岐阜数学教育研究
2010, Vol.9, 84-93

パズルを題材とした授業の提案

安藤茜[1], 杉江舞華[1], 三國遥奈[1], 山口仁美[1], 佐治健太郎[1]

数式を使わず, 図と論理的考察から証明を考える, パズルを題材とした中学生向けの数学の授業を提案する。

＜キーワード＞敷き詰めパズル, パリティ, 帰納法, 授業案

1．序

平成20年3月に告示された現行の中学校学習指導要領 [3] では, 数学の学習目標として各学年において「図形について論理的に考察し表現する能力を伸ばす」ことが挙げられている。そこで, 生徒に図形に親近感を持たせ, 興味・関心を喚起させられるように, パズルを用いた教材の開発を行った。また, 中学校において図形領域で学習する内容は平面上の線分と円弧による線画に関する事柄が多く, 一度つまずいてしまった生徒は以降全ての図形問題に苦手意識をいだいてしまう懸念があるが, パズルのような題材は, 中学生には親しみやすいものであると思われる。数学や図形が苦手な生徒でも苦手意識等の先入観を持たずに取り組め, 数学が好きな生徒は興味をもって取り組める。そこで, 本論文では, 図形に関してパズルを用いた教材の提案を行う。

論理的な思考は図形に限らずすべての問題を解く過程で使っているが, それを意識していることは少ないと感じる。そこで, 本論文では式を使わずに, 論理的な考察から答えを導き出すような過程に重きをおき, 生徒が数学的な考え方の特徴を実感できるよう配慮した。また, 本教材中で使われる論理展開は, 「非常に多くの場合分けを考察しなければならない問題を工夫によって克服する」,「有限回の操作で無限個の事項を証明する」という考え方が含まれており, 中学校において学習する式の計算や図形の証明問題で培う論理展開とは別のものである。また, 本教材は背理法や数学的帰納法の考え方が含まれており, 高校生用の教材としても用いることができる。本論文では 2 節において教材の内容を述べ, 3 節で指導案を記すことにより, 授業を提案する。

2. 教材について

本節では教材を紹介する。2.1 節の内容は [1] の 1 章と 3 章を, 2.2 節の内容は [2] の 2 章を参考に考察を加え, 中学生用の教材として構成したものである。

定義 1. 自然数 m, n に対して, 図 **??** 左のような縦の長さが m, 横の長さが n の, $m \times n$ 個のマスを持った長方形を $R_{m,n}$ と書き, 節では**部屋** $R_{m,n}$, 節では**壁** $R_{m,n}$ と呼ぶ。

図 *1* 中, 右のような 1×1 の正方形を辺に沿っていくつか貼り合わせたものを**タイル**と呼ぶ。図 *1* 右のような *2* つの正方形からなるタイルを特に *2.1* 節では**畳**, *2.2* 節では**レンガ**と呼ぶ。

$R_{m,n}$ を, タイルを用いてすきまなく, 重複無く, 覆うことを $R_{m,n}$ をタイルを用いて**敷き詰める**という。

[1]岐阜大学教育学部

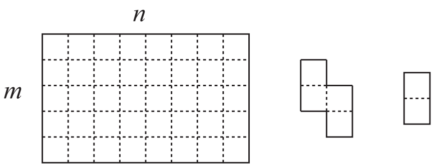

図 1: $R_{m,n}$, タイルと畳 (レンガ)

2.1 畳の敷き詰めを題材にしたもの

命題 2. *(1)* 図 *2* 左のような $R_{4,4}$ から左上隅と右下隅の *2* マスを取り除いた部屋 R_1 は畳で敷き詰めることはできない。

(2) 図 *2* 右のような $R_{8,8}$ から左上隅と右下隅の *2* マスを取り除いた部屋 R_2 は畳で敷き詰めることはできない。

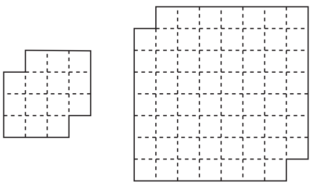

図 2: 部屋 R_1 と R_2

(1) の証明. 部屋 R_1 を敷き詰める必要があるので, 図 3 左の A のマスは必ず畳で覆われる。その覆い方は図 3 の中, 右の 1 と番号を振ったような 2 通りしかない。

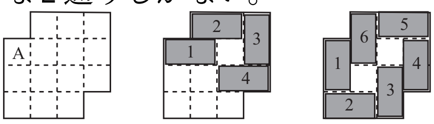

図 3: 命題 2 (1) の証明

どちらの場合も, 以降は R_1 を敷き詰めるように畳を敷いていくと図 3 の $2, 3, 4, 5, 6$ と番号を振ったような敷き方しかできず, どちらも R_1 を敷き詰めることはできない。よって, R_1 は畳で敷き詰めることはできない。 □

(2) の証明. 図 4 のように R_2 を市松模様に塗り分ける。

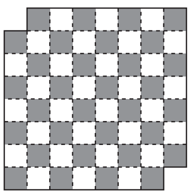

図 4: 市松模様

このとき, 白マスは 30 個, 黒マスは 32 個であり, 畳はどのようにおいても白 1 個, 黒 1 個を覆う。よって畳を 30 枚置いた時点で黒マスが 2 つ余るが, これは畳一つで敷くことはできない。よって, R_2 は畳で敷き詰めることはできない。 □

(2) の証明で使った論法は対象に 2 つの属性を与え, その属性の違いに注目するという考え方で, 単純であるが, うまく利用すれば本証明のように非自明な結論を導けることがあり, 数学の様々な場面で利用される非常に重要な考え方である。この考え方は**偶奇性**や**パリティ**と呼ばれることもある。

ここで, 畳以外にも他のタイルによる敷き詰めを考えてみよう。1×1 の正方形を 4 つ組み合わせてできるタイルは, 回転と裏返しで重なるものは同じとみなすと図 5 のような 5 種類に分かれることがわかる。各タイルには図に示すように名前をつける。

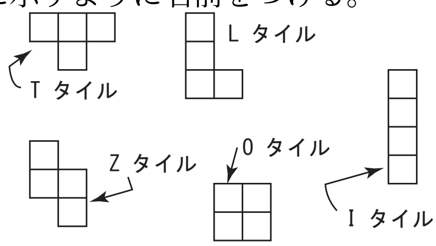

図 5: 5 種類のタイル

命題 3. *(1)* 部屋 $R_{8,8}$ は T タイルをちょうど一枚, 他のタイルを任意枚使って敷き詰めることはできない。

(2) 部屋 $R_{8,8}$ は T タイルを使わず, L タイルをちょうど一枚, 他のタイルを任意枚使って敷き詰めることはできない。

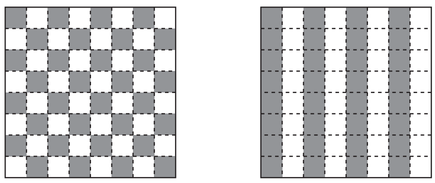

図 6: 塗り分け

(1) の証明. 図 6 左のように市松模様に $R_{8,8}$ を塗り分ける。このとき, 白マス, 黒マスともに

32 個ずつある。このとき, 図 7 に示すように, T タイルはどのように置いても白 3 マス, 黒 1 マスまたは, 白 1 マス, 黒 3 マスを覆う事になる。他のタイルは白黒同数を覆うので, T タイルを一枚おいたことによる残った白, 黒マスの数の差異は他のタイルでは埋め合わせることができない。よって敷き詰めることはできない。 □

(2) の証明. 図 6 右のように縞模様に $R_{8,8}$ を塗り分ける。このとき, 白マス, 黒マスともに 32 個ずつある。

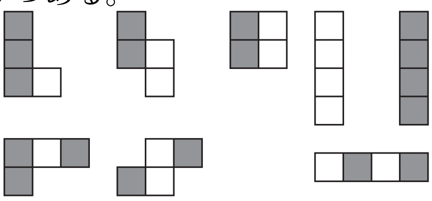

図 7: 命題 3 (2) の証明

このとき, 図 8 に示すように, L タイルはどのように置いても覆う白と黒のマスの差は 2 マスとなる。他のタイルはどのように置いても白黒同数を覆うかまたは白と黒のマスの差が 4 となるように覆う。ゆえに L タイルを一枚おいたことによる残った白, 黒マスの数の差異 2 は他のタイルでは埋め合わせることができない。よって敷き詰めることはできない。 □

これ以外にもうまい塗り分け方を発見すれば敷き詰め不可能性が示せる様々な問題を作ることができる。

2.2 レンガと壁を題材にしたもの

本節では部屋は壁, 畳はレンガであると考えることにする。

定義 4. $R_{m,n}$ をレンガで組み立てたとき, 図 9 の矢印の延長線のようにどのレンガの中心線も横切っていないような線のことを**切断線**と呼ぶ。

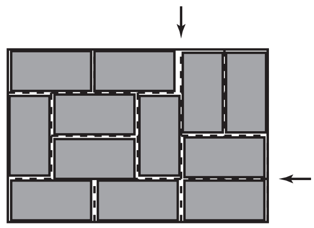

図 9: 切断線

壁をレンガで組み立てたとき, 切断線がないようにするのが理想的であろう。本節では, 切断線がないように壁を組み立てることを考える。本節ではレンガによる組み立てを考えるので m, n のどちらかは偶数である。m, n の役割を入れ替えても同じなので, 以下では n は偶数と仮定する。次は容易にわかる。

命題 5. 壁 $R_{1,2}$ は切断線がないように組み立てられる。$n \geq 3$ のとき壁 $R_{1,n}$, $R_{2,n}$ は切断線がないように組み立てられない。$R_{m,2}$ ($m \geq 3$) も組み立てられない。

次を示す。

命題 6. 壁 $R_{m,4}$, $R_{3,n}$, $R_{4,n}$ は切断線がないように組み立てられない。

証明. $R_{3,n}$, $R_{4,n}$ について示せばよい。$R_{3,n}$ を組み立てるためには図 10 の A のマスにレンガを置かなければならないが, 置き方は縦か横のどちらかしかない。

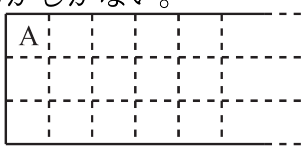

図 10: $R_{3,n}$

以降, 縦に切断線ができないように組み立てていくとどちらの場合も図 11 の 2,3,4,5 のように組み立てていくしかない。

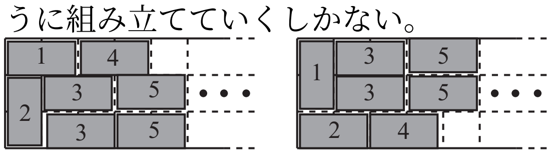

図 11: 命題 6 の証明

最後に縦のレンガを置いたとき, 横に切断線ができてしまう。ゆえに $R_{3,n}$ は組み立てら

れない。$R_{4,n}$ の証明も同様にできるので省略する。 □

命題 7. 壁 $R_{5,6}$, $R_{6,8}$, $R_{8,6}$ は切断線がないように組み立てられる。

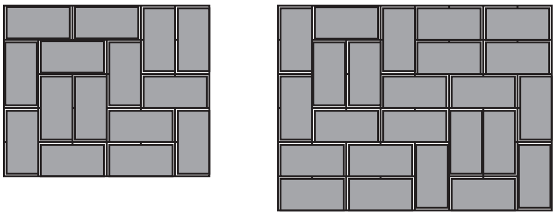

図 12: 命題 7 の証明

証明. 例えば, 図 12 のように組み立てればよい。 □

命題 8. $m, n \geq 4$ とする。壁 $R_{m,n}$ が切断線がないように組み立てられるならば $R_{m+2,n}$ も $R_{m,n+2}$ も切断線がないように組み立てられる。

証明. 壁 $R_{m,n}$ が切断線がないように組み立てられるとする。このとき, 組み立てた壁の辺 E には必ず図 13 のように一辺の長い方が E についているレンガ B が存在する。

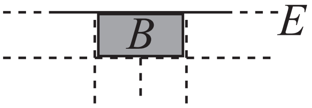

図 13: 必ず存在する部分

もし存在しないとすると, E にはすべてのレンガが短い方の辺がついていることになり, $m, n \geq 4$ なので, E から 2 本内側に入った線は切断線となるためである。

そこで E の外側に 2 列増やした壁 $R_{m+2,n}$ (または $R_{m,n+2}$) を考え, B の部分と新しく付け加えた部分を図 14 のように変形した組み立てを考えると, B によって切断線であることが防がれていた可能性がある線 l_B は変形した壁でも切断線でない。

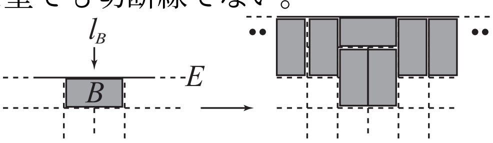

図 14: 変形

また, 新しくできた線は, $m, n \geq 4$ であることに注意すれば, どれも切断線でないことがわかる。さらに $R_{m,n}$ はすべての線が切断線でなかったので, 新しい壁には切断線はない。ゆえに $R_{m+2,n}$ も $R_{m,n+2}$ も切断線がないように組み立てられる。 □

命題 5 から命題 8 と数学的帰納法から, $R_{6,6}$ 以外の壁は切断線がないように組み立てられるか組み立てられないかがわかった。最後に残った $R_{6,6}$ が組み立てられないことは技巧的に示される。

命題 9. 壁 $R_{6,6}$ は切断線がないように組み立てられない。

証明. 壁 $R_{6,6}$ の内部を通る線 l が一つだけのレンガ K を横切るとする。$R_{6,6}$ は l によって 2 つの部分 R', R'' に分けられるが, $R_{6,6}$ は縦も横も偶数マスなので, R', R'' は両方共常に偶数マスである。l が K のみを横切るとすると, R' はレンガいくつかと, K の片方の一マスによって組み立てられていることになる。R' は偶数マスであったので, このようなことは不可能である。よって $R_{6,6}$ の内部を通る 10 本の線は必ず 2 個以上のレンガを横切る。

また, 各レンガは一本の線にしか横切られない。よって, $R_{6,6}$ の内部を通る 10 本の線はそれぞれが 2 個以上のレンガを横切り, それらはすべて違うものである。これは $R_{6,6}$ には 20 個以上のレンガが存在することを意味するが, $R_{6,6}$ には 36 マスしかないため, これは不可能である。よって $R_{6,6}$ は切断線がないように組み立てられない。 □

命題 5 から 9 までを組み合わせると, $R_{m,n}$ が切断線がないように組み立てられるかどうかをすべての m, n の値によって知ることができる。それをまとめると次の表を得る。表では, 横軸に m, 縦軸に n をとり, 切断線がないように組み立てられる壁を与える (m, n) の組には○, 組み立てられない壁には×をつけた。

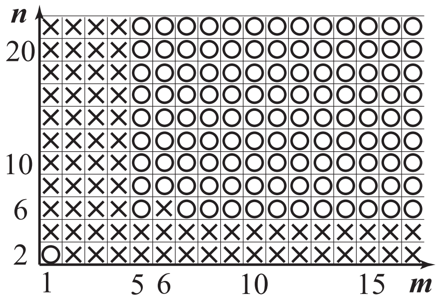

図 15: 組み立てられる壁

3. 授業案について

本節では指導案を示すことにより, 2 節の内容に基づいた授業の提案を行う。授業では, 生徒が絵を描いて生徒自身で論理的な考え方に取り組めるように, また生徒自身で新しい問題を考えられるような機会と問題を設けることを意識した。授業は 50 分の授業 4 回を想定している。以下に, 各回ごとの指導案を示す。

本時 (1/4)

(1) ねらい

タイルの塗り分けをすることによって, 直接的な証明をしなくても, 敷き詰め不可能性を示すことができる。パリティの考え方を理解する。

(2) 展開

段階	学習活動	留意点, ●評価
導入	$R_{4,4}$, $R_{8,8}$ を畳で敷き詰める。→できる。	タイル・畳・部屋・「敷き詰める」の意味を理解する。
	R_1 を畳で敷き詰める。	R_1 の理解をする。タイルの概念をここでうえつける。
	命題 2 (1) の証明を理解する。→ R_1 は畳で敷き詰められない。	
	R_2 を畳で敷き詰める。 →できない。	R_2 の説明をする。
展開	どうして R_2 は敷き詰められないのだろうか。	状況をみてヒントを出す。「畳はタイル二枚。白と黒で塗り分けてみよう。」
	命題 2 (2) の証明を説明する。	マス目の描かれたプリントを作成する。
	$R_{8,8}$ は, T タイルちょうど 1 枚, 他のタイルを任意枚使って敷き詰められるでしょうか? またその理由を考えましょう。 命題 3 の証明を説明する。	5 種類のタイルを紹介する。
終末	[まとめ] タイルを塗り分けることによって敷き詰められないことを示すことができる。	●式を考えずに塗り分け方とパターンを考えることができる。[数学的な見方・考え方]

本時 (2/4)
(1) ねらい
タイルの塗り分けを利用して, 敷き詰め不可能性についての問題をグループごとに作成できる。問題作成を通してパリティの考え方を利用できる。
(2) 展開

<table>
<tr><th>段階</th><th>学習活動</th><th>留意点, ●評価</th></tr>
<tr><td>導入</td><td>前時の活動の振り返りをする。
• タイル・畳・部屋の説明
• タイルの塗り分けによって証明は可能になる。
→もっと他の例を出せないだろうか。</td><td></td></tr>
<tr><td>展開</td><td>グループごとに問題を作って, みんなで解いてみよう。
[A グループ] 5 種類のタイルのうち, 1 種類を使って, $R_{4,4}$ を敷き詰めてみよう。全ての種類でできるかな? できない種類があったら理由を考えてみよう。
[B グループ] $R_{8,8}$ で, T タイルを使わず, L タイルを一枚だけ使い, 他の 3 種類を適当に使って, 敷き詰められるだろうか? 理由も考えてみよう。
グループごとに問題を発表し, 他のグループの問題を解いてみる。
解いた問題を交流する。</td><td>●様々なパターンを探すことができる。[意欲・関心・態度]</td></tr>
<tr><td>終末</td><td>[まとめ] 塗り分けがわかれば問題を作ったり解いたりすることができる。</td><td>●グループで協力して進んで問題に取り組むことが出来る。[意欲・関心・態度]</td></tr>
</table>

本時 (3/4)

(1) ねらい

帰納法を使って組み立て不可能性を示す活動を通して数学的な考え方のよさを実感することができる。

(2) 展開

段階	学習活動	留意点, ●評価
導入	$R_{5,6}, R_{6,8}$ を切断線なく組み立てられるかやってみる。→ できる。	レンガ・壁・切断線の説明をする。
	$R_{1,n}, R_{2,n}$ $(n \geq 2)$ は不可能である。	不可能であることを生徒と一緒に示す。「明らかだよね」
	$R_{3,n}, R_{4,n}$ はどうなのだろう?	$R_{3,n}, R_{4,n}$ を提示。
展開	$\boxed{R_{3,n}, R_{4,n} \text{ は切断線がなく組み立てられるだろうか}}$	
	命題 6 の証明を説明する。	文字が苦手な生徒には“具体的な数”でやらせる。
	[練習] $R_{6,6}$ は切断線なく組み立てられるか? →できない。	講義形式で証明する。
	$m, n \geq 4$ とする。 $R_{m,n}$ が切断線がないように組み立てられるならば $R_{m+2,n}$ も $R_{m,n+2}$ も切断線がないように組み立てられる。	講義形式で理解する。
	図 **??** を埋める。	図 **??** のプリントを配る。
終末	[まとめ] 規則性を見つければ, 一つ一つ調べなくても, あらゆるパターンで成り立つかどうかわかる。	●式を使わずに, 規則性を見つけて考えることができる。[数学的な見方・考え方]

本時 (4/4)

(1) ねらい

グループごとに交流して組み立てを考える活動を通して自分の考えを論理的に筋道を立てて説明することができる。

(2) 展開

段階	学習活動	留意点, ●評価
導入	前時の活動のふり返りをする。 • レンガ・壁・切断線の説明。 • 帰納法と背理法の考え方を使えば証明は可能になる。 →もっと他の例は出せないだろうか。	
展開	グループごとに問題を作ってみんなで解いてみよう。 [A グループ] $R_{4,4}$ を T タイル, L タイル, O タイル I タイルの 4 種類のうち 1 種類を使ったときに出来る切断線の数は? [B グループ] $R_{8,8}$ を 5 種類のタイルのうち 1 種類以上使って切断線なく埋めてみよう。 グループごとに問題を発表し, 他のグループの問題を解いてみる。 解いた問題を交流する。	●様々な問題を作ることができる。[意欲・関心・態度]
終末	[まとめ] 規則性が分かれば, 問題を作ったり解いたりすることができる。	●前時までに学んだことを活かして進んで問題に取り組むことが出来る。[意欲・関心・態度]

引用文献

[1]S. W. Golomb. 1994, Polyominoes, Puzzles, patterns, problems, and packings. Princeton University Press, Princeton, NJ, second edition.

[2]G. E. Martin. 1991, Polyominoes, A guide to puzzles and problems in tiling. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC.

[3] 文部科学省. 2008, 中学校学習指導要領 中学編, 文部科学省.