誤差を表現するための有効な方法ということもあり，不等式と誤差を関連させた新たな教材を開発したいと考えた。

3 つ目の理由は，次節でも示すように，誤差について考察していく過程で比例と反比例を活用できることである。本教材で扱う，誤差，不等式，比例は全て第 1 学年の学習内容である。これらの各領域の内容を総合して考えられる点や日常の事象を学習に関連付けている点から第 1 学年の課題学習に位置付けることが可能である。

本論文では，このような背景のもとで開発した教材および実践について報告する。

本論文の構成は，以下の通りである。第 2 節で題材，第 3 節で授業展開について，第 4 節で実践の概要を紹介する。そして，第 5 節で実践結果について考察し，最後に今後の課題を示す。

2．題材について

誤差には 3 種類ある。製品の製造過程で重さや形に違いが生じる「製品誤差」，測定したとき，四捨五入，切り捨て，切り上げをした際に生じる「測定誤差」，丸め誤差や桁落ち等の計算過程で生じる「計算誤差」(参考 [2]) である。ここで，測定誤差に関連した次の問題を考える。

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

問題 I

重さを g で表示する電子ばかりでビー玉の重さを測定する。ただし，この電子ばかりは，小数第 2 位を四捨五入して得られる値を表示するものとする。このとき，n 個のビー玉の重さを測り，そこから m 個のビー玉の重さを求めたときの値 a_n の誤差 e_n のとりうる値の範囲を n で表せ。

(解答)　ビー玉 1 個の重さの真の値を a(g)，n 個の測定値を x_n(g) とすると，その真の値は，na(g) なので，

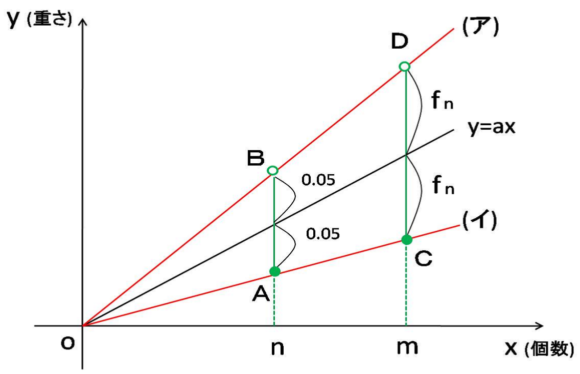
$$|x_n - na| \leq 0.05.$$

次に，x_n からビー玉 m 個の重さを求めると $a_n = \frac{x_n}{n}m$ である。ビー玉 m 個の重さの真の値は，ma(g) なので，その誤差は

$$\begin{aligned} |a_n - ma| &= |\frac{x_n}{n}m - ma| \\ &= m|\frac{x_n}{n} - a| \\ &= \frac{m}{n}|x_n - na| \\ &\leq 0.05\frac{m}{n}. \qquad (1) \end{aligned}$$

よって，$|e_n| \leq 0.05\frac{m}{n}$.　　(終)

上の問題を次のようにグラフを使って解くこともできる。



グラフ 1

ビー玉 1 個の重さの真の値を a(g)，x 個の重さの真の値を y(g) とする。このときビー玉 n 個の重さの測定値と na との差の絶対値は，0.05 以下なので，測定値は線分 AB 上の点の y 座標に一致する。従って，それをもとに求めた m 個の重さの測定値は，CD 上の点の y 座標に一致する。よって，f_n をグラフ 1 のように定めると，相似の性質から，$f_n : 0.05 = m : n$ となり，$f_n = \frac{0.05m}{n}$ である。ゆえに，n の値を大きくすれば，誤差が限りなく 0 に近づいていくことが分かる。

また，誤差について次の問題も考えられる。

問題 II

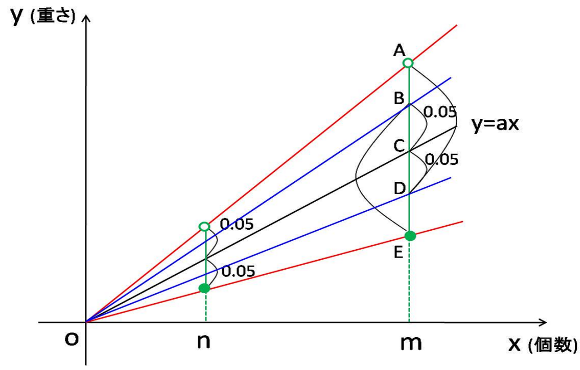
問題 I と同じ状況で，ビー玉 m 個の重さの測定値 x_m と a_n との差 b_n のとりうる値の範囲を n を用いて表せ。

(解答)　ビー玉 1 個の重さの真の値を a(g) とすると，$|x_m - ma| \leq 0.05$ である。よって，(1) より，

$$\begin{aligned} |b_n| &= |a_n - x_m| \\ &\leq |a_n - ma| + |ma - x_m| \\ &\leq 0.05\frac{m}{n} + 0.05. \end{aligned}$$

よって，$|b_n| \leq 0.05(1 + \frac{m}{n})$.　　(終)

この問題も先ほどと同じようにグラフを使って解くことができる。



グラフ 2

ビー玉 1 個の重さの真の値を a(g)，x 個の重さの真の値を y(g) とする。そして，グラフ

2 のように，A，B，C，D，E を定めると，B，C，E の y 座標は，それぞれ，$ma+0.05$, ma, $ma-0.05$ である。また，相似の性質より，AC : 0.05 = $m:n$ なので，AC = $0.05\frac{m}{n}$ となる。ゆえに，A の y 座標は，$ma+0.05\frac{m}{n}$ である。同様に，E の y 座標は，$ma-0.05\frac{m}{n}$ である。このとき，x_m はBD上の点の y 座標に一致し，a_n は AE 上の点の y 座標に一致するので，$|b_n| \leq \mathrm{AD}$ となる。よって，

$$\begin{aligned}|b_n| &\leq ma+0.05\frac{m}{n}-(ma-0.05)\\ &= 0.05(1+\frac{m}{n}).\end{aligned}$$

この場合，n を大きくしたとき，b_n の値が 0 に近づくとは限らないが，とりうる値の範囲が狭くなっていくことがわかる。

このように誤差と個数の関係を比例のグラフで表すことで，測定する個数が増えれば誤差が小さくなることを説明できる。中学生の学習内容に不等式の詳しい取り扱いは含まれていないが，上で述べたような考えは重要であり，中学生でも理解可能であると判断した。

3．授業展開について

前節で示した問題をそのまま中学生に示すのは困難だと考え，用語，問題提示の仕方などを以下のように工夫した。

3.1　用語

中学校 1 年生では，測定の仕方を次のように指導している ([3])。まず，測定器具での最小の目盛よりも 1 桁小さい値を目測で読む。そして，その桁を四捨五入して得られる値を，測定値とする。例えば，最小の目盛が 0.1cm のものさしを使った場合は，0.01cm の位を目測で読み，その値を四捨五入して 0.1cm の位までの数を使って 5.4cm のように表す。そして，測定に関する語句は次のように定義されている ([3])。

「測定値のように，真の値に近い値を近似値といいます。」

「近似値と真の値との差を誤差といいます。」

(誤差) = (近似値) − (真の値)

本論文で紹介する授業では，これらの用語を次のように扱う。

①「近似値」という用語を使わない。「近い」という表現の扱いが難しいことと，測定値と近似値という似たような 2 つの用語を導入することで生じる混乱を避けることが，その理由である。

②「測定値」を電子ばかりで測った値とした。測定の仕方から始まる展開も考えたが，授業時間の都合で，このように定義する。

③誤差を，

$$(誤差) = (真の値) - (測定値) \qquad (2)$$

とする。これは，教科書で示されている定義とは異なるが，3.3 節で示すように，(誤差) = (測定値) − (真の値) とすると，考察において不等式の性質を多用することになる。また，数値解析的に見れば，重要なのは誤差の絶対値を表す絶対誤差である。以上の理由から誤差の定義を (2) とすることにした。

3.2　測定結果

ビー玉 n 個の重さの実際の測定値からビー玉 100 個の重さを計算で求めた結果を示す。

(実験結果 I)

ビー玉 100 個の重さの測定値　253.0g⋯(A)

ビー玉の個数	測定値 (g)	100 個の重さ (g)⋯(B)	(A)−(B)
1	2.5	250	3
10	25.5	255	2
20	50.8	254	1
30	76.2	254	1
40	101.5	253.75	0.75
50	126.9	253.8	0.8
60	152.3	253.833⋯	0.833⋯
70	177.4	253.4285	0.4285
80	202.7	253.375	0.375
90	228	253.33⋯	0.33⋯

表 1

（表 1）から分かるように，測定するビー玉の個数を大きくするほど，(A)−(B) の絶対値が小さくなり，ビー玉 100 個の重さをより正確に求めることができる。この理由を考えることが，前節で示した問題 II である。

ここで，この問題 II を中学生が解決するには，2 つの困難な点がある。1 つ目は，ビー玉 n 個の測定には,「製品誤差」が含まれているため，生徒達の中で「測定誤差」だけに着目しにくいと考えられることである。2 つ目は，問題 II の解答で示したように計算が複雑だということである。

そこで授業では，ビー玉 1 個の重さの真の値を決め，製品誤差を排除して作成した次の表を用いることにした。

まず，ビー玉 1 個の重さの真の値を 2.529122g とすると，ビー玉 100 個の重さの真の値は 252.9122g である。従って，表 1 と同じようにして，次の表 2 を得ることができる。

ビー玉の個数	測定値 (g)	100 個の重さ (g)⋯(B)	(真)−(B)
1	2.5	250	2.9122
10	25.3	253	-0.0878
20	50.6	253	-0.0878
30	75.9	253	-0.0878
40	101.2	253	-0.0878
50	126.5	253	-0.0878
60	151.7	252.833⋯	0.078867⋯
70	177.0	252.8571⋯	0.055057⋯
80	202.3	252.8750	0.037200
90	227.6	252.888⋯	0.023311⋯

表 2

この表に対する考察が前節で示した問題 I に相当する。次節で，この問題を中学校で学習する内容を使って解く。

3.3　中学校の学習内容にもとづく解法

（解答）ビー玉 1 個の重さの測定値から求めたビー玉 100 個の重さの誤差の範囲を考える。測定値が 2.5 (g) より，ビー玉 1 個の真の値 a(g) の範囲は,

$$2.45 \leq a < 2.55 \tag{3}$$

である。従って，ビー玉 100 個の重さの真の値を b(g) とすると，(3) の各辺をそれぞれ 100 倍することにより,

$$245 \leq b < 255. \tag{4}$$

従って，ビー玉 1 個の重さの測定値から求めたビー玉 100 個の重さは 250(g) なので，この値の誤差を e とすると，(4) の各辺から 250 (g) をひいて,

$$-5 \leq e < 5. \tag{5}$$

次に，ビー玉 50 個の重さの測定値から求めたビー玉 100 個の重さの誤差の範囲を求める。表 2 から，ビー玉 50 個の重さの測定値は, 126.5(g) なので，ビー玉 50 個の重さの真の範囲は，$126.45 \leq 50a < 126.55$ である。従って，$\frac{126.45}{50} \leq a < \frac{126.55}{50}$ より

$$\frac{126.45}{50} \times 100 \leq 100a < \frac{126.55}{50} \times 100 \tag{6}$$

である。よって，このときの (6) の各辺から, 253.0(g) をひいて，誤差を f とすると,

$$\frac{126.45}{50} \times 100 - \frac{126.5}{50} \times 100 \leq 100a - 253.0$$

$$< \frac{126.55}{50} \times 100 - \frac{126.5}{50} \times 100,$$

$$(126.45 - 1263.50)\frac{100}{50} \leq f < (126.55 - 1263.50)\frac{100}{50}, \tag{7}$$

ゆえに $-0.1 \leq f < 0.1$ である。

ここで，ビー玉が何個であっても，(7) の (126.45−1263.5) と (126.55−1263.5) の部分の値はつねに，−0.05 と 0.05 であることに気付ければ，ビー玉の個数が n 個のとき,

$$-0.05 \times \frac{100}{n} \leq (\text{誤差}) < 0.05 \times \frac{100}{n} \tag{8}$$

という関係を導けるものと考えた。

上で示した解法における不等式の扱いについて述べる。(4) と (6) において，不等式の両

辺に正の数をかけても不等号の向きが変わらないこと，(5) と (7) において，不等式の両辺から同じ数をひいても不等号の向きが変わらないという不等式の性質を用いている。現在の中学生は，不等式の性質を学習していないので，厳密に言えばこれらを用いることはできない。そこで，次のように考えれば，これらの式変形を理解できると考えた。(4) について，すべてのビー玉の重さの真の値が最も小さい 2.45g だとすると，ビー玉 100 個の重さの真の値で最も小さいのは，$2.45 \times 100 = 245$g であろう。よって，$245 \leq b$ が成り立つ。同じように考えれば，$b < 255$ と (5)，(6)，(7) も納得できるものと考えた。従って，不等式の変形については，生徒に根拠を明らかにするよう指示せず，生徒から質問された場合に限り，上のような説明をすることにした。

次に，誤差の定義について述べる。仮に，(誤差)=(測定値)−(真の値) と定義すると，ビー玉 1 個のとき，$2.45 \leq a < 2.55$, より

$$-2.45 \times 100 \geq -100a > -2.55 \times 100$$

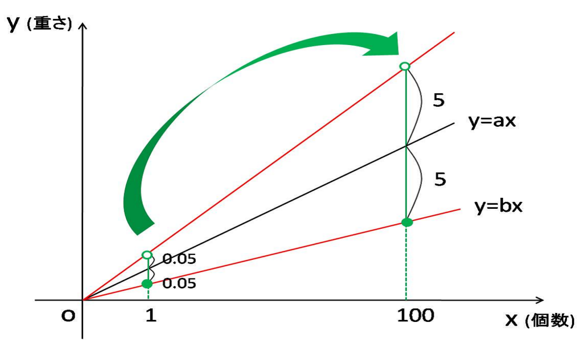
と変形し，その後，各辺に 250 を加え

$$250-2.45\times100 \geq 250-100a > 250-2.55\times100$$

としなければならない。このように不等式の両辺に負の数をかけることは，中学生にとって理解しにくく本授業のねらいから大きくそれるので，誤差を (2) で定義することにした。

また，(5) が正しいことの根拠をグラフを用いて次のように説明できる。

＜ビー玉の 1 個を測定したとき＞



グラフ 3

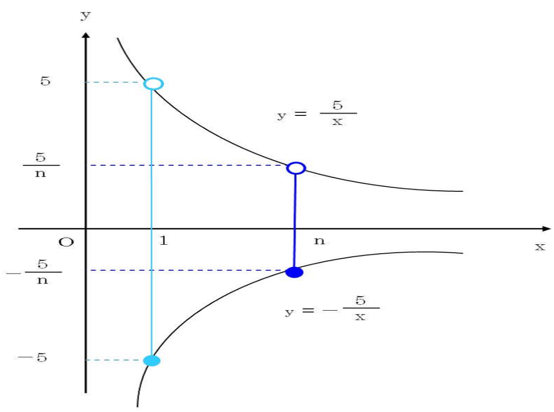
グラフ 3 において，1 個の重さの測定値から得られる x 個の重さを表すグラフを $y = ax$ とする。また，1 個の重さの真の値として考えられるものの中で最小の値を b とする。このとき，x =1 のときの誤差の絶対値の範囲の長さは，$a - b$であり，x=100 のときの誤差の絶対値の範囲の長さは $100a - 100b$ で 100 倍になっている。このことは，相似を使っても説明できる。

さらに，(8) から，ビー玉 x 個のときの誤差 y の範囲は，

$$-0.05 \times \frac{100}{x} \leq y < 0.05 \times \frac{100}{x}$$

$$-\frac{5}{x} \leq y < \frac{5}{x}$$

と表すことができる。従って，これをグラフ 4 のように反比例を使って表すことができる。



グラフ 4

以上で述べたように，この課題は，不等式，比例などを用いて解決することができ，反比例のグラフを使って，その結果を表現することもできる。従って，この課題は，多少複雑であり，難しい点もあるが，中学生に是非考えさせたい問題であると判断した。

3.4　授業のねらい

前節までに示したことを踏まえ，本授業のねらいを以下の 2 点とした。

(a) 真の値・測定値・誤差の用語の意味や表し方を知り，それらを活用することができる。

(b) 誤差の範囲に関する課題を，表，式，グラフを用いて解決することができる。

4．実践の概要

日程　　平成22年2月25日，3月3日，3月4日
対象　　岐阜大学教育学部附属中学校 3年4組（40名）
単元名　「測定と誤差」
時間数　全3時間

4.1　授業の概要

各時間のねらいを示す。

＜第1時＞　電子ばかりを使って重さを測定する活動を通して，測定には誤差がともなうことを理解し，真の値や誤差の範囲を不等式を用いて表すことができる。

＜第2時＞　測定値を100倍して得られた値の誤差の範囲を，簡単な不等式の性質を用いて求めることができる。

＜第3時＞　測定値をn倍して得られる値の誤差の範囲について，表，式，グラフを用いて考察することができる。

4.2　活動の様子

＜第1時＞

まず，電子ばかりを用いて，ビー玉10，20，…，100個の重さを測定し，それらの値からビー玉100個の重さを求め，それらを表にまとめた。そして，これらの値が等しくない原因が誤差であることを理解した上で,「誤差」,「測定値」,「真の値」を定義した。次に，真の値と誤差のそれぞれの範囲について考えた。多くの生徒が，それらの範囲を不等式で表すことができた。中には，数直線を用いて表す生徒もいた。

＜第2時＞

表2を生徒に示し，この表は製品誤差がないものとして作った表であることを生徒に伝えた。この場合も「測定誤差」が原因で，いろいろな測定値から求めたビー玉100個の重さの値が違うことを確認し，第2および第3時の課題を次のように設定した。「測定するビー玉の個数を増やすと，そこから求めた100個の重さの誤差の範囲が狭くなる理由を説明しよう。」そして，この課題解決のために，まず，ビー玉1個の重さからビー玉100個の重さの値を求めたときの，誤差の範囲について考えることにした。この問題に対して，多くの生徒が理由を明らかにして解決することができた。

＜第3時＞

第2時の問題において，重さを測るビー玉の個数を一般化した場合を考えた。生徒達は，前時にビー玉1個のときの誤差の範囲について学習している。そこで，そのことをもとに，ビー玉の個数が10，20，…，90個のとき誤差の範囲を求め，表にまとめていた。そして，この表をもとにビー玉x個のときの誤差の範囲について考えていた（写真2）。

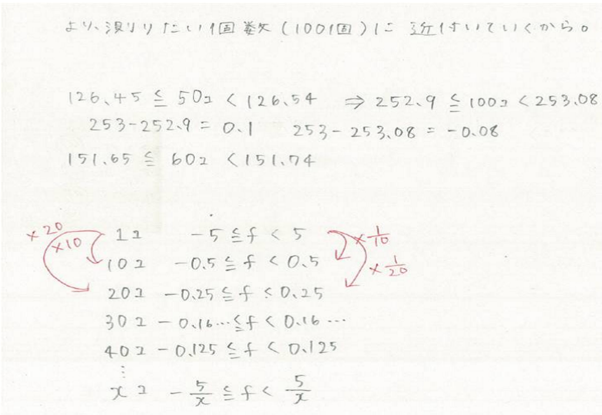


写真2

また，数人の生徒がビー玉の個数による誤差の範囲の変化の様子を写真3のようなグラフで表していた。

しかし，多くの生徒は，今回の課題に対して，納得のいく結論を導くことができていなかった。そこで，全体交流の場面において，教師側から生徒の意見に補足説明をし，生徒の理解を促した。

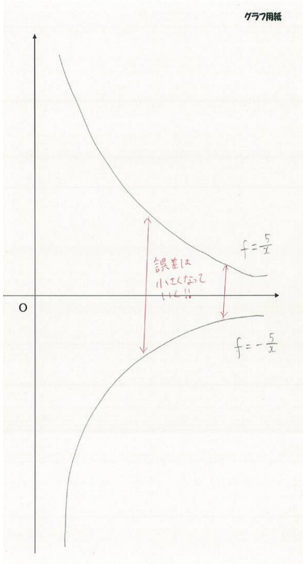


写真 3

5．考察

5.1　アンケート結果

アンケートの結果を報告する。アンケートの項目が記述式のため，一部抜粋して紹介する。また，百分率の数値は小数第 1 位を四捨五入している。

1. 2 つの誤差について, 分かったことを書いて下さい。

＜製品誤差＞

・製品そのものの重さの誤差

・作る過程で，小数の小さいところで誤差があること

・同じ製品でも重さが違うこと

＜測定誤差＞

・真の値 – 測定値

・電子てんびんで四捨五入したときに生じる誤差

・計算で求められる。

・測定するビー玉の個数を増やせば，誤差が小さくなる。

この項目から製品誤差と測定誤差の違いについて正しく理解できた生徒は，全体の 71 %であることが分かった。また，測定誤差については，用語の意味だけでなく，性質までしっかりと理解しているであろう回答が得られた。

2. 測定誤差について考えるときに，関数のどのような考え方を使いましたか。

・比例，反比例

・規則性を見つけ，x の範囲を明らかにする。

・ビー玉の個数が増えると，誤差がどうなるかと考えた。

・表やグラフを使って考える。

3. 授業の感想を書いて下さい。

・難しかった。

・生活に結びつきそうな単元なので，もう少し考えたいと思った。

・誤差について，よく理解できた。

・普段の生活で何気なく分かっているつもりのことを数学的に説明できた。

（評価問題）

100 個のビー玉の測定値をできるだけ個数の少ないビー玉を測定して，計算から求めたい。誤差 e の範囲を $-0.1 \leqq e < 0.1$ にしたいとき，何個のビー玉を測定すればいいでしょうか。

この問題に対する正答率は，全体の 43 %とやや低めだった。

5.2　ねらいに対する考察

本授業におけるねらいの達成度について考察する。

(a) 真の値・測定値・誤差の用語の意味や表し方を知り，それらを活用することができる。

アンケート結果から,「製品誤差」や「測定誤差」などの「誤差」の用語の意味については，大半の生徒が理解していることが分かった。また，他の用語や表し方についても，授業中の様子や回収した学習プリントから，おおむね理解していると判断できる。よって，このねらいについては達成できたと考える。

(b) 誤差の範囲に関する課題を，表，式，グラフを用いて解決することができる。

ビー玉 n 個の重さの測定値から，ビー玉 100 個の重さの真の値と誤差のそれぞれの範囲を

計算して求め，学習プリントに「表」をかき，測定するビー玉の個数が増えると誤差が小さくなることを理解している生徒の姿が多くみられた。しかし，このことを一般化し，文字を使った「式」や，分かりやすく「グラフ」にまとめる生徒の姿はあまり見られなかった。よって，このねらいは十分に達成できなかったと考える。

6．今後の課題

まず第一に，本教材の見直しである。アンケートには，40％の生徒が「難しかった」や「よく分らなかった」等の意見を書いていた。この原因として，次の2つを考えている。1つ目は，初めて学習する内容に対し，覚える用語が多く，また，複数の文字を使うため，生徒が処理しきれないことである。2つ目は，中学校では学習していない，不等式の性質を用いることは，生徒にとって予想以上に困難だったことである。今後，この2点を見直していきたい。

第二の課題は，新たな教材の開発である。今回のように，日常生活など身近な事象を題材とした教材は，生徒の興味・関心を高めると考える。そのため，今後も，身近な事象から数学へ繋げていけるような教材を開発できるよう研究を進めていきたい。

謝辞

最後に，実践の場を提供して下さった岐阜大学教育学部附属中学校に感謝する。

引用文献

[1] 文部科学省, 2008, 中学校学習指導要領解説, 数学編.

[2] 河村哲也著, 2006, 数値計算入門，サイエンス社.

[3] 相馬一彦他12名，2008，新版中学校数学１平成21年度移行教材，大日本図書.