岐阜数学教育研究
2010, Vol.9, 94-102

数理と現実を照らし合わせて考察する教材の開発と実践

鷲見浩章[1]，愛木豊彦[2]

数学の授業で，実験や観察を行えば，事象に対する興味関心も生まれ，また，計算結果と実験結果が一致すれば， 数学が日常に生かせたという経験になり， 数学の有用性を感じられるものと考えた。そこで，物体の水平投射という物理現象を数式で表し，それに対する数学的な考察をもとにジェットコースターモデルを作成するという教材を開発した。本論文では，安全性という視点で水平投射について考察することを通して，既習の内容を活用し，さらに，理解を深めることをねらいとした授業の実践結果を報告する。

＜キーワード＞放物線，測定値の処理，接線，ジェットコースターモデル

1. はじめに

現在，数学を学習する目的について疑問を感じている生徒や，数学と日常とのつながりを感じていない生徒は少なくないように思う。そのような生徒にも,「数学は面白い教科だ」,「日常と関わりがある教科だ」ということを伝えたい。数理的に考察したことが現実で起こったり，日常の事象が数学的に説明できたりすることで，生徒がそのように感じてくれるのではないかと考える。

中学校学習指導要領第 2 章第 3 節数学科の目標には,「事象を数理的に表現する能力を高める」とある。これについて，中学校学習指導要領解説数学編では，次の 2 つの場面で行われると示されている ([1])。

- 日常生活や社会における事象を数学的に定式化し，数学の手法によって処理し，その結果を現実に照らして解釈する場合。
- 数学の世界における事象を簡潔な処理しやすい形に表現し適切な方法を選んで能率的に処理したり，その結果を発展的に考えたりすること。

そこで，数学と現実事象とのつながりを生徒に伝えたいと考えたので，事象を数理的に表現する場面として，前者を取り上げることとした。このような場面を経験することで，事象を数理的に表現する能力が高まり，数学の有用性も感じることができるのではないかと考えた。

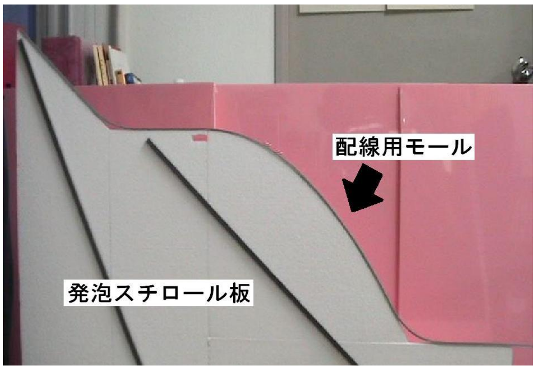
今回，題材として選んだものは，鉄球を用いたジェットコースターモデルの作成である。これは，[2] で中学生を対象とし，自由なもの作りに重点をおいた授業として既に取り上げた題材である。この題材を再び選んだ理由は,次の 3 つである。1 つ目は，モデル作成の過程において，理科との関連を説明することで,現実事象とのつながりを伝えることができることである。2 つ目は，現象を数式で表した結果をモデル作成によって現実と照らし合わせて解釈できるからである。そして，3 つ目は，ジェットコースターモデルの作成に安全性という視点を加えることで，関数 $y = ax^2$ について深く考察することができるからである。2 つ目と 3 つ目については，次節で詳しく述べるが，これらは [2] ではあまり触れなかった内容である。特に 3 つ目を扱うのは，これが初めてである。

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

2. 教材について

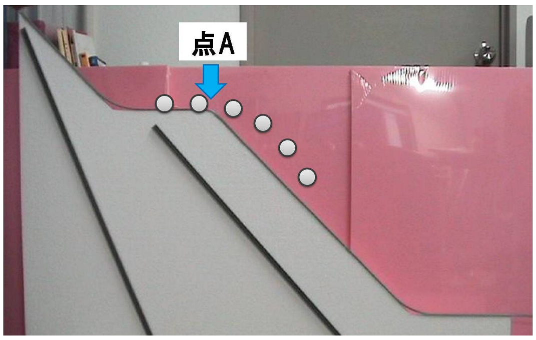
2.1 題材について

ジェットコースターモデルとは，図1のように発泡スチロールの板で作ったコースの上に配線用モールを貼り，その上で鉄球を転がすというものである。



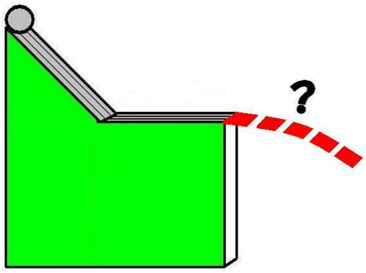
(図1)

ジェットコースターモデルを作成する上で重要なことは，鉄球がコースから浮かないにようにすることである。例えば，図2にある点Aから先が直線の下り坂となっているようなコースでは，点Aにおいて鉄球が水平投射されるため，コースから浮いてしまい，コースアウトし，コースの最後まで転がりにくくなってしまう。



(図2)

また，ジェットコースターという名前が付いているため，速く転がるようできるだけ急な下り坂のコースにしたい。このように，鉄球が浮かずに，かつ，速く転がるような図3のコースに続く下り坂を作ることがジェットコースターモデル作りの目的である。



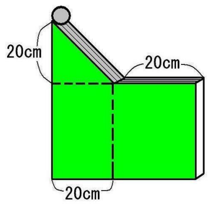
(図3)

まず，水平投射された鉄球に接するコースについて，[2]で得られた結果を紹介する。水平投射された鉄球の中心は放物線を描くが，鉄球には大きさがあるので，鉄球に沿うようなコースは放物線ではない。しかし，鉄球の半径が十分小さいと考えることで，設計するコースを鉄球が描く軌跡と同じ放物線とみることができる([2])。これを仮定(＊)と呼ぶことにする。

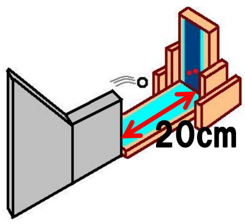
2.2 実験と実験結果に対する考察

仮定(＊)を用いて鉄球がレールから浮かないコースを設計するために，鉄球が描く軌跡の方程式を求める。まず，水平投射される瞬間の鉄球の位置を原点とし，鉛直方向上向きをy軸とし，それに直交するようにx軸をとると，鉄球の軌跡は$y=ax^2$と表される。このとき，aの値は，放物線が通る1点の座標から求められる。

その座標を次の実験によって求める。図4の発射台から，水平方向に20cm離れたところに図5のようにカーボン紙と方眼紙を貼った台を置く。



(図4)



(図5)

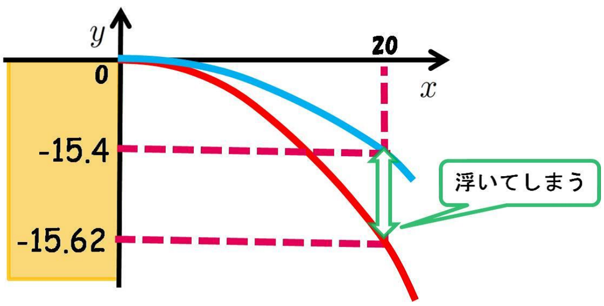
そして，発射台から鉄球を水平投射させ，この台に当てることで鉛直上向きへの移動距離を測定する。この実験を 5 回行った結果をまとめたものが表 1 である。

n	1	2	3	4	5
y_n	-15.4	-15.5	-15.5	-16.0	-16.7

ただし，y_n は n 回目の測定値を表すものとする。

(表 1)

理科で実験からある値を求めようとする場合，複数の測定値の平均を採用することが多い。上の実験結果では，平均値は -15.62 であり，求める a の値は -0.03905 である。しかし，様々な要因で誤差が生じることを考えれば，得られた測定値は，実際に $x=20$ における y 座標として起こりうる値である。つまり，$y=-0.03905x^2$ から下り坂を作った場合，$(20,-15.4)$ を通ることも起こりうる。このとき，鉄球はレールから浮いてしまう (図 6)。



(図 6)

従って，いずれの実験結果が起こったとしても鉄球がコースから浮かないようにするためには，$(20,y_M)$ を通るコースを作成すればよい。ここで，$y_M=\max_{1\leq n\leq 5} y_n$ である。なぜならば，$(20,y_M)$ を通る放物線の方程式を $y=a_Mx^2$ とすると，$y_M=a\cdot 20^2$ より

$$a_M=\frac{y_M}{400}$$

である。同様に，$(20,y_n)$ を通る放物線の方程式は $y=ax^2$ より

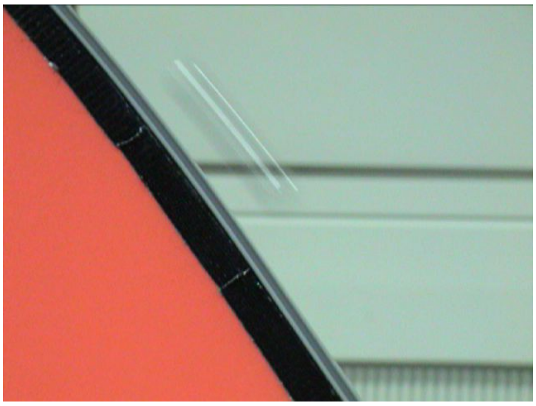
$$a_n=\frac{y_n}{400}$$

である。今，$y=a_Mx^2$ のコースを作ったとする。そして，$(20,y_n)(n=1,2,\ldots,5)$ を通るように鉄球が飛んだとすると

$$a_nx^2\leq a_Mx^2 \quad (x>0)$$

なので，鉄球はコースから浮かない。

また，浮かないようにするためには，$a=0$ とすればよいが，それでは，水平な直線コースとなり下り坂ではない。前述したように，できるだけ急な下り坂を作ることを考えている。従って，実験結果が起こりうるすべての場合だと考えると，$y=a_Mx^2$ が鉄球が浮かない最も急なコースということになる。実際，測定値の最小値を用いて作成したコースでは，写真 1 のようにレールから鉄球が浮くこともある。



(写真 1)

このように，目的によっては，複数の実験結果から平均値ではなく最大値を選択する場合がある。得られた情報から，目的に合ったものを選び出すということは日常でも必要な能力である。また，現在の学習指導要領では測定値の取り扱いも学習内容となった。従って，ここで述べたような測定値の処理方法を，授業で取り上げることにした。

2.3 直線コースとの連結

次に，コース上のある 1 点 $\mathrm{A}(\alpha,a\alpha^2)$ から先を直線にするということを考える。鉄球の瞬間速度の向きは，鉄球が描く放物線の接線

の傾きと一致する。そこで，点Aにおける鉄球の運動の向きを制限するように，接線よりも傾きの値が大きい直線を点Aにつなぐことで，鉄球はレールから浮くことはなくなる。一方，接線よりも傾きの値が小さい直線を点Aにつなぐと，鉄球の運動の向きを制限できるどころかレールから浮いてしまう。従って，鉄球が浮かない最も急な直線は，その点における放物線の接線である。つまり，鉄球が浮かない直線の傾きの限界は接線の傾き，すなわち $2a\alpha$ である。この最も急な直線の傾き k を，中学生の学習内容にもとづき，次のように求める。

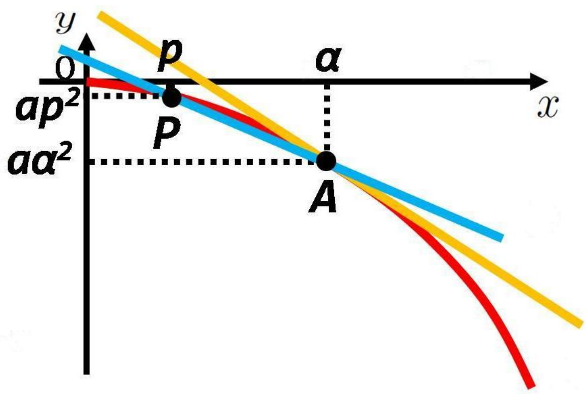
まず，x 座標が $p(0 \leq p < \alpha)$ である放物線上の点Pと点Aを結ぶ直線を考える。この直線の傾きは，

$$\frac{a\alpha^2 - ap^2}{\alpha - p}$$

であり，グラフ1からこの直線は，$x > \alpha$ において放物線より上にあることがわかる。つまり，このコースならば鉄球は浮かない。よって，

$$\begin{aligned} \frac{a\alpha^2 - ap^2}{\alpha - p} &> k, \\ a(\alpha + p) &> k \end{aligned}$$

となる。

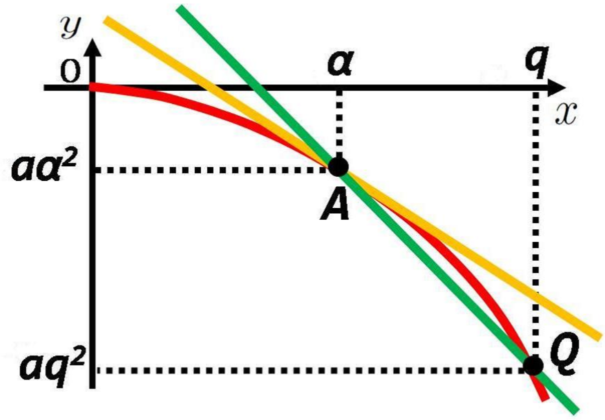


(グラフ1)

同様に，x 座標が $q(q > \alpha)$ である点Qと点Aを結ぶ直線を考えることで，グラフ2より

$$\begin{aligned} \frac{a\alpha^2 - aq^2}{\alpha - q} &< k, \\ a(\alpha + q) &< k \end{aligned}$$

がわかる。



(グラフ2)

従って，p と q を α に近づければ，k の値の範囲が狭まり，その値が $2a\alpha$ であると予想できる。

さらに，予想した値を傾きとするAを通る直線 $y = 2a\alpha(x - \alpha) + a\alpha^2$ と放物線 $y = ax^2$ の交点を求めると，それがただ1つしかないことから，この直線が放物線の接線であることがわかる。このように考えれば，判別式も微分も使わないので，中学生でも接線の傾きを考えられるものと考えた。さらに，この思考過程において，高等学校数学科数学IIで微分を学習する上での素地が養えるものと考えた。そして，何よりも，2次関数の変化の割合を活用することで，それを学ぶ意味を再確認してほしいと考えた。

3. 授業について

前節までに示した内容を踏まえ，以下のように授業実践を行った。

単元名：関数の利用

時間数：全3時間

場　所：岐阜大学教育学部附属中学校
対　象：3年3組生徒 (39名)
実施日：平成22年2月25日，3月2日，3日
各時間のねらいは次の通りである。
＜第1時＞
　鉄球がレールから浮かないようなコースの設計をするために，測定値の最大値を用いて，鉄球の軌跡を式で表すことができる。
＜第2時＞
　前時で求めた式をもとに，変化の割合の絶対値が増加していくことを感じながら放物線を描き，コースアウトしないような下り坂を作成できる。
＜第3時＞
　放物線上の2点を通る直線の傾きの変化を調べることを通して，放物線の接線の傾きを根拠を持って予測できる。

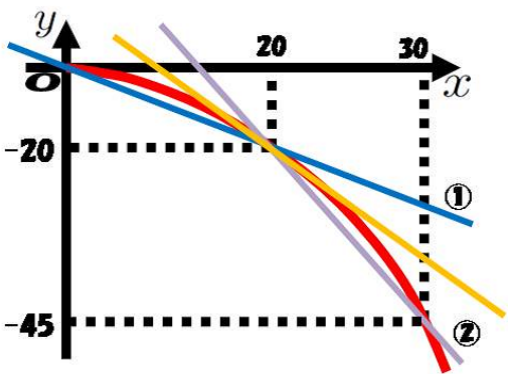
3.1 授業の概要

　全3時間のこの単元を次のように各時間の内容を計画した。
＜第1時＞
　単元の導入で，ジェットコースターモデルを転がる鉄球の様子を観察し，鉄球がレールから浮く理由を考える。鉄球が描く軌跡は放物線であるため，その軌跡をコースとして作れば浮くことはないだろうと考えられる。
　放物線の式 $y = ax^2$ の a を求めるためには，放物線が通る点の座標を知ることが必要である。そのため，2.2節で述べたように，実験，測定を2，3人のグループに分かれて行う。実験を5回行い，鉄球の鉛直上向きへの移動距離を調べる。この実験では測定値に誤差が生じるので，生徒は，あるグループの実験結果をもとにこれらの測定値の処理の仕方について考える。コース作成の目的は，どんなときも鉄球がレールから浮かないようにすることであるから，それを考慮すれば，観測値の最大値から a を求めるのが適切であると結論づけることができる。

＜第2時＞
　第1時では，鉄球の軌跡を式で表した。この式が表す放物線上の座標を方眼紙にとる。その方眼紙を発泡スチロール板に貼り，コースを切り出す。そして，そのコースで鉄球を転がし，レールから鉄球が浮かないことを確かめる。
＜第3時＞
　次のような問題を提示し，具体的な放物線上の点における接線を求める。

> 　$y = -0.05x^2$ で設計した放物線の下り坂の (20, −20) の地点から，直線の下り坂につなぎたい。どんな傾きの直線でつなげば，鉄球はレールから浮くことなく転がるだろうか。

鉄球がレールから浮かず，この直線の傾きが最も急になるものを求める。授業の導入で，図7を提示し，直線①と直線②それぞれの傾きを，放物線の交点の座標から求める。



(図7)

傾きを求めるためには，放物線と直線の2つの交点における変化の割合を求めればよい。そして，直線の傾きを変え，この2つの交点を近づけることで，求める接線の傾きは −2 であると予測していくとした。

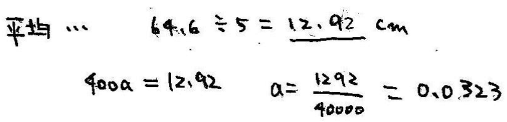
3.2 生徒の活動の様子

＜第1時＞

鉄球が浮かないジェットコースターモデルの下り坂作りというこの単元の目標をおさえたうえで，鉛直上向きへの鉄球の移動距離を測定する実験を 2，3 人のグループを作り行った。実験を行うと，平均を求め，鉄球が描く軌跡の式を求める生徒も何人かいた。しかし，教師の「本当にそのコースで鉄球は浮かないの。」という問いかけにより，平均から式を求めることに疑問を持つ生徒もあらわれたようだった。すべてのグループの実験が終わった段階で，1 つのグループの実験結果を挙げ (下表)，実験結果から考えられる最適な放物線を考えていった。

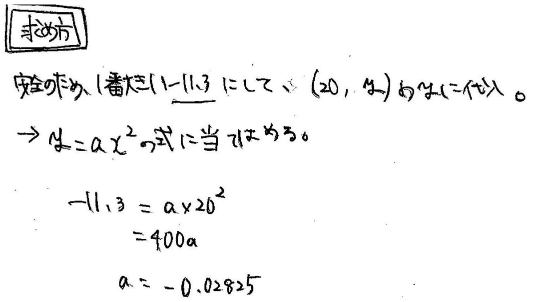
-11.3	-12.7	-13.1	-13.2	-14.3

この追究の時間，生徒 A の考えのように平均を求め，放物線の式を求める生徒が多く見られた。



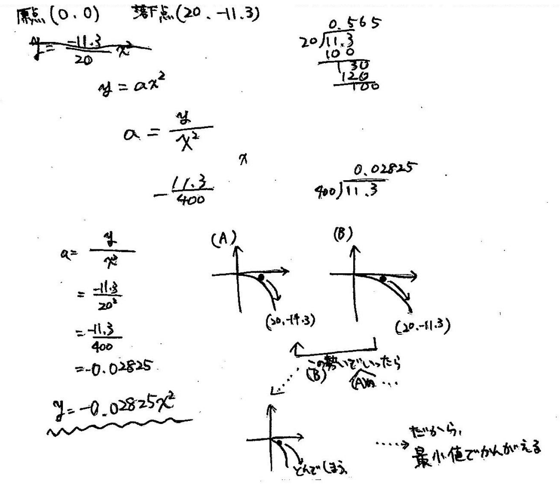
(生徒 A の考え)

ここで，教師が机間指導で,「もしも，鉛直上向きに –11.3 移動する結果が得られるように鉄球が飛び出してしまったら，鉄球は浮いてしまわないか。」という発問を生徒にしていくと，生徒 B の考えのように平均ではなく測定値の最大値を用いて放物線の式を求めるとよいことに気がつく生徒が増えていった。

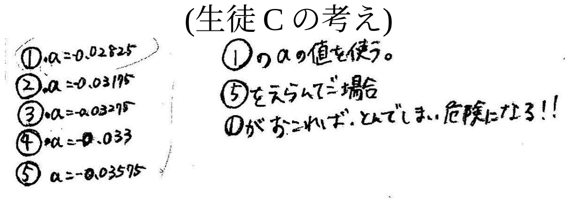


(生徒 B の考え)

また，最大値を用いて考えていく理由をグラフを用いたり (生徒 C の考え)，a の値を比べていくことで説明しようとする姿 (生徒 D の考え) も見られた。



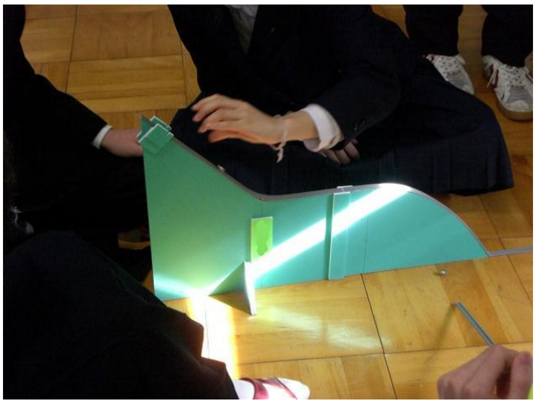
(生徒 C の考え)



(生徒 D の考え)

＜第 2 時＞

第 1 時で，コースを表す式を求めるために測定値の最大値を用いるとよいことを見つけた。これを用い，グループで実験に用いたコース (図 2) の先の下り坂を作っていった。まず，グループごとの測定結果の最大値から下り坂の放物線の式を求める。そして，その式をもとに，方眼紙にグラフを描く。このグラフに沿って，発泡スチロール板を切り出し，瞬間接着剤によってコースをつなぎ，レールとなる配線用モールを貼る。こうして作ったジェットコースターモデルを使って，鉄球を転がす実験を行った (写真 2)。


(写真 2)

レールのつなぎ目などのずれにより，鉄球がうまく転がらないグループもあったが，教師の支援の下，最後まで転がるようなジェットコースターモデルをすべてのグループが作ることができた。

＜第 3 時＞

問題を提示した後，図 7 における，直線①，②の傾きを求めた。この直線①，②で連結すると鉄球はレールから浮くかということを問うと，直線①では浮かず，直線②では浮くという答えが返ってきた。そして，できるだけ急な直線で，しかも鉄球が浮かないような限界の傾きは -2.5 より大きく -1 よりも小さいということをおさえた。直線①の傾斜を少しだけ急にしてもまだ鉄球は浮かず，直線②の傾斜を少しだけ緩やかにしてもまだ鉄球は浮いてしまうということも感覚的にわかったようであった。ここで，課題を提示し，鉄球が浮かない直線の傾きの限界の追究に入った。放物線との交点を考えながら，直線の傾きを求めていき，接線の傾きを考えた。しかし，ほとんどの生徒が，求める傾きが -2 ではないかというところまではたどり着くことができなかったため，授業の最後に，教師が考え方の説明を行った。そこでは，求める傾きの値が入る範囲が狭くなったことにより，傾きを予想することができた生徒もいた。

一方で，交点の x 座標に着目して考えている生徒がいた。この生徒は次のように考えた。

求める直線を $y = ax + b$ とおく。この直線と放物線 $y = -0.05x^2$ との交点を求めるために，

$$\begin{cases} y = ax + b \ldots (1) \\ y = -0.05x^2 \ldots (2) \end{cases}$$

とし，式 (1) を式 (2) に代入すると

$$\begin{aligned} ax + b &= -0.05x^2 \\ x^2 + 20ax + 20b &= 0 \end{aligned}$$

という 2 次方程式となる。

ここで，直線 $y = ax + b$ と放物線 $y = ax^2$ は $(20, -20)$ のみで交わっているはずだから，この 2 次方程式は

$$\begin{aligned} (x - 20)^2 &= 0 \\ x^2 - 40x + 400 &= 0 \end{aligned}$$

でなければならない。よって，係数を比較することで $a = -2$ が求めることができる。

4. 考察

授業における生徒の様子や実践後に生徒に対して行ったアンケートの結果から，本教材と授業について考察していく。

アンケートには，次のような評価問題を載せた。

$y = -0.05x^2$ のコースを作りました。鉄球が $(20, -19)$ を通るような放物線を描く可能性があるとき，このコースは安全と言えますか。

安全 ・ 危険

それはなぜですか。

この問題に対し，正答率は 86.1 %(31 人/36 人) であった。しかし、理由について，放物線の形

や座標に着目して記述できた生徒は，このうちの 32.2 %(10 人/31 人) であった。感覚的に浮いてしまうということはわかるのだが，それを数学的に表現することができないようである。

次に，授業に対する感想の一部を紹介する。

- どこで数学が応用されているか興味が持てるようになりました。
- いろいろなところで数学が利用されているのだと思った。
- ジェットコースターのコースを式で作って実際にうまくできたのに感動した。
- 実験が楽しかった。
- 実物を使うことで式がうまく証明されたので楽しかった。

このような感想から，数学への興味関心が高まったと考えられる。感想の中で多かったものは,「実験をしてみて楽しかった，よくわかった。」というものであった。実験等を行い，現実と照らし合わせる活動や，自分で実際に作ってみることは，生徒の興味関心を高めるだけでなく，数学の理解という点にも効果があるのではないかと考えられる。

一方で,「とても難しかった。」という感想もこれらの感想と同じくらい集まった。特に第 3 時については，接線の傾きまで考えることができた生徒は極めて少数であった。生徒が難しく感じた要因は次の 3 点であると考えられる。

- 2 点を通る直線の傾きを求める際，$y = ax + b$ に 2 点の座標を代入して得られる連立方程式を解く生徒が多かったことである。この方法では，手間がかかるので，何度も計算しようという気になりにくい。傾きを求めるだけならば，変化の割合から求める方が簡単であることを事前に確認しておく必要があった。
- 値を求めるために，範囲を狭めていくという発想が不等式を学習していない中学生には難しかったことである。
- 直線と放物線の位置関係がグラフで描かなければ分かりにくいということである。放物線上にある 2 点の x 座標が近い場合，それらを通る直線が放物線上を通るか下を通るかがはっきりしないため，考えを進めていけないようであった。直線と放物線の位置関係は，中学 3 年生の学習内容ではないので，より慎重に扱うべきであった。

これらのことから，第 1 時，第 2 時のねらいについては達成できたが，第 3 時のねらいについては十分に達成されていないと考える。

5. 今後の課題

まずは，本教材の見直しである。特に第 3 時では，授業のねらいが十分に達成できなかった。例えば，生徒の多くは，放物線上の任意の点をとって考えていけばよいということに気づけず，自分で考えを進めることができなかった (課題 1)。また，直線と放物線の位置と交点の数について，接線と傾きがわずかにしか違わないような直線について，鉄球が浮くか浮かないか判断しかねる生徒もいた (課題 2)。

課題 1 に対しては，個人追究前に例を挙げて全体でやってみるという時間を作ることで解決できるのではないかと考える。課題 2 に対しては，これも全体で鉄球が浮きそうにないような直線は放物線とどこで交わっているのか，また，鉄球が浮きそうな直線と放物線はどこで交わっているのかということをおさえる必要がある。生徒が考えを進めることができるよう，授業で扱う内容や展開，生徒への手立てを改良していく必要がある。

そして，この他にも，生徒が興味関心を持ち，数学の有用性を伝えることができる教材

を考えていきたい。

引用文献

[1] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領 解説数学編.

[2] 鷲見浩章・愛木豊彦，2009，物体の水平投射を題材とした教材の開発と実践, 岐阜数学教育研究，第 8 号，95-102.

[3] 吉田稔　他 17 名，2006，新版中学校数学 3，大日本図書株式会社.