岐阜数学教育研究
2010, Vol.9, 9-14

定幅図形を題材とする数学的活動の開発と実践

岡田真子[1], 愛木豊彦[2]

平成 21 年の高等学校学習指導要領改訂において，高校においても数学的活動がより重要視された。そこで，本論文では数学的活動を取り入れた定幅図形に関する授業を提案する。ここでは，いろいろな定幅図形について考察する活動において，自ら課題を発見し，解決できる能力を高めることをねらいとしている。

＜キーワード＞定幅図形，数学的活動，作図，課題発見

1．はじめに

平成 21 年の高等学校学習指導要領改訂において，小学校及び中学校と同様,「数学的活動を通して」の部分が数学科の目標の文頭となった ([1])。数学的活動とは，数学学習にかかわる目的意識をもった主体的な活動のことである。これは，基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付けるとともに，数学的な思考力，表現力を高めたり，数学を学ぶことの楽しさや意義を実感したりするために，重要な役割を果たすものである。数学的活動を生かした指導を一層重視し，また，言語活動や体験活動を重視した指導が行われるようにするために，高等学校では，必履修科目や多くの生徒の選択が見込まれる科目 (数学 I と数学 A) に「課題学習」が位置づけられた。

そこで，生徒の主体的な活動を促すために，授業を自ら研究テーマを設けて学習を進める形式にした。授業の題材は「おにぎり形」である。おにぎり形とは，三角形を基にある手順で作図することによってできる閉曲線のことである。おにぎり形の作図方法や基本的な性質は [2] で述べたので，ここでは省略する。また，[2] ではおにぎり形を題材とする小学生を対象とした授業の実践結果を報告している。

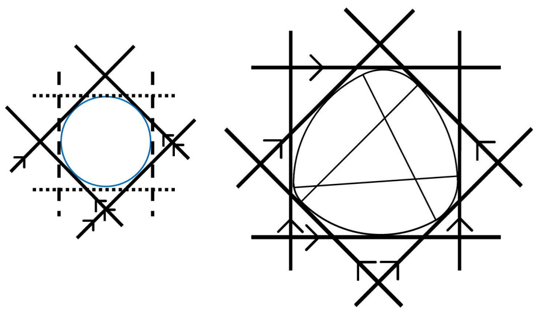
本論文で提案する授業では，まずおにぎり形の作図方法を紹介する。そして，それを参考にして，いろいろな図形 (主に五角形) を基にした定幅図形の作図方法などの課題を生徒が自分で設定し，それを追究していく。このように課題を自ら発見し，自ら追究することで，生徒の活動が主体的なものとなり，数学的活動と呼ぶにふさわしい授業になると考えた。

2．教材について

2.1.　定幅図形

定義　平行な 2 直線で挟んだとき，その平行線の幅が向きによらず常に一定である図形を**定幅図形**という。

円が定幅図形であることは図 1(左) から容易にわかる。また,「おにぎり形」が定幅図形であることは，円の接線の性質を用いて [2] で証明を述べた。



[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

図 1

定幅図形には，他にもルーローの多角形とよばれる正奇数角形を基にした図形がある。これは，ルーローの三角形の作図方法を正奇数角形に用いることで作図できる (図 2)。

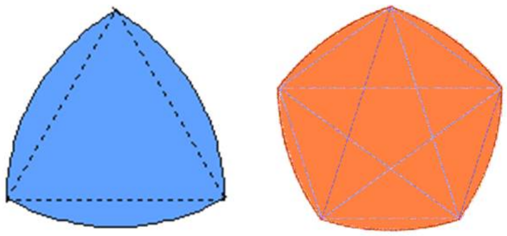


図 2

今回の授業では，これと同様に,「おにぎり形」の作図方法の，いろいろな多角形への拡張について考察する。例えば,「おにぎり形」の作図方法を用いれば，奇数角形を基にした定幅図形を作図することができる。以下で，五角形を基にした定幅図形 (図 3) の作図方法を紹介する。ただし，ある多角形の頂点を全て作図に用いてできた定幅図形を「ある多角形を基にした定幅図形」と呼ぶことにする。ここで，作図に用いるとは，弧の中心とすることと，延長する線分の端点となっていることとする。

五角形を基にした定幅図形の作図方法(手順 1)

(1) 五角形 ABCDE をかき，各頂点から対角線を引いて延長する。5 つの辺の中で最も長い辺を CD とする。

(2)AC の C 側の延長線上に，$AP_1 > AC$, $AP_1 > AD$ となるように点 P_1 をとる。そして，A を中心に半径 AP_1 の円弧をかき，直線 AD の D 側の延長線との交点を P_2 とする。

(3)D を中心に，半径 DP_2 の円弧をかき，直線 BD の D 側の延長線との交点を P_3 とする。

(4)B を中心に，半径 BP_3 の円弧をかき，直線 BE の E 側の延長線との交点を P_4 とする。

(5)E を中心に，半径 EP_4 の円弧をかき，直線 CE の E 側の延長線との交点を P_5 とする。

(6)C を中心に，半径 CP_5 の円弧をかき，直線 CA の A 側の延長線との交点を P_6 とする。

(7)A を中心に，半径 AP_6 の円弧をかき，直線 DA の A 側の延長線との交点を P_7 とする。

(8)D を中心に，半径 DP_7 の円弧をかき，直線 DB の B 側の延長線との交点を P_8 とする。

(9)B を中心に，半径 BP_8 の円弧をかき，直線 EB の B 側の延長線との交点を P_9 とする。

(10)E を中心に，半径 EP_9 の円弧をかき，直線 EC の C 側の延長線との交点を P_{10} とする。

(11)C を中心に，半径 CP_{10} の円弧をかく。

五角形 ABCDE が凸であれば，この作図方法によってできた図形が定幅図形であることも，三角形のときと同様にして示すことができる ([2])。ただし，多角形が凸であるとは，辺上のどの 2 点を結ぶ線分も，その多角形の外部にとび出さないことをいう。また，五角形の全ての頂点が弧の中心であり，延長する線分の端点となっている。従って，凸な五角形に対しては，この方法で，それを基にした定幅図形を作図することができる。

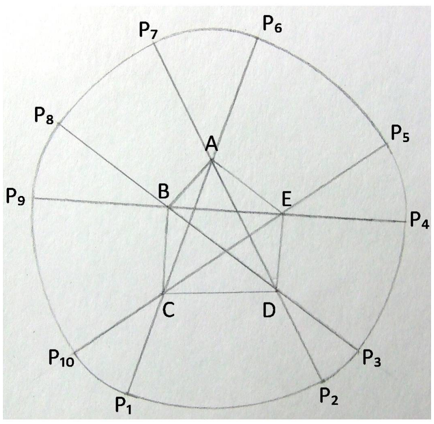


図 3

おにぎり形は，どんな三角形を基にしても作図することができるが，五角形では，上で示した方法では作図不可能な場合がある (図 4)。

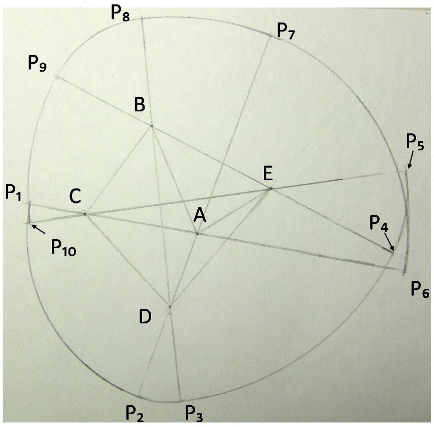


図 4

図 4 のような凸ではない五角形 ABCDE の場合，順に弧をつなげていくと，弧をかく方向が一方向にならない。図 4 では，弧 P_4P_5 と弧 P_5P_6 をかくときの方向が異なっている。

手順 1 による「五角形を基にした定幅図形」が作図できるかどうかをまとめると次のようになる。

・すべての対角線と五角形の各辺が交わらなければ定幅図形は作図可能である。

・対角線と辺が交わるような五角形では，この方法で定幅図形を作図することができない。

・対角線上に頂点がある場合は，手順 1 で定幅図形を作図できる (図 5)。しかし，図 5 の点 B のように作図に用いられていない点が存在する。従って，これは，五角形を基にした定幅図形の作図ではない。

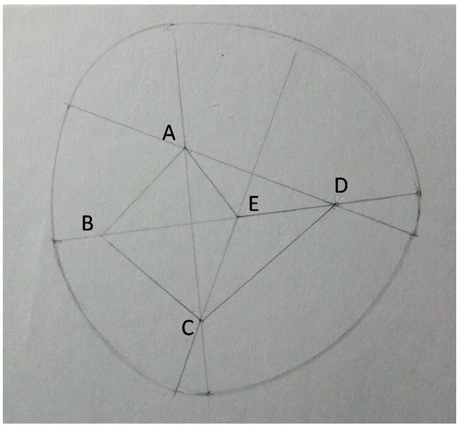


図 5

この作図方法の重要な点は，対角線を延長することである。三角形を基にした場合は，各辺を延長したが，五角形の場合，手順 1 のように対角線を延長すれば作図できる。

また，この作図方法を偶数角形に用いることはできない。ここで，四角形の場合にこの作図方法では，閉曲線が作図不可能であることを示す。

性質　凸な四角形 ABCD において，図 6 のように a =CD, b =AD, c =AB, d =BC, p =BD, q =AC, 2 つの対角線 AC と BD の交点を O とおく。

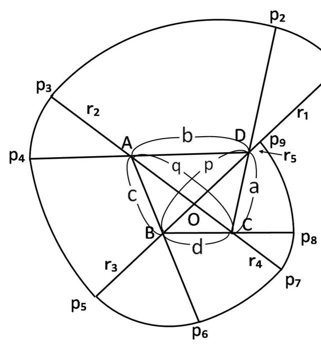


図 6

手順 1 と同様にして，以下の手順で作図する。

(1)BD を D の側に延長して，その延長線上に点 P_1 をとる。そして，$DP_1 = r_1$ とおく。

(2)D を中心に，半径 r_1 の円弧をかき，この円弧と CD を D の側に延長した半直線との交点を P_2 とする。

(3)C を中心に，半径 $a + r_1$ の円弧をかき，この円弧と CA を A の側に延長した半直線との交点を P_3 とする。そして，$r_2 = a + r_1 - q$ とする。

(4)A を中心に，半径 r_2 の円弧をかき，この円弧と DA を A の側に延長した半直線との交点を P_4 とする。

(5)D を中心に，半径 $a + r_2$ の円弧をかき，この円弧と DB を B の側に延長した半直線との交点を P_5 とする。そして，$r_3 = b + r_2 - p$ とする。

(6)B を中心に，半径 r_3 の円弧をかき，この円弧と AB を B の側に延長した半直線との交点を P_6 とする。
(7)A を中心に，半径 $c+r_3$ の円弧をかき，この円弧と AC を C の側に延長した半直線との交点を P_7 とする。そして，$r_4=c+r_3-q$ とする。
(8)C を中心に，半径 r_4 の円弧をかき，この円弧と BC を C の側に延長した半直線との交点を P_8 とする。
(9)B を中心に，半径 $d+r_4$ の円弧をかき，この円弧と BD を C の側に延長した半直線との交点を P_9 とする。そして，$r_5=d+r_4-p$ とする。

このとき，$r_1 \neq r_5$ である。

(証明)　作図より，$r_1+a=r_2+q, r_2+b=r_3+p,\ r_3+c=r_4+q, r_4+d=r_5+p.$

今，$r_1=r_5$ と仮定すると，$a+b+c+d=2p+2q.$

ここで，△OCD において三角不等式を用いれば a <OC+OD. 同様に b <OD+OA,c <OA+OB,
d <OB+OC.

よって，
$a+b+c+d<$ 2(OC+OA)+2(OB+OD)$=2(p+q).$

よって矛盾が生じる。ゆえに，$r_1 \neq r_5$. □

このように，手順 1 をそのまま四角形に適用しても定幅図形は作図できない。

3．授業実践について

3.1 授業のねらい

「数学的活動」をキーワードにした本授業案におけるねらいは次の 3 つである。

(A) **おにぎり形を作図し，それが定幅図形であることがわかる。**
(B) **いろいろな図形を基にした場合について，定幅図形の性質を調べることができる。**
(C) **自ら課題を設定して，仲間と交流しながら学習を進めることができる。**

3.2 実践方法

場　所　：岐阜県図書館
日　程　：平成 21 年 12 月 12 日 (土)
対象生徒：高校生 (30 人)，中学 3 年生 (3 人)
講座名　：「おにぎりの微分」

3.3 授業の概要

○定幅図形であるおにぎり形の図形 (図 7 の左) をタイヤにした車を 1 号車とする。正方形の角を丸くしたもの (図 7 の右) を用意し，この図形をタイヤにした車を 2 号車とする。タイヤを隠した状態で走らせ，2 台の車の走り方を見比べて，その違いを捉える。

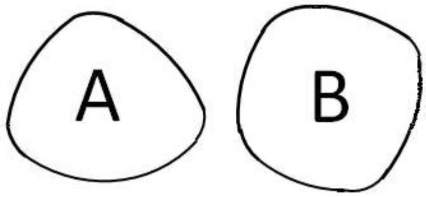


図 7

○ 1 号車の方が，より安定して走り，そのタイヤが A であることを確認する。

問題　「おにぎり形を作図し，それが定幅図形であることを示せ。」

○円以外でもゆれずに進むタイヤの形があることを知る。
○定規，コンパスを用いで“おにぎり形”の図形をかく。
○車のしくみを理解する。定幅図形を定義する。

課題　「おにぎり形の作図方法や定幅図形の性質を調べよう。」

・五角形で考える。（作図方法の規則，作図可能かどうかの考察）
・四角形で考える。（同じ作図方法ではできない。）
・定幅図形の周の長さ，面積を調べる。
・延長させる半径の長さを変えて考察する。
○グループ交流，発表会

4．生徒の活動の様子

生徒が自ら課題を見つけることは難しいと

考えていた。そこで，課題を見つける手がかりとして写真１のような画用紙で作った定幅図形をあらかじめ準備した。この図形には，写真からも分かるように作図の跡を残している。そして，これらを教室におき，生徒が自由に手にとれるようにしておいた。

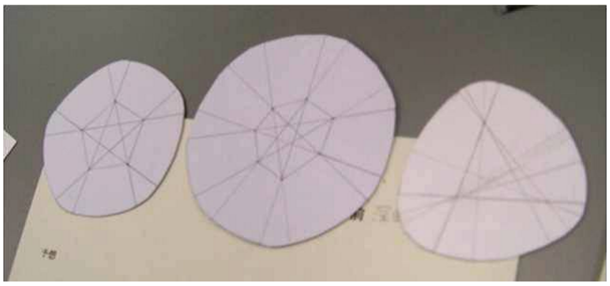


写真１

実際の授業で，生徒が見つけた課題を以下に示す。

・五角形を基にした定幅図形の作図方法
・四角形では作図できない理由
・多角形を基にした定幅図形
・ルーローの三角形とおにぎり形の比較
・おにぎり形を回転した際，高さの変わらない点が図形内部に存在しないことの証明
・半径の長さ，辺の長さを変化させたときに，できるおにぎり形の違いについて
・定幅図形の周の長さについて

ほとんどの生徒が，五角形の場合と四角形の場合で考察を深めていた。写真２は，どんな五角形でも作図可能なのかを調べる過程で生徒が作図した図形である。左が凸でないが作図可能な五角形で，右が作図不可能な五角形である。

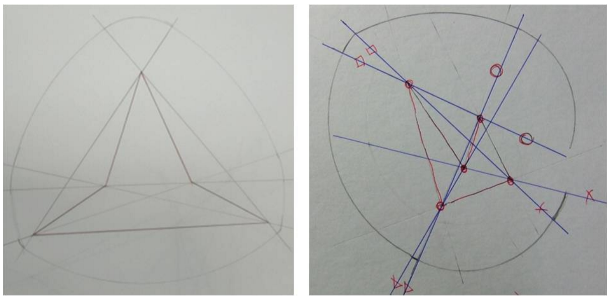


写真２

さらに，写真３のように定幅図形が作図不可能な五角形において，閉曲線を作図した生徒もいた。これは，図４とは違い交点を持たない単純閉曲線 ([2]) になっている。しかし，この図形は定幅図形ではない。

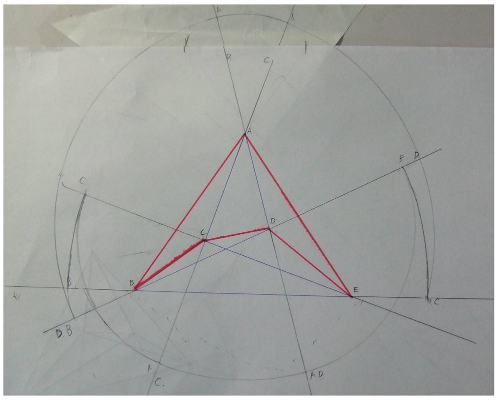


写真３

また，おにぎり形の基にする三角形を小さくし，延長させる線分の長さを長くすると，作図してできるおにぎり形が円に近づくということについて考察した生徒がいた。この生徒がいたグループでは，おにぎり形を直線上で回転させた際，その直線からの高さが変わらない点が図形内部に存在しないことを発見した。その結果，その高さの変化が小さくなるようにするにはどんなおにぎり形があるのかを考え，この考察に至った。([写真 4])。

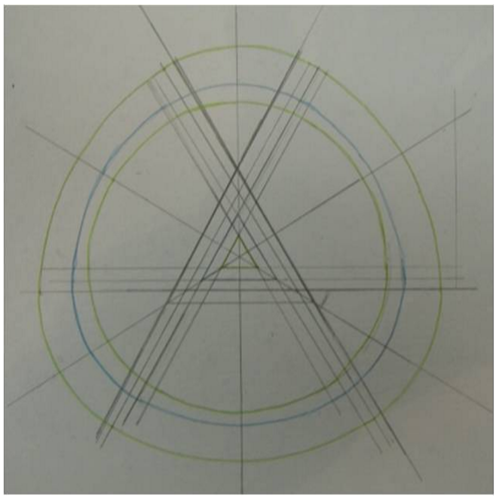


写真４

授業の最後に，全体で発表会を行った。グループごとに気づいたことをまとめ，写真や図を使うなどわかりやすく伝える工夫をしていた。

5．アンケート結果と考察

課題を自分で見つけていく学習形式に対する参加生徒の感想をいくつか挙げる。

・1つのことが分かっても，またそこから疑問点や問題点がでてきて，それを解決していくうちに考えが深まっていくのが楽しかった。
・課題を見つけることは難しかったが，自分で新しい発見ができて楽しかった。
・疑問だらけで課題には困らなかったし，疑問があるから楽しかった。
・調べたいことについて深く学習できた。
・何が正解で，何が不正解かがわからないから難しかった。
・何を考えるのか，考えるのも楽しかった。
・自分で考えることのおもしろみが感じられた。

このように，難しさを感じながらも楽しく学習を進めることができたといえる。以下の表は，全体の集計結果である。

楽しかった	18 人
少し楽しかった	15 人
楽しくなかった	0 人
難しかった	8 人
少し難しかった	21 人
難しくなかった	1 人

これらのアンケート結果や生徒の活動の様子から，3つのねらいは達成できたと考えられる。高校生にとって，初めて見る図形を対象に，自ら課題を設定して学習を進めることは困難だと考えていた。しかし，実際に作図したり，文字式で証明することで生徒の理解をより確かにできた。特に，ねらい (C) で示した，仲間と考えを交流することで 理解を深めることができた。その結果としてねらい (B) が実現できたと考えている。

また，感想の中に「発表の仕方がわかったし，おもしろかった。」というものがあり，生徒にとって良い発表する経験になったようである。さらに,「他のグループの発表が少しわからなかった。」という意見もあったので，このような表現を用いて伝え合う活動はより重要だと考えられる。

6．今後の課題

子どもたちに算数，数学の面白さ，必要性を伝えると同時に，感動や驚きを与えられるようになりたい。そのために，教科の系統性や児童・生徒の現状をふまえて，教材開発を今後も継続していく。特に，次の 2 点を重要視している。

まず，通常授業とのつながりである。開発する授業において，その授業が終わった後に学習する内容の基盤が身につけられることや，通常授業で培った数学的な見方や考え方を十分に活かすことができるようにしたい。

2 点目は，教材研究の確かさである。児童・生徒が，課題を解決する活動において，解決できないような状況になったときでも，雰囲気でごまかさず，数学的な根拠をはっきり示し，指導できるようになりたい。

引用文献

[1] 文部科学省，2009，高等学校学習指導要領.
[2] 岡田真子・愛木豊彦・佐治健太郎，2009，図形に関する算数的活動を取り入れた授業の提案と実践，岐阜数学教育研究，vol. 8, pp. 72-81.