岐阜数学教育研究
2008, Vol.7, 109-116

日常生活における数学的要素を含んだ教材の開発

山田恵介[1]，愛木豊彦[1]

与えられた条件の中で，課題を解決するために，数学的な見方・考え方が必要となる場合がある。本論文では，数学的な見方・考え方の１つである単純化を用いて，手品に関する疑問を解決へと向かう授業を提案する。また，その授業を中学３年生を対象として実践した内容について報告する。

＜キーワード＞数学的な見方・考え方，単純化，手品

1．はじめに

本論文で示す授業の題材はトランプを使った「手品」である。その「手品」のタネ（手品が成功する理由）は 2.2 節で示すように，数学的に表現することができる。今回は，それを単純化した場合について考える授業を提案する。

ここで，片桐 [1] をもとに単純化について説明する。[1] では単純化について次のように述べている。「あるものにいくつもの条件があって，それが何々であるかが分かっていて，それらのすべての条件を考慮しなければならなくとも，その全部を考えるということは，はじめからはできにくいことがある。そういう場合には，そのうちのいくつかの条件を一時無視して，簡単な基本的な場合に直して考えてみようとすることがある。このような考え方が単純化の考え方である。しかし，いくら単純にしてみるにしても，もとの問題の本質的条件や一般性を損なってしまうほどに単純化してしまったのでは意味がない。単純化の際，一般性を失わないように注意しなければいけない。」

また，[1] で単純化の例として示されているものをあげる。

(例) 「A の体重は 36.6kg で，ＡはＢの体重の 1.2 倍である。B の体重はいくらか」

という問題の演算が，はっきりしないとき，36.6 や 1.2 を簡単な整数に置き直して考える。

例えば,「A は 36kg で，A は B の体重の２倍である」としてみる。これは容易に，36 ÷ 2 でよいことがわかる。このことから，もとの問題も，36.6 ÷ 1.2 とすればよいだろうと考えられる。この例では，36.6 を 36 に，1.2 を２という考えやすい数値に置き換えたことが単純化に相当する。

このように「数学的な見方・考え方」の一つである単純化の考え方は，課題解決において重要な役割を果たす。本実践では単純化の考え方を用いて課題を追究する。この過程で，日常生活における数学の有用性を実感するとともに，数学的な見方・考え方を養っていきたい。

2．題材について

2.1. 手品の紹介

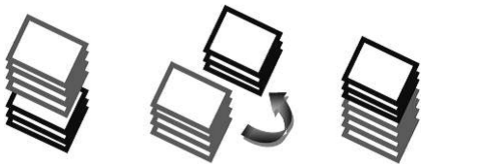
本授業で扱う手品の手順は次の通りである。

(i) ジョーカーを除く５２枚のトランプを用意する。
(ii) 用意したトランプを数回カットする。
(iii) 相手に１枚好きなカードをひいてもらう。
(iv) 相手がひいたカードを当てる。

[1]岐阜大学教育学部

この手品のタネは最初にカードを「ダイヤ，クローバー，ハート，スペード」のマークで数の小さい順番に上から並べておく。そして，相手がひいたカードの１枚上のカードを気付かれないように見て，そのカードに１を足し，相手のカードを当てるというものである。

ここで，手順 (ii) の「カット」について説明する。以下の用語は [2] を参考にしている。今回の授業では,「ハンドカット」を「カット」と定義する。「ハンドカット」とは，片手でトランプを持ち，もう片方の手でトランプの下半分を抜きとり，上に置く方法のことである（図１）。



①２つに分ける　②下を上の束の上にのせる　③カット完了
図１

一般的な切り混ぜ方は,「ヒンズー・シャッフル」とよばれる方法で，裏面を上にして左手に持ち，右手で下３分の２くらいを抜き取り，カードの上にのせる方法である（図２）。この動作はカードの順序が入れ替わるため，本授業では取り扱わない。

①中のカードを取り出す　②束を上に乗せる　③シャッフル完了
図２

2.2. 手品の数理

2.1 節で示した手品が何回カットしても成功することを数学的に説明する。

図３

図３のように n 枚のカードが積み重ねられているときの上から i 枚目のカードにかかれている数を a_i とし，このカードの状態を $(a_1a_2 \cdots a_n)$ と表すことにする。従って，上から順に 1,2,⋯,n となっている状態は $\tau_0 := (12\cdots n)$ と表される。

τ_0 の状態から下の k_1 枚をとってカットしたときの上から i 番目にあるカードにかかれた数を i^{σ_1} とおくと，

$$i^{\sigma_1} \equiv i + k_1 - 1 \pmod{n},$$

ただし，$i^{\sigma_1} = 1, 2, \cdots, n,$ と表すことができる。そして，この状態から下の k_2 枚をとってカットしたときの上から i 番目にあるカードにかかれた数を，i^{σ_2} と表す。同じように，i^{σ_3} も定義する。従って，m 回目 $(m \geq 2)$ に，下から k_m 枚をとってカットしたとき，上から i 番目にかかれている数を i^{σ_m} とすると，

$$i^{\sigma_m} \equiv i^{\sigma_{m-1}} + k_m - 1 \pmod{n},$$

ただし，$i^{\sigma_m} = 1, 2, \cdots, n$ と表すことができる。

次に，手品が成功するカードの状態を記号で表す。i_0 の状態から m 回カットしたとする。手品では，相手がひいたカードの１枚上のカードをみるので，上から i 枚目のカードにかかれた数が n でなければ $(i+1)$ 枚目にかかれた数より１小さければよい。これを記号で表すと $i^{\sigma_m} = 1, 2, \cdots, n-1,$ のときは

$$(i+1)^{\sigma_m} = i^{\sigma_m} + 1$$

$i^{\sigma_m} = n$ のときは $(i+1)^{\sigma_m} = 1$
よって，$(i+1)^{\sigma_m} \equiv 1 + n \pmod{n}$
従って，手品が成功する条件を式で表わすと

$$(i+1)^{\sigma_m} \equiv i^{\sigma_m} + 1 \pmod{n}$$

となる。

定理　上で定めた $i^{\sigma_m}(i = 1, 2, \cdots, n, m \in N)$ に対し，

$$(i+1)^{\sigma_m} \equiv i^{\sigma_m} + 1 \pmod{n}$$

（証明) 帰納法を用いて示す。
(i) $m=1$ のとき

$$\begin{aligned}(i+1)^{\sigma_1} &\equiv i+1+k_1-1 \pmod n\\ &\equiv i+k_1-1+1 \pmod n\\ &\equiv i^{\sigma_1}+1 \pmod n\end{aligned}$$

よって，$m=1$ のとき成り立つ。

(ii) $m=j$ のとき成り立つと仮定する。
つまり，$(i+1)^{\sigma_j} \equiv i^{\sigma_j}+1 \pmod n$

$m=j+1$ のとき

$$\begin{aligned}(i+1)^{\sigma_{j+1}} &\equiv (i+1)^{\sigma_j}+k_{j+1}-1 \pmod n\\ &\equiv i^{\sigma_j}+1+k_{j+1}-1 \pmod n\\ &\equiv i^{\sigma_j}+k_{j+1}-1+1 \pmod n\\ &\equiv i^{\sigma_{j+1}}+1 \pmod n\end{aligned}$$

よって，$m=j+1$ のときも成り立つ。
(i) , (ii) より　すべての自然数 m に対し，$(i+1)^{\sigma_m} \equiv i^{\sigma_m}+1 \pmod n$ が示せた。

（証明終）

3．授業実践について

3.1. 授業のねらい

(a). カードの枚数やカットの回数を減らしても，本質的には同じであることを理解し，単純化して考えることができる。

(b). 図にカットしたときのカードの並べ方をかき表し，そこから規則を見つけることができる。

ここで，この規則について説明する。図４のように１～４の４枚のカードを１回カットしたときのカードの並べ方を図にする。

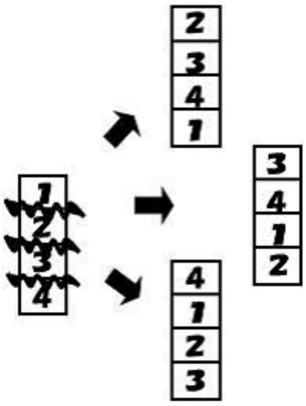


図４

そして，そこからさらにもう１回カットしたとき（２回カットした後）のカードの並べ方を図にする。

このとき，図から次の２つの規則が成り立つことがわかる。

- カードをカットしたときのカードの並べ方は４通りのいずれかであり，そのすべての並べ方で手品が成功する。
- カードの並び順がつねに変わらない。すなわち，あるカードの上にくるカードはいつも同じである。例えば，２の上にくるカードはつねに１である。

この２つを今回の授業ではカットについての規則とする。

3.2. 授業の展開

授業のねらい (a)，(b) の実現を目指して授業の流れを次のように設定した。

(1). 手品のやり方を理解し，興味をもつことができる。

- 授業者の手品を見て，そのタネについて興味をもつ。

(2). 手品を見た後，手品のタネついて理解する。

- カードは最初，数字は上から小さい順に並び，マークは「ダイヤ」→「クローバー」→「ハート」→「スペード」の順に上から並んでいることから，相手がひいたカードの１つ上に位置するカードを見ることで，相手のひいたカードを当てることができると知る。

(3). 「カット」について理解し，なぜカードを何回かカットしてもこの手品が成功するのか疑問を持つ。そして，学習課題を「カードをカットしてもマジックが絶対に成功する理由を考えよう」としてそれを追究する。

(4). 「１～４の４枚のカードを使って，２回カットしてもマジックが成功することを説明しよう」という単純化した課題についてまず考える。52 枚のトランプでは，数が多く，マークが４種類あるので考えやすいように１～４の４枚のカードだけで考えるというように単純化する。また，カットの回数も一般の場合ではなく，まず，２回と限定する。

- ここで，授業のねらいである「単純化」の考え方を用いる。カードの枚数やカットの数を少なくして考えても 52 枚のカードで考えたときと比べて，カットの性質や手品のタネが変わらないことを理解し，数が多い場合は単純化して少ない数について考えた方がより簡単に考察できる場合があることを理解する。

(5). １～４の４枚のカードを２回カットした全ての並べ方を図にかき表す。そして，その図をもとに，規則について考える。

(6). 何回カットしても，カードの上と下のカードはつねに変わらないことに着目する。そこから，カードを何回カットしてもカードの並び順は変わらないことを理解する。

(7). 考察した規則性を 52 枚のトランプを用いて，手品が成功する理由を説明することができる。

4． 実践結果と考察

この教材を以下の要領で実践した。

題材名　「マジックのタネを見破ろう」
実施日　平成 20 年 12 月９日（火）第１校時
　　　　　　　　24 日（水）第４校時
場所　　岐阜市立青山中学校
参加者　中学３年生（23 人，24 人）

4.1. アンケート結果

以下，アンケートの結果を示す。

(1). 授業の最初，カットしたときトランプの順番がバラバラになると思いましたか？

- 思った（32 人／ 47 人）　　… 68 %
- 思わなかった（15 人／ 47 人）… 32 %

(2). 今回の授業のどのようなところに数学の考え方が使われていると思いましたか？

- 樹形図
- 規則性があるところ
- パターンの繰り返しを見つける考え方
- 組み合わせを考えるところ
- 大きいことを小さいことから考えるところ
- 数を少なくして考えるとわかりやすいということ
- どんなにカットしても変わらないというところ
- 数のつながり
- 思わなかった

(3). 授業を振り返って

- 数が多いから難しいと思ったけど，４枚でやってみるとできて，52 枚でもできると分かった。
- トランプの手品にも数学の考え方があることが分かった。
- 何回カットしてもトランプの数のつながり方は変わらないということが分かった。
- カットの不思議についてふれられて楽しかった。
- ７並べをするとき，カットするとすぐにそろってしまうと思った。
- 数学は身近なとこに応用がよくきくのだと思った。
- いつも見ているトランプのタネを知れて面白いと思った。
- いろんな手品に使えるし，手品を自分で作れると思った。
- 偶然だと思ったけど，偶然ではないことが分かった。

4.2. 生徒の様子から

はじめに手品を見せたため，ほとんどの生徒は，題材に興味をもち積極的に課題に取り組んでいた。そして，実際にカードを使うことでカードをカットしたときの並べ方について調べ，すべての場合を図にかき表し，カットの規則を発見することができた。

規則を発見した後は，それが正しいことをいろいろな方法で説明していた。カードを写真１のように円形に並べてどこでカットしてもカードの並び順が変わらないことを説明した。

また，別のある生徒は「カットという動作は単語帳のような動き方をする。そのためカットを何回してもカードはつながっている」と説明した。

最終的には，全体交流の場で４枚のカードを２回カットした場合についての図を黒板にかき出し，どの場所からカットしても手品が成功することを確認し，そして，それをもとに 52 枚のカードで何回カットした場合でも手品が成功することを理解できた（写真２）。

写真 1

写真 2

4.3. まとめ

これらの結果から，課題追究の際に図を用いて規則を発見することができた生徒が多くいたので，ねらい (b) は達成されたと考える。その一方，アンケート (2) からも分かるように単純化の考え方を理解していた生徒が多くなかったため，ねらい (a) は十分には達成で

きなかったと判断した。課題提示から，単純化していくまでの流れを改善していく必要があると考えている。

5．今後の課題

今回の授業実践の課題は，何回カットしてもカードの並び順が変わらないということを理解できても，それが正しい理由を言葉にして表現することが難しかったということである。3.1 節で示したような規則は見つけられたものの，それが成り立つ理由やそれをもとにしたカードが 52 枚のときにも成り立つことの説明にはうまく結びつかなかった。そのため，事前にカットについて知っていた生徒に対しては，それが成り立つ理由を深められず簡単な課題になってしまった。

そこで，2.2 節で示したように，カットの手順と手品がうまくいく並び方とを明確に区別するなどして，見つける規則，理由などを中学生用に直し，中学生でも数学を使って表現ができるような授業に改良していきたい.

引用文献

[1] 片桐重男，1995，数学的な考え方を育てるねらいと評価，明治図書.

[2] トランプの基本のテクニック（http://www.expertrumps.com/magic/basic.html）

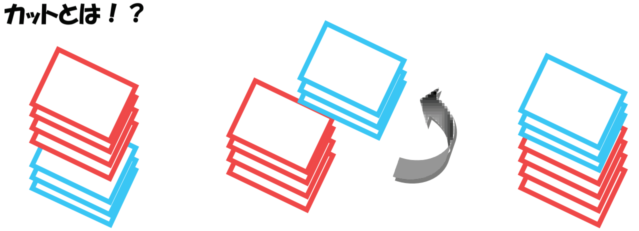
資料１

マジックのタネを見破ろう！！

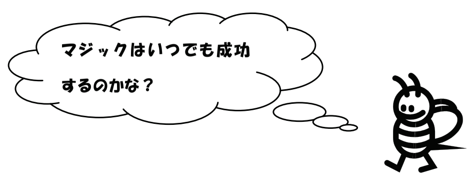
3年　組　名前＿＿＿＿＿＿＿＿

課題

カットとは！？

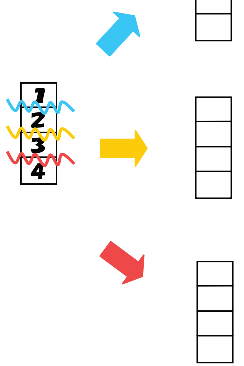


1. カードを2つに分ける。　**2. 下にあるカードを上に乗せる。**　**3. カット完了**



1～4の4枚のカードを使って，2回カットしてもマジックが成功することを説明しよう。

1回カットした後　**2回カットした後**



考えをまとめよう！！

資料 2

マジックのタネを見破ろう！！

3年　組　　名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

<ヒントプリント>