

## 浮力を題材とする「課題学習」の提案と実践 II

宮原里奈<sup>1</sup>, 愛木豊彦<sup>2</sup>

数学は様々な領域の学問とつながりを持っている。その代表が物理学である。物理学に現れる公式は数式で記述されており、その正しさが数学によって裏付けられるものもある。しかし、高校までの学校教育において、それを実感できるような教材は、数少ない。そこで、数学と物理学のつながりを感じ、その過程で数学的な考え方も深められることを意図し、授業案を開発した。本稿では、この授業案をもとに、2009年12月に実施した高校数学セミナーの内容を紹介し、生徒の様子やアンケートを用いて、実践結果を考察していく。

<キーワード> 課題学習, 浮力, アルキメデスの原理, 積分, 区分求積

### 1. はじめに

平成21年3月に高等学校学習指導要領 [1] が改訂された。その際に「内容を生活と関連付けたり発展させるなどして、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識できるようにする」、「実施に当たっては数学的活動を一層重視するものとする」と規定された課題学習が、数学Iと数学Aに新たに設けられた。また、改善の基本方針に、

「子どもたちが算数・数学を学ぶ意欲を高めたり、学ぶことの意義や有用性を実感したりできるようにすることが重要である。そのために、(中略)学習し身に付けたものを、日常生活や他教科等の学習、より進んだ算数・数学の学習へ活用していくことを重視する」とも示されている。ここで述べられているように、子どもたちが数学の有用性を感じ、その良さや面白さを実感できれば、現在課題とされている数学への学習意欲の低下という事態も改善されるものと考えられる。

これらをふまえ、他教科や日常生活の中に、数学を使えば解決できるような事象があるのだと伝えるための授業案を開発することにし

た。具体的には、「船の沈む深さを求める」という問題を取り上げる。そして、この問題を解決するために必要な理科の公式を、数学と理科の考え方を組み合わせながら証明していくという授業を考えた。この授業で取り上げる中で、特に大切にしたい学習内容を以下に示す。

- ・三角比 (数学 I)
- ・論理と集合 (数学 A)
- ・ベクトル (数学 B)
- ・数列(数列の和) (数学 B)
- ・数列の極限 (数学 III)
- ・積分法(区分求積) (数学 III)
- ・力のつり合い (物理 IB)

これらの内容の中に密接なつながりを持つものがある。例えば、力のつり合いを考える際に、ベクトルと三角比を欠くことはできない。また、区分求積の計算過程における、数列の和の公式も同様に必要不可欠である。

ここで述べたような数学と理科とのつながり、数学の内容どうしのつながりを、高校生に伝えたいと考えた。

今回、岐阜県教育委員会主催の「高校数学セミナー」において、授業実践をさせていた

<sup>1</sup>岐阜大学大学院教育学研究科

<sup>2</sup>岐阜大学教育学部

多く機会を得た。ここでは、約5時間を使って授業を行えるため、上で述べた2つのつながりを感じられるような時間は十分にあると判断し、授業の構成を考えた。問題を解くために必要な知識の準備に、多くの時間がかかりそうなので、授業は、グループ毎にテキストを進めていく形をとることにした。また、目標を持ってテキストに取り組めるように、授業の最初に問題を提示し、なんのために公式の証明を行うのかについて話した。テキストが終わった後には、その公式の正しさを実感できるように、実験する場を設けた。

本稿の構成は次の通りである。第2節では、授業で用いるテキストの内容の中で、工夫した点について述べる。それは、面にかかる圧力が一様ではないときの、面にかかる力の求め方である。これを求めるために、区分別積を利用している。第3節では、高校数学セミナーの授業実践について報告するが、特に、浮力の公式が正しいことを実感させるために行ったペットボトルを用いた実験や、生徒の活動の様子を中心に紹介する。そして第4節では、この授業の考察をし、第5節で今後の課題を述べる。

## 2. 教材について

### 2.1. 先行研究の結果から

「船の沈む深さを求める」という問題は、既に、平成21年2月19日、3月3日の全2時間、中学3年生39名を対象に行った授業(宮原、愛木[2])で取り上げている。この実践では、  
 $(\text{船の重さ}) = (\text{水に沈んでいる部分の船の体積})$   
 $(\text{と同じ体積の水の重さ})$

という浮力の公式をもとに、側面が六角形になっている船(写真1)を水面に浮かべると、どのくらい沈むのかを求めた。授業のねらいは、平面図形や立体の性質、方程式などの中学校で学習する数学の考え方を、組み合わせて解くことであった。

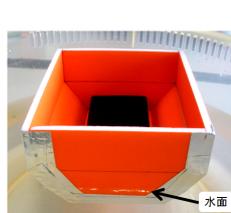


写真1

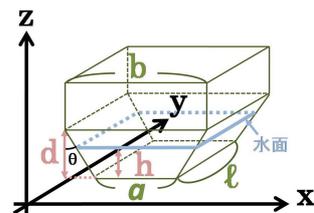


図1

そして、実践後に、[2]でも示したように、図1の形の船に限定すれば、高校生でも水圧と水深の関係から、浮力の公式が導けることがわかった。さらに、この計算過程において、区分別積の考え方をを用いることができる。区分別積の考え方は、応用上重要であるにも関わらず、高校教育において、その重要性を教えることが難しい。そこで、浮力の公式を前提とせず、水圧と水深の関係をもとに、浮力の公式を導いた後、船の沈む深さを求めるという展開にした。

さらに実践を終え、船の沈む深さを求める際に、簡単に値が求められるよう、船の重さや形、辺の長さなどを再度見直すことが必要であると感じたので、これらについても、検討することにした。

### 2.2. 船の沈む深さ

[2]の実践で扱った船では、船の重さが小数であったり、計算の途中に分数が出てきたため、計算が複雑になり、沈む深さを求めるために時間がかかってしまった。本実践では証明に重点を置きたいので、この問題を解消するために、重さや辺の長さを調整することにした。実験用の船は、グループに1つずつ用意したが、どれも重さや形が等しくなるようにした。辺の長さは図2のようにし、重さを140g重にした。

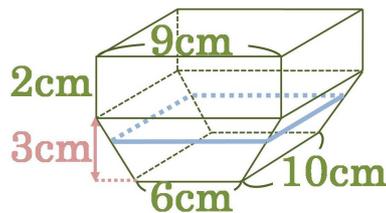


図2

まず、船の沈む深さを  $x(\text{cm})$  とし、台形の面積を  $x$  を使って表す。

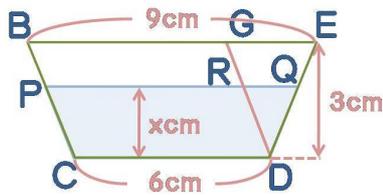


図 3

図 3 のように、点 D を通る BC に平行な直線をひき、PQ、BE との交点をそれぞれ R、G とする。四角形 CBGD、四角形 CPRD はともに平行四辺形なので、

$$PR = BG = 6(\text{cm}).$$

よって、

$$GE = 3(\text{cm}).$$

今、 $PQ = a(\text{cm})$  とおくと、 $DRQ \sim DGE$  なので、

$$x : a = 3 : 3.$$

よって、台形 CPQR の面積  $S(\text{cm}^2)$  は、

$$S = \{6 + (6 + x)\} \times x \div 2 = \frac{1}{2}x^2 + 6x.$$

よって、沈んでいる部分の体積  $V(\text{cm}^3)$  は、

$$V = \left(\frac{1}{2}x^2 + 6x\right) \times 10 = 5x^2 + 60x.$$

また、水  $1(\text{cm}^3)$  の質量は  $1(\text{g})$  なので、浮力の公式より、

$$5x^2 + 60x = 140,$$

$$x^2 + 12x - 28 = 0,$$

$$(x + 14)(x - 2) = 0,$$

$$x = -14, 2.$$

今、 $x$  は正の数なので、

$$x = 2.$$

このことから、船を水に浮かべると、 $2\text{cm}$  沈むことがわかる。

### 2.3. テキスト

第 1 節で述べた高校数学セミナー用のテキストを、高校で使用されている教科書 [3] と物理の教科書 [4] を参考にして作成した。内容は以下の通りである。

1. ベクトル
2. 力
3. 水の中にある物体にかかる力
4. 船にかかる力
  - 4.1. 船にかかる大気圧
  - 4.2. 水圧
  - 4.3. 船にかかる水圧
5. アルキメデスの原理
6. 船の沈む深さ

テキストの 1~3 では、浮力の公式を証明するにあたり、必要な数学や物理の考え方をまとめている。そして、4, 5 で浮力の公式の証明を行い、6 で実際に用意した船の沈む深さを求める。

### 2.4. 水圧が面を押す力

高校数学セミナー用のテキストにおいて、浮力の公式を証明する過程で、水が船の各面を押す力を求める際に、積分の考え方を使っている。そこで、この節では簡単な例を通し、物体が水から受ける力を、積分の考え方をを用いて求める。これは、実際に授業の中でも取り扱ったものである。以下、単位は省略する。

ここでは、船ではなく、水中に垂直におかれた幅 1、長さ  $h$  の板  $T$  にかかる力について考える。

このとき、図 4 のように長さ  $r$  をとる。そして、長さが  $r$  のところで、 $P = a + br$  の水圧  $P$  がかかっているとす。ただし、 $a, b$  は正の定数である。

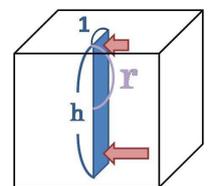
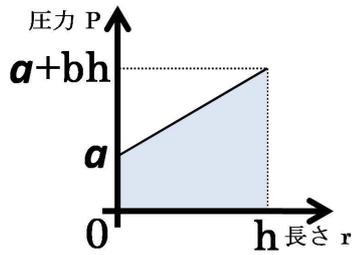


図 4

これは、 $P = P_0 + \rho gh$  を一般化したものであり、水圧は深さによって一次関数的に変化していくことを表している (グラフ 1)。ただ

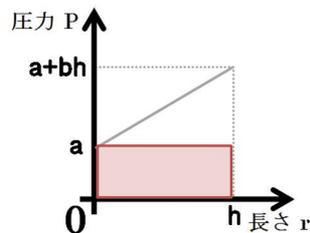
し、 $P_0$  は大気圧、 $\rho$  は水の密度、 $g$  は重力加速度である。



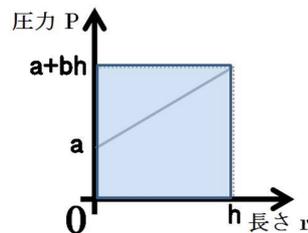
グラフ 1

水が板  $T$  を押す力  $f$  は、そのグラフの台形部分の面積に等しい。もし、 $P$  が  $r$  に関して一定で  $P = C$  ならば、圧力の定義から  $f = Ch$  となる。今、圧力は  $r$  に関して一定ではないので、力が面積と等しいことを示す必要がある。これは、以下のように考えることで、正しいことがわかる。

(1)  $T$  にかかる水圧の大きさが、どこでも最小値に等しいと考えたとき、水が  $T$  を押す力の大きさは、グラフ 2 の長方形の面積と等しい。また逆に、 $T$  にかかる水圧の大きさが、どこでも最大値に等しいと考えると、水が  $T$  を押す力の大きさは、グラフ 3 の長方形の面積と等しくなる。



グラフ 2



グラフ 3

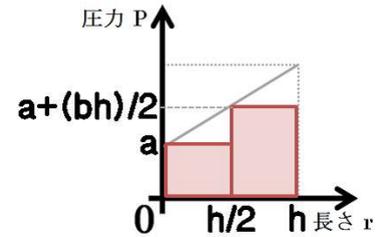
このことから、水が  $T$  を押す力  $f$  の範囲は、

$$ah \leq f \leq (a + bh)h.$$

(2) 板を上から  $T_1, T_2$  と 2 等分にする。

このとき、 $T_1, T_2$  にかかる水圧の大きさが、どこでもそれぞれの範囲の最小値に等しいと考えると、水が  $T$  を押す力の大きさは、グラフ 4 の長方形の面積の和と等しい。よって、

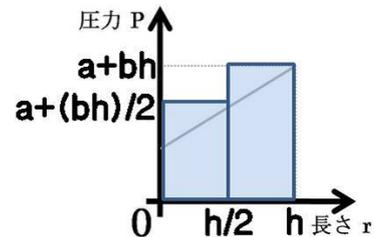
$$a \cdot \frac{h}{2} + (a + \frac{1}{2}bh) \cdot \frac{h}{2} = ah + \frac{1}{4}bh^2.$$



グラフ 4

また逆に、 $T_1, T_2$  にかかる水圧の大きさが、どこでもそれぞれの範囲の最大値に等しいと考えると、水が  $T$  を押す力の大きさは、グラフ 5 の長方形の面積の和と等しくなる。よって、

$$(a + \frac{1}{2}bh) \cdot \frac{h}{2} + (a + bh) \cdot \frac{h}{2} = ah + \frac{3}{4}bh^2.$$



グラフ 5

このことから、水が  $T$  を押す力  $f$  の範囲は、

$$ah + \frac{1}{4}bh^2 \leq f \leq ah + \frac{3}{4}bh^2.$$

(3) 板を上から  $n$  等分する。

このとき、 $n$  等分したそれぞれの部分にかかる力の最小値の和は、

$$\begin{aligned} & \frac{h}{n} \cdot \left\{ a + (a + \frac{bh}{n}) + \dots + (a + \frac{n-1}{n}bh) \right\} \\ &= \frac{h}{n} \cdot \left( na + \frac{bh}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= ah + \frac{bh^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

また、 $n$  等分したそれぞれの部分にかかる力の最大値の和は、

$$\begin{aligned} & \frac{h}{n} \cdot \left\{ (a + \frac{bh}{n}) + (a + \frac{2bh}{n}) + \dots + (a + bh) \right\} \\ &= \frac{h}{n} \cdot \left( na + \frac{bh}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= ah + \frac{bh^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

このことから、水が  $T$  を押す力  $f$  の範囲は、

$$ah + \frac{1}{2}bh^2 \frac{n-1}{n} \leq f \leq ah + \frac{1}{2}bh^2 \frac{n+1}{n}.$$

(4) (3) において、 $n$  を無限大にすることによって水が  $T$  を押す力  $f$  を求めると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( ah + \frac{1}{2}bh^2 \frac{n-1}{n} \right) = ah + \frac{1}{2}bh^2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( ah + \frac{1}{2}bh^2 \frac{n+1}{n} \right) = ah + \frac{1}{2}bh^2.$$

よって、

$$f = ah + \frac{1}{2}bh^2.$$

また、グラフ 1 の台形の面積を求めると、

$$\left\{ a + (a + bh) \right\} \cdot h \cdot \frac{1}{2} = ah + \frac{1}{2}bh^2.$$

以上のことから、グラフの台形の部分の面積が、水が板を押す力に等しいことがわかる。

### 3. 授業実践について

#### 3.1. 授業のねらい

第 1, 2 節で述べたことを踏まえ、授業のねらいを以下の 3 つとした。

- A. 浮力の公式を通して、数学と理科との関連を理解できる。
- B. 数学の分野間のつながりや他教科との関連を意識することで、数学の有用性を感じられる。
- C. 水が面を押す力を求める過程を通して、積分の考え方を理解できる。

#### 3.2. 実践の概要

主催 : 岐阜県教育委員会

場所 : 岐阜県図書館

日程 : 平成 21 年 12 月 13 日

対象生徒 : 中学生 3 名, 高校生 31 名

教材名「ふねの積分」

#### 3.3. 1 日の流れ

##### 理科の公式の話

授業者が、浮力の実験を行い、授業で使う公式の話をする。それにより、生徒は、浮力の公

式の意味を理解する。

##### 公式の証明

生徒 3~4 人に対して学生 1 人のグループで、テキストを進めていく。

##### 沈む深さの計算

証明が終わった生徒から、用意した船の沈む深さを、計算で求める。

##### 実験による確認

計算で求めた値が正しいことを、実験で確認する。

#### 3.4. 浮力の実験

ここで、授業の最初に行った浮力の実験の概要を示す。これは、[5] を参考にしている。

##### イ. 浮力とは

まず、土の詰まったペットボトルをバネばかりに吊るす(写真 2 左)。すると、465g であることがわかった。次に、これを水に沈めていくと、目盛りの値が小さくなっていった。このことから、その小さくなった分だけ、浮力が働いていることがわかる。

##### ロ. 水にかかる浮力

次に、水の入ったペットボトルをバネばかりに吊るすと、205g だった(写真 2 左)。これを水に沈めていき、ペットボトルの外側の水面の高さとペットボトルの内側のそれが等しくなったとき、目盛りは 0g になった。このことから、このとき、このペットボトルには 205g 分の浮力がかかっていることがわかる。

##### ハ. 浮力の公式の紹介

最後にもう一度、土の詰まったペットボトルを沈めていき、水に沈んでいる部分の体積が、2 つ目のペットボトルの水の体積と等しくなったときに止める。このとき 260g であった(写真 2 中央, 右)。これは、土の詰まったペットボトルの重さ(465g 重)から水の入ったペットボトルの重さ(205g 重)を引いた値になっている。このことから、物体は、水に沈んでいる部分と同じ体積の水の量分の力で押し上げられることがわかる。



写真2

以上、イ～八の実験から、  
 (浮力) = (水に沈んでいる部分の物体の体積と  
 同じ体積の水の重さ)

とわかる。さらに、中学の理科 [6] で習う「2  
 つの力のつり合い」から、

$$(\text{浮力}) = (\text{物体の重さ})$$

といえるので、これらのことから浮力の公式  
 がどのような意味を持つかわかる。

### 3.5. 活動の様子

大気や水が船の面を押す力をベクトルで表  
 す問題で、どの向きに力がかかっているのか  
 について混乱する生徒もいたが、実物を用い  
 た説明を聞くことで理解する姿が見られた。

また、図3で示した台形の面積に対し、生徒  
 によって、いろいろな考え方をしていた。授業  
 者が予想していたのは、写真3左の相似を使っ  
 た解き方だったが、三角比を習いたての生徒  
 が多く、そのような生徒たちは写真3右のよ  
 うに、正接を使って求めていた。

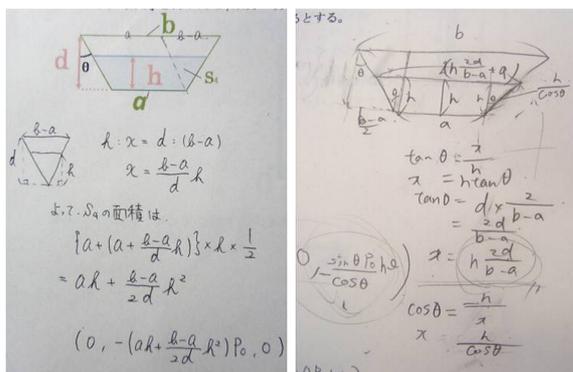


写真3

このようにして、どの生徒も、新しく学ぶ内  
 容を、既習の数学とつなげながら、活動に取り  
 組むことができていた。

しかしその一方で、証明で使う文字の多さ  
 や、力の向きの複雑さから生じる計算間違い  
 が多かった。また、問題文の意味を掴んだり、  
 それをイメージすることも、難しかったよう  
 である。例えば、図5左において、斜線部分の  
 面にかかる力を求めるために、図5右のよう  
 に、横軸を  $r$  として考えている。このとき、水  
 圧の大きさ自体は深さによって変化している  
 ため、深さを  $r$  で表す必要がある。このような  
 複雑さから、混乱が生じていた。

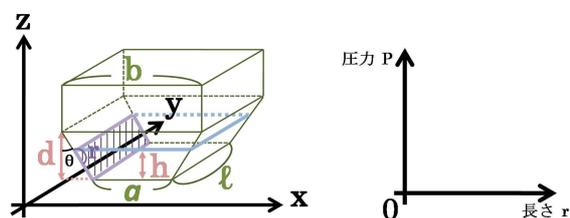


図5

以上で述べたように、実践結果からテキスト  
 の内容や構成など、改善すべき課題は数多  
 くと考える。

### 4. 考察

アンケートをもとに、先に述べた3つのねら  
 いが達成できたかどうかについて考察する。

A. 浮力の公式を通して、数学と理科との関  
 連を理解できる。

「数学と物理のつながりは感じられました  
 か」というアンケート項目に対し、「まさか  
 理科に三角比が…」、「物理学の現象を数学  
 で裏付けることができたことにつながりを感じ  
 した」など、全ての生徒が、つながりを感じら  
 れたと回答していた。また、「もっと一般的  
 な(船の)形でも考えたい」、「他の公式も数  
 学で証明できないかなあと思った」など、自  
 分が理科で感じる疑問を、数学で考えたいと  
 する意見も得られた。他にも「文系なので物  
 理はとらないんですが、すごくおもしろいと

感じました」といった声もきけた。これらのことから、このねらいは達成できたと考える。

**B. 数学の分野間のつながりや他教科との関連を意識することで、数学の有用性を感じられる。**

「数Ⅱで習ったベクトルや数列を使ったので、数学はつながっているんだなと思った」といった意見が得られたり、第3節で示したように学校で学んだ内容を使って問題を解こうとするなど、既習分野のつながりを意識できている生徒が多かった。また、まだ習っていない部分についても、興味を持つ生徒もいた。そして、「もう少し  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  や分数の計算力を身につけたい」といった、自分への課題意識を持つ生徒や「 $\lim$  を使った式の実用例を初めて見た」のように、数学が現実の世界でどのように使われているのかを再認識する生徒の声も聞けた。従って、このねらいは達成できたと考える。

**C. 水が面を押す力を求める過程を通して、積分の考え方を理解できる。**

テキストを進める中で、大半の生徒が、計算をすることだけで精一杯だった。そのため、普段の授業で学ぶ以上の積分に対する理解は得られなかったのではないかと考える。しかし、「講座を終えて興味を持ったことがあれば教えてください」というアンケート項目に対し、積分を習っていない生徒が「これから学ぶ積分に興味があった」とする回答や、積分を既習済みの生徒の中にも「微積の存在理由がなんとなくわかった」、「積分が(浮力の)他にも使われていないかどうか調べたい」といった、積分に改めて魅力を感じている生徒の回答も得られた。このことから、このねらいはほぼ達成できたと考えている。

以上のようなねらいに関する事以外でも、いくつかの反省点が生じた。まず、問題の意図が掴めなかったり、テキスト内のつながりを

わかりづらく感じる生徒がいたことである。また、時間内に最後までテキストが終わらない生徒が多く、浮力の公式が正しいことを実感できている生徒は少数しかいなかった。このことから、わかりやすい問題提示や、後につながる考えを随時まとめていくなどの、テキストを作る上での工夫が必要だったと考える。そして、生徒の理解度に合わせて、計算を省略するところと、ここだけは理解させるところを、明確にして授業に臨むべきだったと考える。

## 5. 今後の課題

まず第一に、本教材の見直しである。今回の授業で一番感じてもらいたかったのは、数学を使うことで、現実の問題を解決できるのだということである。そのために必要な公式を、1日かけて証明していったが、肝心の公式を用いて問題を解決する部分にまで辿り着いた生徒は、ごく少数だった。どの生徒も、証明の過程で数学の有用性を感じてはいたが、生徒にとって、長い証明を行う機会はあまりないため、この証明を終えていれば、得られる達成感も大きかったのではないかと考える。そして、頑張って証明した公式を使える喜びを味わってもらいたかった。そこで今後は、どの生徒も目標に辿りつけるように、授業の内容をより吟味していきたい。できるだけ全員が、その授業で一番大事な部分を理解し、さらに先に進める生徒には、発展的な問題に取り組ませるようにしていきたい。

第二に、さらなる教材開発と、それらを通常授業につなげる工夫をすることである。今後も、本教材を用いた授業方法の研究を行うつもりであるが、その際に、通常授業とのつながりを大切にしたいと考える。単発で教材を開発するよりも、通常授業の導入で、興味を持たせるために開発したり、いくつかの単元を学んだ後に、それらのつながりを感じさせるために開発する方が、その授業を行う意味が明

確になるであろう。

教材を開発するには、多くの時間を割かなければならない。だからこそ、1つの教材を開発したら、そこで終わるのではなく、何度も改良を重ねて、繰り返し授業できるような教材にしていくことが大切だと思う。そして、1つ1つの題材を大事にし、それを様々な視点で捉えるよう、深く追究していきたい。

#### 引用文献

[1] 文部科学省, 2009, 高等学校学習指導要領解説数学編

[http://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/new-](http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-)

[cs/youryou/1282000.htm](http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/1282000.htm)

[2] 宮原里奈・愛木豊彦, 2009, 浮力を題材とする「課題学習」の提案と実践, 岐阜数学教育研究, vol. 7, pp. 60-71.

[3] 大島利雄, 他 14 名, 2005, 数学 I・II・III・A・B, 数研出版.

[4] 宮本重徳, 他 6 名, 2002, 高等学校物理 IB, 数研出版.

[5] 板倉聖宣, 1973, ぼくらはガリレオ, 岩波書店.

[6] 三浦登, 他 44 名, 2002, 新しい科学 1 分野上, 東京書籍.