岐阜数学教育研究
2010, Vol.9, 70-83

ダムの転倒を題材とする授業案について

小暮あゆみ[1]，愛木豊彦[2]

本論文の目的は，中学 3 年生を対象とする授業を提案することである。現在，数学教育において「活用」のあり方は重要な研究課題の一つである。そこで，数学を活用する具体例として,「立体が倒れる」という現象を扱う。授業は 3 時間構成であり，それぞれの時間で実験・論証・計算によって立体の倒れにくさについて考察する。その考察の過程において，角度の性質，三平方の定理などを用いて問題を解決していく。ここでは，授業案及び実践結果を報告する。

＜キーワード＞重心，ダム，三角柱，傾き，三平方の定理

1．はじめに

以前，小学生を対象に,「ダム作り」を題材とした実践を行った ([1])。そこでは，2008 年 9 月に改訂された中学校学習指導要領 [2] において,「図形」領域に「投影図」が加わったことから，投影図を描く必然性が感じられることを意図して授業案を作成した。このときの児童に示した課題は,「形に着目して，強いダムを作ろう」であった。授業の準備の段階で，多くの実験から，強いダムの形の特徴がわかったが，それが正しいことを裏付ける根拠がなかった。そこでそれ以降，[3,4,5] を参考にしながら「強いダムの形」について，研究している。そこで，次のことが分かった（[3]）。日本では，いろいろあるダムの形式の中で，重力式コンクリートダム（図 1）と呼ばれるものが多く造られている。重力式コンクリートダムは，自重で水を支えているため,「倒れる」と「すべる」という 2 つの危険性を抱えている。

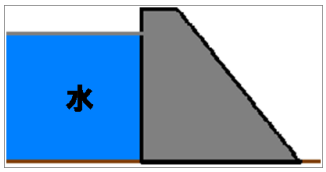


図 1

ここで,「倒れる」について着目する。ダムの断面図が図 2 のような三角形であるとすると，ダムの自重 P は，重心から鉛直下向きに，静水の圧力 Q は重心に向かって水平方向にかかる。このとき，Q ＞ P であれば，ダムは倒れる。

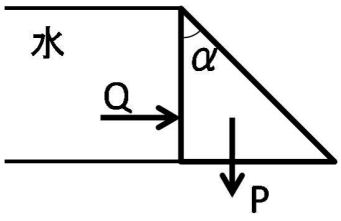


図 2

この「倒れる」という現象の考察において，中学校や高校で学習する数学が用いられている。このような現実的な場面で，既習の内容が活用できることを知り，このことを是非子どもたちに伝えたいと考え，ダムの転倒を題材とし，既習事項の活用ができるような授業案を開発することにした。

また，数学の活用は，現在の数学教育における重要な研究課題であり，多くの具体的な教材が必要とされている。この点からも本教材の開発は重要だと考えている。

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

ここで扱う建物が倒れるという現象については，[6] で既に，授業実践の題材として取り上げられている。[6] では，重心の考察が中心であったが，本論文で示す授業では,「倒れる」ということに，より焦点をあてている。

2．教材について

本論文で紹介する授業において，ダムの「倒れる」という現象について考え，立体の「倒れにくさ」を判断するためには，どこに着目すればいいかを考察していく。

今回の授業では，このダムの形を三角柱（写真 1）とみなす。そして，水圧による転倒を考察するのは，中学生にとって難しいので，その代わりに，板の上に三角柱を置き，板を傾けて「倒れる」という現象を考えることにする（図 3)。

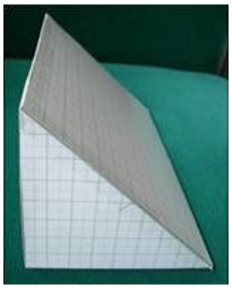


写真 1

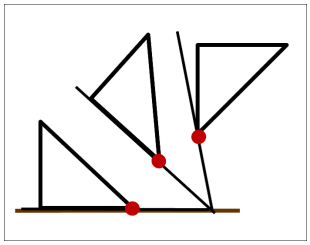


図 3

板を傾ける際，三角柱の 1 辺を板に固定する。図 4 のように，支点と重心を結ぶ直線が地面に対し垂直になるまでは，三角柱は倒れない。そこから，さらに傾けると三角柱は倒れる。

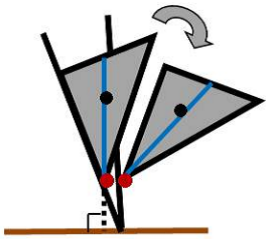


図 4

この倒れるための条件を中学 3 年生でも考察できるような授業展開にする。現在の中学 3 年生は，重心を学習していないので,「重心」という語句を使おうとすると，それを指導する時間を設けなければならない。ここでは，1 節で述べたように，既習事項の活用を重視しているため，重心という未習の語を使うのは避けたい。そこで，三角形では，頂点と重心を結ぶ直線と，頂点を通って三角形の面積を二等分する直線は同じなので,「重心を通る直線」の代わりに「面積を二等分する直線」という表現を用いることにした。つまり，立体が倒れる条件を「支点を通って三角形の面積（三角柱の体積）を二等分する直線（平面）が，地面と垂直になったときよりも，傾けると倒れる」ということにした。

次に,「倒れにくさ」について考えると，支点を通る中線と地面がなす角が小さいほど，倒れにくいことが分かる。このことを，次の図 5 を使って説明する。

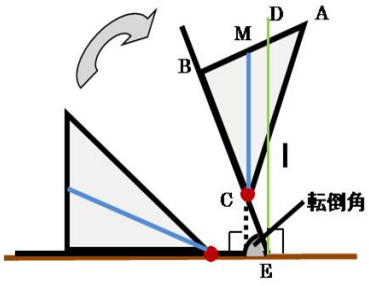


図 5

支点を通る中線が，地面と垂直になるように板を傾ける。このときの，地面と板のなす

角度を「転倒角」と呼ぶことにする。図5において，板と地面の交点Eを通り，地面に垂直な直線ℓを引く。ℓと三角形ABCの辺ABとの交点をDとする。ここで，直線ℓと中線MCは平行なので，平行線の性質より，

$$\angle \mathrm{BCM} = \angle \mathrm{BED} \qquad (1)$$

転倒角は90°−∠BEDなので，これに(1)を代入すると，転倒角は，90°−∠BCMと表される。

以上より，∠BCMが大きいほど，転倒角は小さくなるので，少し傾けただけで，倒れることになる。逆に，∠BCMが小さいほど，転倒角は大きくなるから，倒れにくくなる。これらのことから，中線と底辺とがなす角に着目すれば，倒れにくさを判断できることが分かる。

さらに，三角形の3辺の長さが分かっているときは，計算によって，倒れにくさを判断することができる。

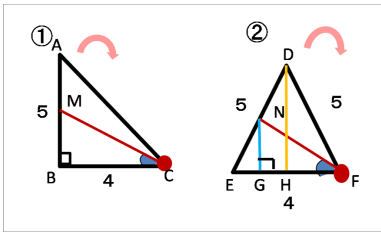


図6

図6のような三角形があったとき，底辺と中線のなす角の大きさを求める代わりに，その正接を考えることによって，倒れにくさを計算で求めることができる。このとき，正接が小さいほど倒れにくいということになる。

図6①では，底辺と中線のなす角の正接は，$\tan\angle \mathrm{BCM} = \frac{5}{8}$である。

図6②において，補助線GNを引くと，$\frac{\mathrm{GN}}{\mathrm{FG}}$が求める正接を表す。

この値を求めるために，補助線DHを引いて，高さを求める。三平方の定理より，$\mathrm{DH} = \sqrt{21}$である。このとき，EH＝2なので，中点連結定理より，EG＝GH＝1である。よってFG＝3となる。また，$\mathrm{GN} = \frac{\sqrt{21}}{2}$なので，$\frac{\mathrm{GN}}{\mathrm{FG}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$，つまり，$\tan\angle \mathrm{EFN} = \frac{\sqrt{21}}{6}$である。

以上より，$\frac{5}{8} < \frac{\sqrt{21}}{6}$なので，①のほうが倒れにくいということが分かる。

ここでは述べないが，一般の三角形に対し，同じような正接の値を求めることは，中学生でも可能である。

ここまでで述べたように考えれば，中学生でも三角柱の倒れにくさを実験や論証，計算によって考察可能である。実験，論証，計算という流れは，子どもたちにとっても授業のねらいを理解しやすいのではないかと考え，これらをもとにした展開で授業案を開発することにした。

3. 授業実践について

前節までに述べたことをふまえ，授業案を以下のように作成した。

3.1 授業のねらい

授業のねらいは次の2つである。

(a) 実験と論証を通して，ダムの「倒れる」という現象について知り，倒れにくさを判断するためには，底辺と中線のなす角に着目すればよいことに気付く。

(b) 今まで学習してきたことを使って，倒れにくさを計算で判断することができる。

3.2 実践方法

場所：岐阜大学教育学部附属中学校
日程：平成22年3月3日，4日，5日
対象生徒：中学校3年生（40名）
単元名：「ダムの力」
時間数：全3時間

3.3 授業の流れ

本授業は全3時間の構成であり，計画の細案は指導案（文末資料1）で示している。

＜第1時＞
ねらい：違う形の三角柱を倒す実験を通して，断面図の三角形の面積を二等分する直線が地

面と垂直になった状態から，さらに傾けると倒れるということに気付くことができる。
内容：導入で，重力式コンクリートダムの特徴について知り，このダムに２つの問題があることを知る。そのうちの「倒れる」ということについて考えていくことを明確にする。本単元では，ダムを写真１のような三角柱として考えていくことを知る。見本として，写真２のような３種類の三角柱を用意し，これらを写真３のように同時に傾けていったとき，どれが一番倒れにくいかと予想を立てる。そして，どのようなときに倒れるかについて調べていく。授業では，写真２にある三角柱の三角形の部分を「横の三角形」，遅く倒れることを「倒れにくい」と呼ぶことにする。

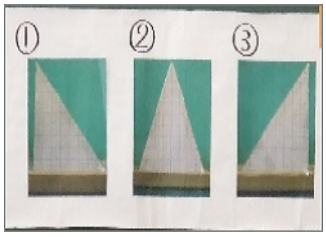


写真２

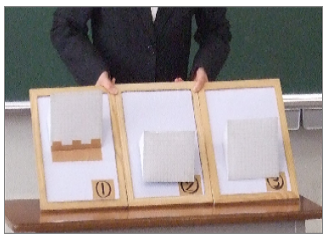


写真３

課題追究において生徒が重さに着目できるように，ラップの芯と割り箸を使って,「つり合う」ということと重さとの関係を説明する（写真４）。

写真４

本時では，グループごとに写真３のような実験をしながら,「面積を二等分する線が地面と垂直になった状態から，さらに傾けると倒れる」という性質を見つけていく。
＜第２時＞
ねらい：倒れにくいかどうかを判断するためには，底辺と支点を通る中線のなす角度に着目すればよいことが分かる。
内容:「倒れにくさを判断するためには何に着目したらよいのか」ということについて考察する。ここでは，１時間目に見つけた性質を使って，実験をせずに論証によって，問題を解決していく。
＜第３時＞
ねらい:３つの辺の長さが与えられた２つの三角形のどちらが倒れにくいかを判断するために，傾きに着目すればよいことを理解し，その傾きを計算で求めることができる。
内容：本時は，図６で示した２つの三角形に対し，計算だけで問題を解決していく。この計算の過程で，三平方の定理や中点連結定理など，今までに学習してきことを活用する。

3.4　活動の様子

＜第１時＞
本時は一人で課題追究するのは，困難だと考え，グループで追究する方法をとった。
また，生徒が考えやすくするために,「横の三角形」だけを切り取って配布した。写真５のように，その三角形をプリントに貼り，線を描きいれながら，考えをまとめていく姿が見られた。その結果，ほとんどの生徒が面積を二等分する線を見つけることができた。

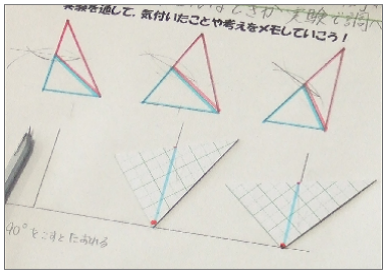


写真 5

＜第 2 時＞
課題を提示したときには，どうしたらよいのか分からない生徒が多かった。しかし，しばらくたつと，自分の考えをプリントに書いていく生徒が増え，写真 6 のように，言葉で表現できるようになってきた。

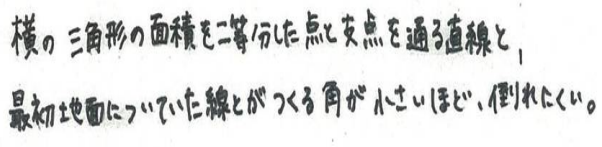


写真 6

言葉で表現できた生徒には，さらに，式を使うように促した。すると，写真 7 のように，90 °－ x というような表現を使って，∠BCM に着目すれば，実験をしなくても倒れにくさを判断できると明らかにしていた。

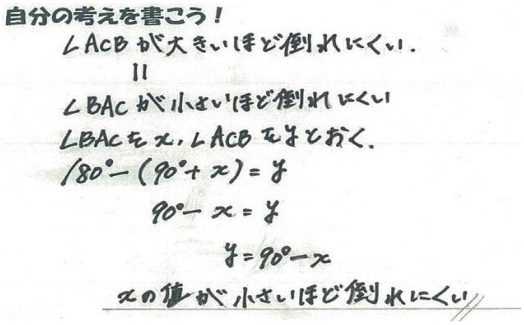


写真 7

また，写真 8 のように，ダムに置き換えて考えている生徒も見られた。

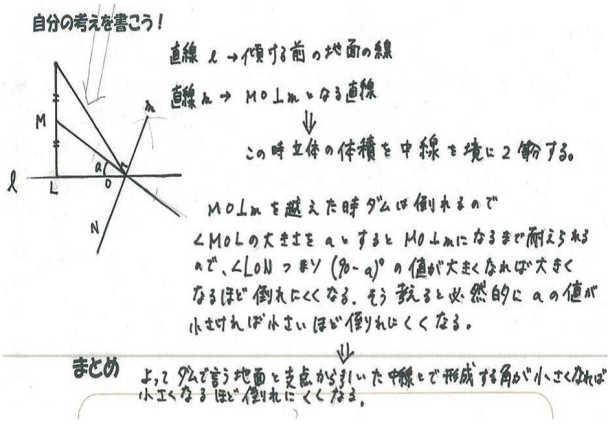


写真 8

最終的には，ほとんどの生徒が，90 °－○という式を使って，∠BCM に着目すればいいことに気付いていた。
＜第 3 時＞
第 3 時では，図 6 で示した 3 辺の長さが分かっている 2 つの三角形のうち，どちらが倒れにくいかを考えていく。中学生は，2 節で記述したような正接を使った方法で考えることはできないので，子どもたちが根拠とする別の考え方を提示する必要があった。そこで，次の性質を提示した（写真 9）。

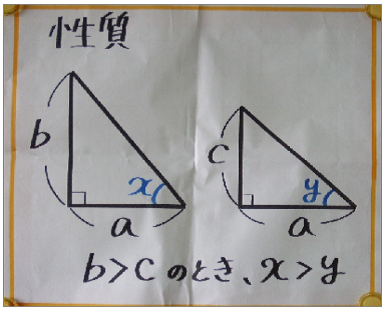


写真 9

2 つの三角形を重ねることで，この性質が正しいことは簡単に分かる。従って，子どもたちもこの性質が理解できたようであった。課題提示した後，この性質を使うためにはどうしたらよいかと積極的に考えていた。この性質を使った子どもたちの考え方をいくつか紹介する。写真 10 では，性質を使うために，底辺の長さを 12 にそろえている。

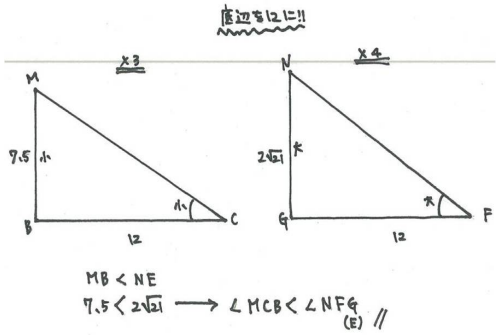


写真 10

他にも，底辺の長さを 4 にそろえている生徒や 3 にそろえる生徒もいた。いずれもこの性質を使うために，既習の内容である相似や三平方の定理を使って考えていた。①と②が比較できた生徒の中には，さらに写真 11 のように，底辺や高さを文字で置き，一般化して考えている生徒もいた。

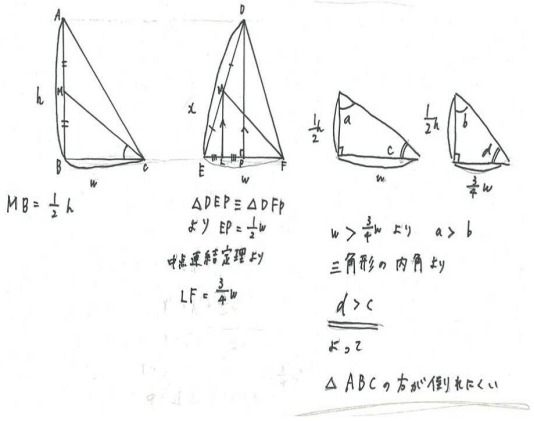


写真 11

あるいは，写真 12 のように，∠KLO が鈍角の三角形を考える。このとき，∠KLO が大きいほど，y は小さくなるので，∠POQ は小さくなるから倒れにくい。このように，他の三角形の場合を考えている生徒もいた。

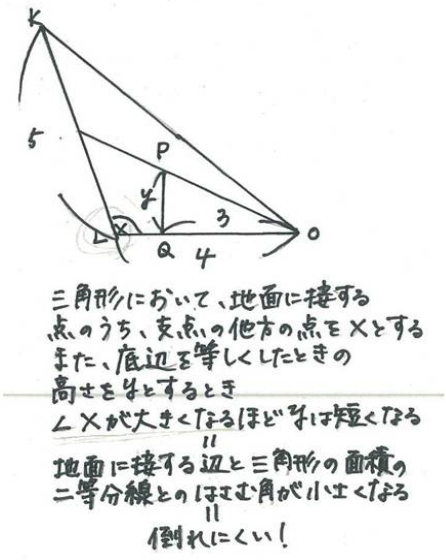


写真 12

4. 授業に対する考察

4.1 生徒の感想

・とても丁寧で分かりやすかったし，どのように考えていけばよいかということを分かりやすく説明して下さったので，順序よく考えることができました。

・数学のさまざまな今までに習ってきたことを生かして，角度の大小を求めたり，それからダムの力へとつなげられて，とても楽しかったです。

・「倒れにくさ」を考えるのが難しかったです。

・これまでにやってきた数学の考え方を使えば，実験をしなくても分かるということが分かった。

・数学の考え方と日常の中の現象を関連づけて考えられたので，楽しかったです。

4.2 ねらいに対する考察

(a) 実験と論証を通して，ダムの「倒れる」という現象について知り，倒れにくさを判断するためには，底辺と中線のなす角に着目すればよいことに気付く。

第１時では,「倒れる瞬間」ということを実験によって，考えていった。生徒の様子から，グループで追究していくことで，ほとんどの生徒が「倒れる瞬間はどのようなときか」を見つけることができたと考える。

第２時では，底辺と中線のなす角に着目すれば実験をしなくても，倒れにくさを判断することができるという学習をした。生徒の学習プリントには，ほとんどの生徒が自分なりの言葉で考えを書いていた。しかし，課題を提示した直後は，どうしたらよいのか分からない生徒がほとんどだったので，机間指導で個別に解説する時間が長くなってしまった。よって，生徒だけでは，なかなか解決できない難しい課題だったのではないかと考える。しかしながら，最終的に，生徒が仲間と交流しながら，自分の言葉でまとめることができていた。さらに，アンケートの「３時間を振り返って，新しく学んだことは何ですか。」と

いう質問に対し,「倒れる瞬間の法則について」や「∠ BCM が小さいほど倒れにくい」ということが書かれていた。これらのことを踏まえると，生徒自身もこれらのことを意識して，授業に取り組めていたのではないかと考えている。よって，このねらいは達成できたと判断した。

(b) 今まで学習してきたことを使って，倒れにくさを計算で求めることができる。

アンケートの「３時間を振り返って，どのような数学の考え方を使いましたか。」という質問に対し,「相似」,「三平方の定理」,「平方根」,「対頂角の性質」,「三角形の内角の和」,「中点連結定理」,「平行線の性質」,「比の性質」などと書かれていた。また,「３時間を振り返って，新しく学んだことは何ですか。」に対し,「今まで学んだことを利用していけるということ」や「倒れやすさを計算で求めることができる」とも書かれていた。これらのことから，生徒たちが，既習の内容を意識しながら，問題に取り組んでいたことが分かる。さらに，初めて取り組む問題が，既習の内容を使って，計算で求めることができたことに，少しでも感動できたのではないか。よって，このねらいも達成できたと考える。

5. 今後の課題

実践を終えて，さらに検討すべきだと考えていることが，大きく分けて３つある。まず１つ目は，題材についてである。今回の授業実践では，自分の研究をもとに教材開発を行ったため，ダムという題材で，子どもたちが興味を持ってくれるか不安であったが，子どもたちは一生懸命取り組んでくれたので，とても嬉しかった。「ダムが倒れる」ということは，普段考えないことだが，子どもたちにとっては，新鮮であったのではないかと考える。よって，子どもたちに新しい視点を与えたということは，よかったのではないか。その反面，授業で学んだことを「ダムの転倒」に結び付けることが不十分だったと考えている。各時間の終わりに，ダムとの関連を明らかにできるよう，今以上に，ダムについての理解を深めることが必要である。

２つ目は,「倒れる」という言葉から「倒れにくい」「倒れにくさ」という言葉に変わったということである。「倒れにくい」は定義したのだが,「倒れにくさ」は定義しなかった。「倒れにくい」から「倒れにくさ」には，飛躍があったと考えられる。「倒れにくさ」という言葉は曖昧で，イメージしにくい言葉であった。生徒の感想にも「倒れにくさというのは考えるのが難しかった」と書かれていた。これには，問題に対する難しさと言葉の理解に対する難しさが含まれていたのではないかと考える。子どもたちが初めて聞く言葉に対しては，子どもたちの分かる言葉で，はっきりした定義をすることが大切であると感じた。

３つ目は，授業の流れについてである。今回は，実験，論証，計算という流れにした。これは，子どもたちにとっては，はっきりした流れで取り組みやすかったと考えられる。アンケートでも,「計算でも倒れにくさが分かった」という声が多く書かれていた。最初は，実験でしか分からなかったことが，論証を通して，計算でも分かることを実感し，感動してくれたように感じる。

また，授業の流れや何を考えたらよいのかということを分かりやすくするために，第１時で，３時間の流れなどを提示した。また，課題の言葉もなるべく具体的に分かりやすくしたり，課題に入る前に，手がかりとなる考え方を話したりした。アンケートでは,「授業が分かりやすかった」などということが多く書かれていた。これらのことから，子どもたちが見通しを持って，授業に取り組めたのではないかと考える。そして，授業をするにあたって，子どもたちが見通しを持って授業に取り組めるような工夫をすることが大切であると改めて感じた。

これからも，子どもたちの考えや思考を大切にし，それらを生かせるような授業を考えていきたい。

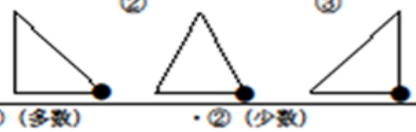
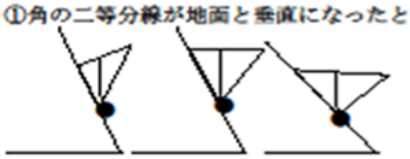
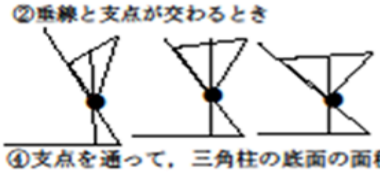
引用文献

[1] 小暮あゆみ，愛木豊彦，2009 年，数学教育学会誌研究紀要臨時増刊, 2009 年度数学教育学会秋季例会発表論文集, 97-99.
[2] 文部科学省，2008 年，中学校学習指導要領解説，数学編
[3] A.Bourgin，1953，The design of dams, London sir Isaac Pitman Sons,Ltd.
[4] 松岡元，1999 年，基礎土木工学シリーズ　土質力学　森北出版株式会社.
[5]W.P.Creager，J.D.Justin，J.Hinds.　1944 年，重力ダムの設計　農林省農地局建設部建設課.
[6] 堀江侑加，愛木豊彦，2006，日常に潜む数学教材の提案・実践，岐阜数学教育研究，第５号,

資料１（指導案）

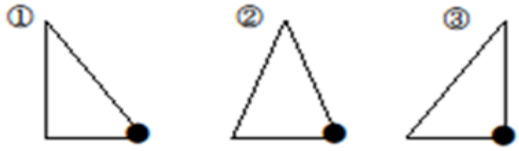
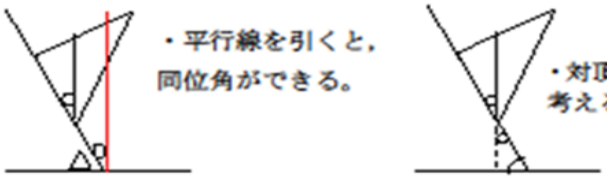
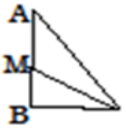
(1)展開（1/3 時間）

違う形の三角柱を倒す実験を通して，１点を固定したとき，横の三角形の面積を二等分する直線が地面と垂直になったときつり合い，さらに傾けると倒れるということに気付くことができる。

	学習活動と予想される生徒の姿	指導・評価の基準
導入	○ダムの話を聞く。 ○ダムの形を三角柱と見ることにする。 ○２日間の問題を提示する。 問題 どの三角柱が一番倒れにくいでしょう？ ①　②　③  ・①（多数）　・②（少数）	・ダムの研究，ダムの自重，ダムが倒れるということについて話す。 ・３つの三角柱でどれが一番倒れにくいか予想させる。 ・実験をして確かめる。このとき，実験をする前に，「水圧が一定にかかる代わりに，傾けるという操作をする」ことと「片方を留める」ことを説明する。 ・３時間の流れを掲示し，見通しを持たせる。そして，本時に考えることを明らかにする。 ・学習プリントを配る。
展開	○本時の問題を提示する。 問題 三角柱が倒れる瞬間はどんなときか考えよう。 ○倒れるということに重さが関係しているということを知る。 ○本時の課題を設定する。 重さに着目して，三角柱が倒れる瞬間はどんなときか実験で調べよう。 ①角の二等分線が地面と垂直になったとき  ③１辺が地面と平行になったとき ②垂線と支点が交わるとき  ④支点を通って，三角柱の底面の面積を二等分する直線が地面と垂直になったときにつり合うから，それより少し傾けたら倒れる。 ⑤片方が重くなると倒れる。	・ラップの芯がどんなとき傾くのかを実験で見せ，重さに着目させる。 ・実験する道具を各班に３個１セットを２セットずつ配る。横の三角形を切り取った紙も配布する。 ・生徒の気付きや言葉をひろって，考えを深めていくような発問する。
まとめ	○気付いたことを発表する。 ○まとめをする。 支点を通り，横の三角形の面積を二等分する直線が地面と垂直になるときをこえると倒れる。	・今日見つけた性質を使って，明日は実験をしないで倒れにくさについて考えるということを伝え，終わりにする。

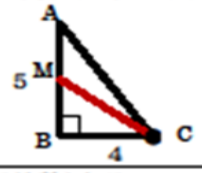
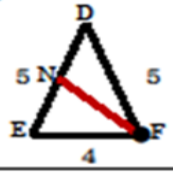
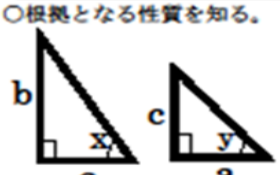
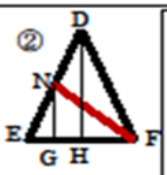
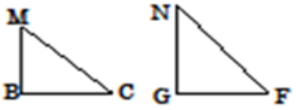
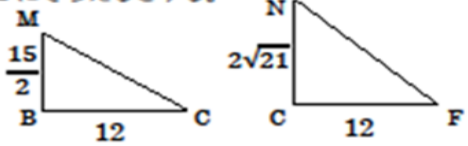
(2)展開（2/3 時間）

倒れにくいかどうか判断するためには，板と横の三角形の面積を二等分する直線がなす角度に着目に着目すればよいことが分かる。

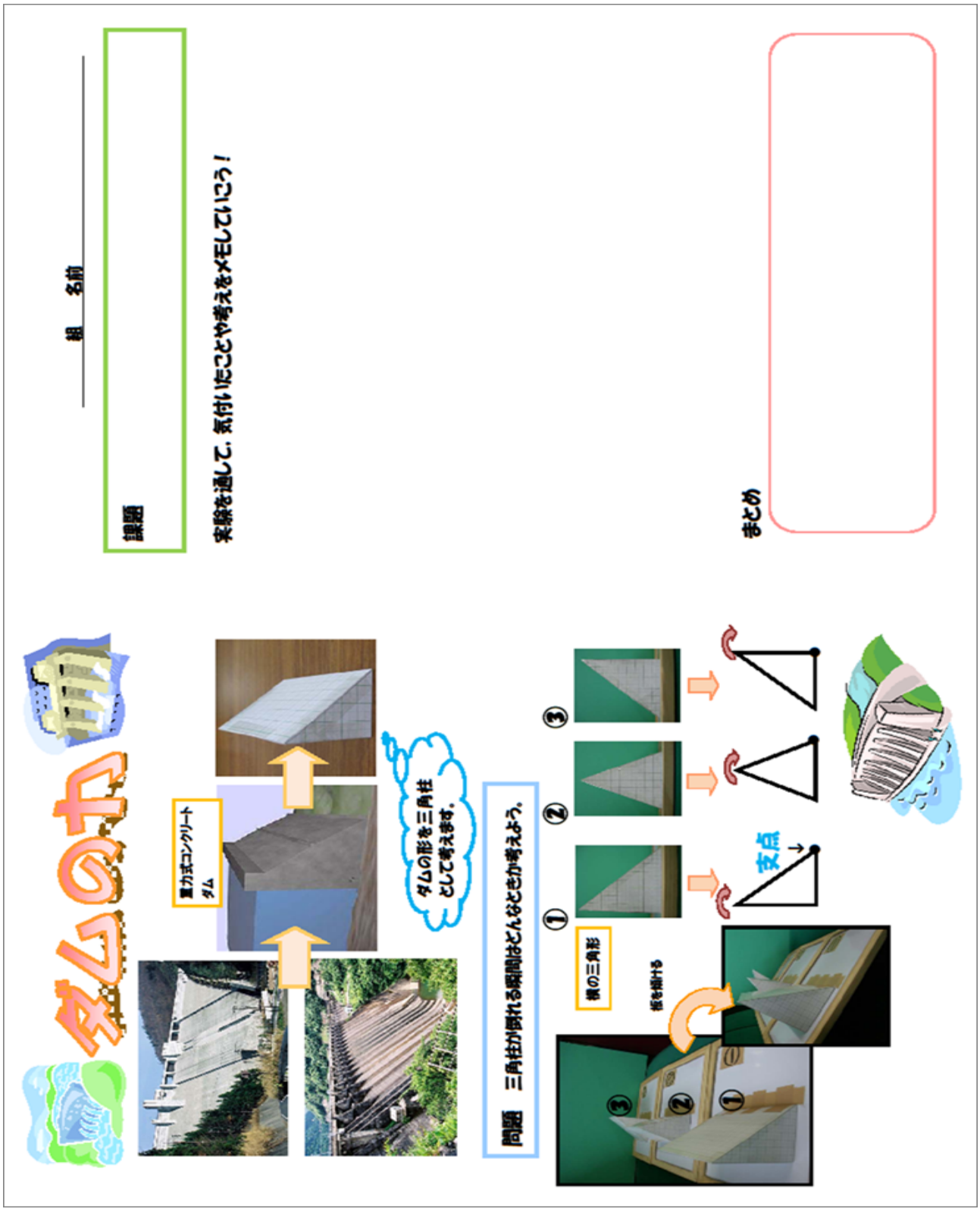
	学習活動と予想される生徒の姿	指導・評価の基準
導入	○前時の復習をする。 ・３つの三角柱の実験を見て，①が倒れにくかったことを確認する。 ・三角柱の体積を二等分する平面が地面と垂直になったときにつり合い，さらに傾けると倒れることを確認する。 ○本時の問題を提示する。	・前時で使った「横の三角形」の写真を使って，①が倒れにくかったことを確認する。「３時間の流れ」の１時間目のところに前時分かったことを貼る。
展開	問題 実験をしなくても，どれが倒れにくいか分かるだろうか。 ① ② ③ 	
		・学習プリントを配る。
	○課題を設定する。 倒れる瞬間の法則を使って，倒れにくさを判断するためには，どの角度に着目したらいいのか考えよう。	・分度器を用意しておく。 ・なぜ，その角度に着目したのか，説明できるようにする。 ・具体的に角度を測っている生徒には，いつでもどんな三角形でも言えるかを考えさせる。
	 ・平行線を引くと，同位角ができる。 ・対頂角で考える。 △＝90－○になる。	
	△＝90－○なので，○が小さければ，たくさん傾けても倒れない。よって，○が小さいほど倒れにくい。	・△＝90－○を求め，○が小さいほうが倒れにくいことを明らかにする。
	○考えを発表する。	・底辺から横の三角形の面積を二等分する直線までの角度に着目すれば，倒れにくさが分かることを確認する。
まとめ	○まとめをする。  ∠MCB が小さいほど，倒れにくい。	・分度器を配り，プリントの図に面積を二等分する線を引き，底辺からの角度を測って，①の角度が一番小さいことを確かめる。
	○プリントの図を使って，角度を測り，まとめが本当に正しいか確かめる。	

(3)展開（3/3 時間）

辺の長さが与えられた二つの三角形があるとき，どちらが倒れにくいか判断するために，傾きに着目すればいいことを理解し，その傾きを計算で求めることができる。

	学習活動と予想される生徒の姿	指導・評価の基準
導入	○前時の復習をする。 ・２つの三角柱でどちらが倒れにくいか比較するとき，板から三角柱の体積を二等分する直線までの角度に着目すれば倒れにくいか判断することができた。 ・この角度が小さいほど倒れにくい。 ○本時の問題を掲示する。	・前時でまとめたことを簡単に振り返る。
展開	問題 どちらが倒れにくいでしょう。 ①  ② 	・今回は実験，作図をしないで考えることを言う。 ・問題を出したら，実際に作った模型を見せる。
	○根拠となる性質を知る。  底辺の長さが等しい 2 つの直角三角形があります。 b＞c のとき，x＞y となる。	・根拠となる性質を提示する。
	○課題を設定する。 直角三角形に着目して，性質をもとに，∠MCB と∠NFE の大きさを比べよう。	・高さを表す補助線を入れる。
	① $BM=\frac{5}{2}$ △MCB に着目する。 ②  三平方の定理より，DH＝$\sqrt{21}$ このとき，EH＝２なので， 中点連結定理より， EG＝GH＝１， よって，FG＝３，$GN=\frac{\sqrt{21}}{2}$ △NFG に着目する。 	・値を求めたら，①と②の値を比較して，プリントの結果の欄にも書き込むようにする。
	性質を使うために，底辺の長さをそろえる。 12 にそろえるとする。  よって，∠MCB のほうが小さいので，①のほうが倒れにくい。 ○考えを発表する。 ○どちらが倒れにくいか確認する。	・どのように値を出したのか，その値はどうなったのか，発表させる。 ・求めた値を比較し，どちらが倒れにくいか明らかにする。 ・問題の模型を使って，②のほうが倒れにくいことを確かめる。 ・３時間のまとめをする。 「ダムを造らなくても，計算によって，強さが分かる」ということを伝える。

資料２（学習プリント）


組　名前
課題
実験を通して，気付いたことや考えをメモしていこう！
まとめ
ダムの中
重力式コンクリートダム
ダムの形を三角柱として考えます。
問題　三角柱が倒れる瞬間はどんなときか考えよう。
①
②
③
底の三角形
支点

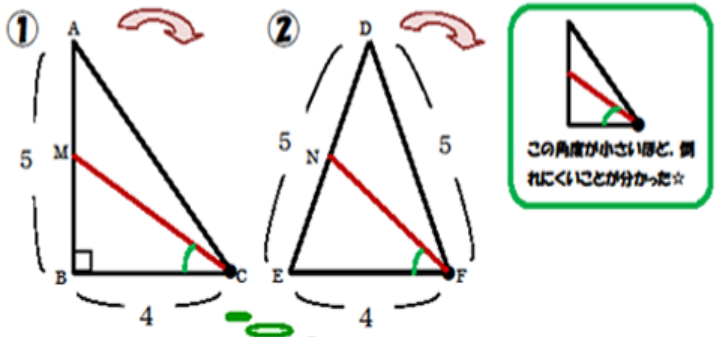
組　名前
課題
自分の考えを書こう！
まとめ
ダムの力
どの三角柱が一番倒れにくいでしょう。
実験結果より
支点を通り，底の三角形の面積を二等分する直線が地面と垂直になったときをこえると倒れる。
①の場合
問題　実験をしなくても，どれが倒れにくいか分かるだろうか。

ダムの力

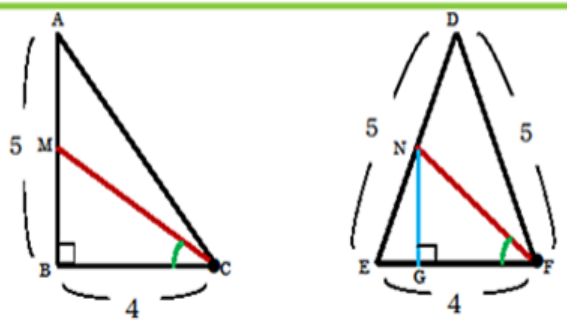
組　　班　名前

課題

問題　どちらが倒れにくいか考えよう。

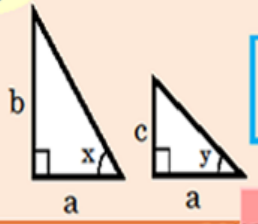


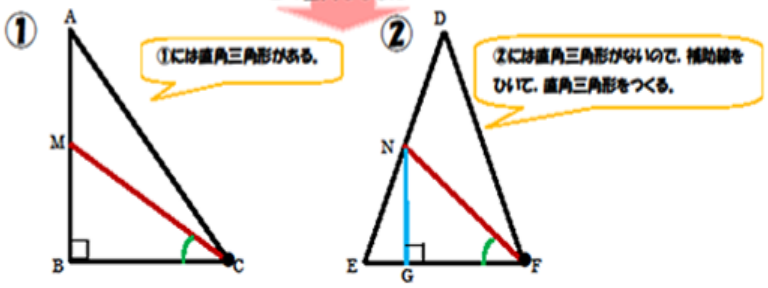
この角度が小さいほど、倒れにくいことが分かった☆



実験・測定をしないで、角の大きさを比べることはできないかな？？

性質



底辺の長さが等しい２つの直角三角形があります。
b＞cのとき、x＞yとなる。

この性質をもとに…