岐阜数学教育研究
2008, Vol.7, 87-94

円周角の定理の有用性を実感できる教材の開発

竹内洋平[1]，愛木豊彦[1]

生徒が日常の中に数学を発見することで，より数学を身近に感じ，数学を好きになれるような教材の開発を試みた。数学の学習の中でも証明が日常の役に立つことを実感している生徒は少ない。また中学校の数学の中で，円周角の定理を日常生活の中で用いる場面を取り上げることはほぼないと感じる。そこで円周角の定理を用いた証明問題を取り上げる。本論文は，その教材及び実践内容，それに対する考察を報告するものである。

＜キーワード＞円周角，三角形の外角の性質，図形，証明，サッカー

1．はじめに

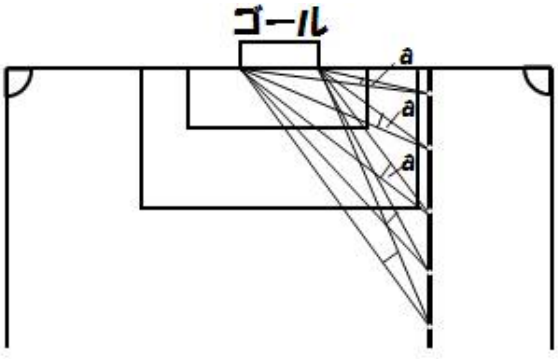
平成 20 年度全国学力・学習状況調査 [中学校] 報告書 ([1]) による「数学の勉強は好きですか」という質問に対して,「あてはまる」または「どちらかといえば，当てはまる」と回答した生徒の割合は，平成 13 年度が 42.8 %，平成 15 年度が 44.6 %，平成 19 年度が 51.4 %，平成 20 年度が 53.2 %と順に増加していることから，数学が好きな生徒が増加していることがわかる。一方,「数学の授業で学習したことを普段の生活の中で活用できないか考えますか」という質問に対して,「あてはまる」または「どちらかといえば，当てはまる」と回答した生徒の割合は，平成 20 年度の調査で 34.5 %と低い。数学が好きな生徒は増加しつつあるものの，生活に数学が結びついていることを実感していない生徒が多くいるということがわかる。

中学校数学科の目標 ([2]) の中の「数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し」についてとして,「数学のよさ」を「実感」とは，単にでき上がった数学を知るだけでなく，事象を観察して法則を見つけたり，具体的な操作や実験を試みて数学的内容を帰納したりするなどして，数や図形の性質などを見出し，発展させる活動を通して数学を学ぶことであるとしている。以上をふまえ，生活の中で活用でき，具体的な操作などで解決ができるような授業を開発することにした。そして，その題材として円周角を取り上げた。

2．授業の概要

2.1. 教材について

円周角は [3] でも取り上げられているように，カメラで写せる範囲など，いくつかの現実への応用が紹介されている。本論文で提案する授業では，円周角に関連する性質を利用して，どこの場所からボールを蹴るとよりゴールしやすいかという問題を考察する。



（図１）

[1]岐阜大学教育学部

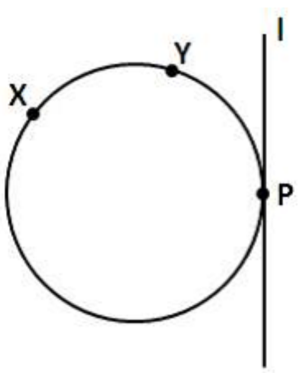
具体的には，フリーキックを蹴る際に，ボールを置く場所を図１のような線の上と限定し，どの場所から蹴ったら１番入りやすいかという問題である。

まず，ボールを蹴る力の強弱は考えないものとし，どの場所から蹴ってもボールは真っ直ぐに進み，ゴールに必ず届くものとする。すると各場所とゴールポストの両端を結んでできる角度(図１の∠ a) が大きいほどゴールしやすくなると考えられる。従って，この問題を数学的に表現すると次のようになる。

問題 Q「直線ℓとその上にない２点 X，Y を考える。ここで，X，Y はℓに関して同じ側にあるものとする。ここで，点 P をℓ上にとるとき，∠ XPY が最も大きくなる点 P を求めよ。」

この問題を解決するために，次の２つの事柄について述べる。

ア）X，Y を通り，ℓが接線となるような円をかいた場合，接点Pが求める点である（図２）。



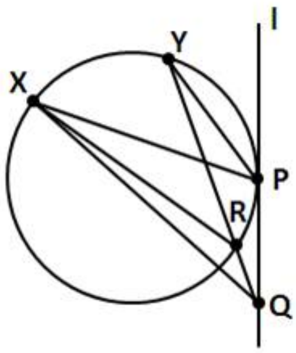
（図２）

イ）ア）で示した円の作図方法

ア）を２通りで証明する。

（証明１）

図３のように補助線をかき，ℓ上に P 以外の点 Q をとる。



（図３）

このとき，同じ弧に対する円周角は等しいので，

∠ XPY ＝∠ XRY…（1）

△ RXP において，三角形の１つの外角はそれととなり合わない２つの内角の和に等しいので，

∠ XRY ＝∠ XQR ＋∠ QXR…（2）

（1）,（2）より，∠ XPY ＞∠ XQY

（証明１終）

（証明２）

図３のように補助線をかき，ℓ上に P 以外の点 Q をとる。このとき，同じ弧に対する円周角は等しいので，

∠ XPY ＝∠ XRY…（1）

△ XRY において，

∠ XRY ＝ 180 °－（∠ RXY ＋∠ RYX）…（2）

△ XQY において，

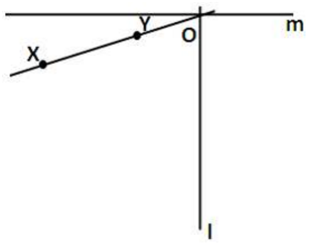
∠ XQY ＝ 180 °－（∠ QXR ＋∠ RXY ＋∠ RYX）…（3）

（1）,（2）,（3）より，∠ XPY ＞∠ XQY

（証明２終）

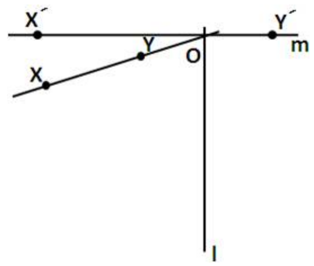
イ）作図の方法を示す。なお，この作図はアポロニウスの十大問題の一つであり，[4] でも紹介されている。以下の作図方法は [5] を参考にしている。

i) 直線 XY と直線ℓとの交点を O とし，O を通り直線ℓに垂直な直線 m をかく。（図４）



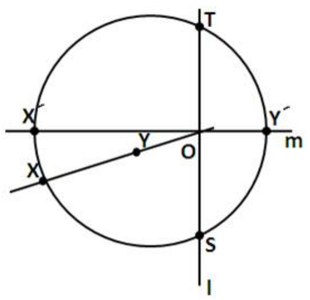
（図４）

ii)m 上に O をはさんで，２点 X’，Y’ を OX’ ＝ OX，OY’ ＝ OY となるようにとる。（図５）



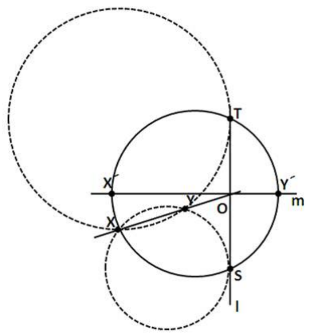
（図５）

iii)X’Y’ を直径とする円をかき，直線 ℓ との交点を S，T とする。このとき S，T が求める円と ℓ との接点となる。（図６）



（図６）

iv) ３点 X，Y，S および，X，Y，T を通る円をかく。（図７）

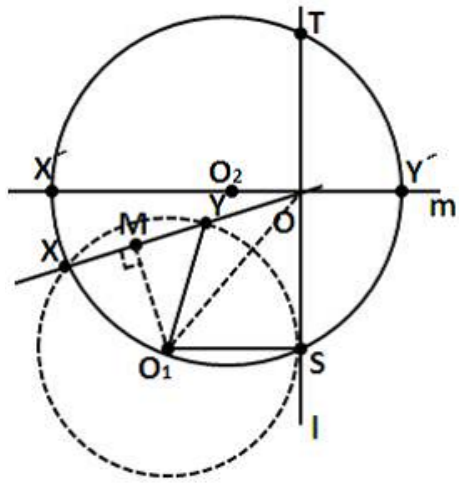


（図７）

ここで，３点 X，Y，S を通る円の中心を O_1，線分 X’Y’ を直径とする円の中心を O_2，O_1 から線分 XY にひいた垂線と線分 XY との交点を M とする。

このとき，$O_1Y = O_1S$ を示す。

（証明）



（図８）

OX ＝ OX’ ＝ x，OY ＝ OY’ ＝ y とする。

このとき，$OO_2 = \frac{x-y}{2}$，$O_2S = \frac{x+y}{2}$

よって，△ OO_2S において三平方の定理より

$(\frac{x+y}{2})^2 = OS^2 + (\frac{x-y}{2})^2$

従って，$OS = \sqrt{xy}$

次に，△ OO_1S において，ℓ が円 O_1 の接線となるので，三平方の定理より

$OO_1^2 = \sqrt{xy}^2 + O_1S^2$

よって，$O_1S = \sqrt{OO_1^2 - xy}$ …(1)

また△ OO_1M において，M は X と Y の中点なので，三平方の定理より

$O_1M^2 = OO_1^2 - (\frac{x+y}{2})^2$

ここで△ O_1YM において三平方の定理より

$O_1Y^2 = O_1M^2 + Y_1M^2$

$\quad = OO_1^2 - (\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{x-y}{2})^2$

$\quad = OO_1^2 - xy$

よって，$O_1Y = \sqrt{OO_1^2 - xy}$ …(2)

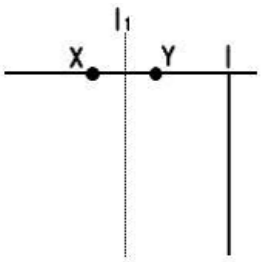
(1)，(2) より，$O_1Y = O_1S$

（証明終）

また，今回の授業では直線 XY と直線 ℓ が

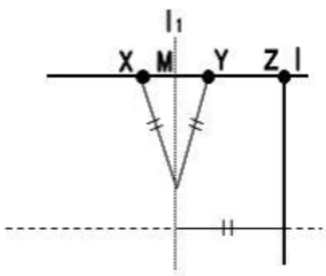
垂直の場合を取り上げるため，その作図方法も示す。この場合は，次のように簡単にかくことができる。

i) 直線 XY の垂直二等分線 ℓ_1 を描く。（図９）



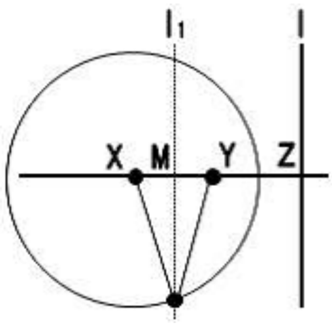
（図９）

ii) 直線 XY と ℓ との交点を Z，XY の中点を M とする。（図 10）



（図 10）

iii) 中心 X，半径 MZ の円を描いたとき，ℓ_1 との交点が求める円の中心である。（図 11）



（図 11）

このような題材を選択した理由は，次の３点である。

・サッカーという子どもたちにとって親しみやすい題材である。

・既習の内容を使って，新しい定理（ア）の証明をすることができる。

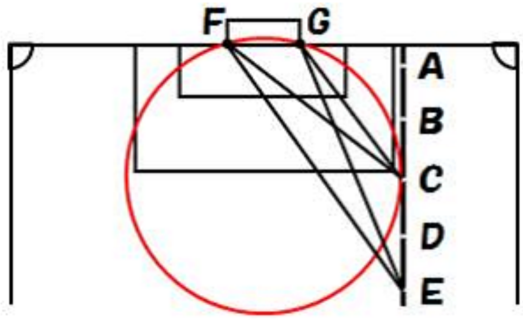
・「円周角の性質」は，通常授業では定理の証明で終わってしまうが，日常生活にも使う場面があることを実感できる。

また，中学生にこのような作図は難しいと判断したため，（ア）の証明を中心に授業を次のように構成した。

2.2. 授業の流れ

（1）問題提示

まず（図 12）のように，線上に具体的に５つの場所を与える。そしてＡ地点から実際にゴールを見た写真（写真１）を提示して興味を持ってもらい，「友達と線の上からボールを蹴ってゴールにボールを入れるというゲームをすることにしました。どこから蹴ったら入りやすいだろうか。」という問題を提示し，Ａ～Ｅのどの場所から蹴ると１番入りやすいか予想させる。



（図 12）

（写真１）

（2）課題設定

生徒は，A～E地点それぞれの場所からゴールの両端までの角度を実際に分度器で測り，どの場所の角度が１番大きいか調べる。その結果は表１のようになる。

場所	A	B	C	D	E
角度	5°	13°	16°	15°	13°

（表１）

よって，C地点が最もゴールしやすい場所であることがわかる。ここで，C地点が先に示した円を作図することで見つけた場所であることを伝える。そして，C地点が与えられた線上のどの場所よりもゴールの両端までの角度が大きくなることを，いつでも言えるためには証明が必要であることを確認し,「この図において，∠C＞∠Eとなることを証明しよう。」という課題を設定する。

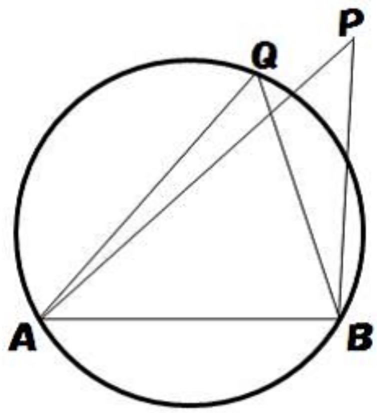
（3）個人追究

学習プリント（資料１参照）を活用しながら個人追究を行う。証明方法は１通りではないので，特定の方法に限定するような指導はしない。考えが進められない生徒に対しては，机間指導において，∠Cが弧ＦＧの円周角であることを伝え，∠Cと同じ角度になっている角度を見つけるように指導する。

（4）意見交流・まとめ

個人追究したことを全体で交流する。

生徒が発表した内容を理解できたかどうか確認し，本時の内容をまとめる。課題追究において,「円周角が同じ弧の両端と円の外の点を結んでできる角度より大きくなる。」ということを証明したが，生徒がより直観的に理解できるよう,「この図（図13）において，∠ＡＱＢと∠ＡＰＢではどちらの角度が大きいでしょう。」と問いかけ，全体で確認をしてまとめる。また,「円周角」や「三角形の外角の性質」がスポーツの中にも使うことができるということを伝え，日常の中に数学を用いると便利な場合があることをまとめとする。



（図 13）

2.3. 授業のねらい

今までに述べてきたことから，本授業のねらいを以下の３点とした。

(a) 円周角の定理や三角形の外角の性質などが日常生活の中に用いることができることを知る。

(b) 既習事項を根拠として，証明を理解することができる。

(c) 日常生活における数学の有用性を感じることで，数学に対する興味・関心を高めることができる。

3. 実践結果

以下のとおり実践を行った。

＜第１回目＞

場所：岐阜県岐阜市立青山中学校

日程：平成 20 年 12 月 10 日第１校時

参加生徒：選択数学の３年生の生徒 23 人

＜第２回目＞

場所：岐阜県岐阜市立青山中学校

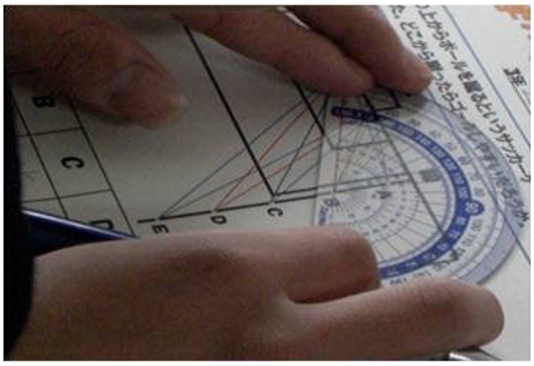
日程：平成 20 年 12 月 16 日第 4 校時

参加生徒：選択数学の３年生の生徒 24 人

（1）問題提示～課題設定について

ゴールの写真（写真１）や実際にA地点とC地点からボールを蹴った映像を見せると，生徒から「A地点はゴールするのは難しそう。」,「C地点は入るやろ！」などの声があり，とても興味を持っている様子だった。そして「ど

うしてＡ地点は入りづらいの？」と発問すると,「角度がせまい。」という意見があり，指定したＡ～Ｅの場所からゴールの両端を結んでできる角度に着目し，その角度が広いほどゴールしやすくなるということを全体で確認した。実際にＡ～Ｅ地点からゴールの両端までの角度を測る活動では，わかりやすく測るために線を延長するなどの工夫も見られるなど，周りの仲間と確認しながら正確に角度を測ることができていた（写真２）。



（写真２）

（2）個人追究について

最初は何から始めればよいか戸惑っている生徒も見られたが，学習プリントに描かれた図（図13）を活用しながら,「ＦとＨを結べば円周角が等しくなる！」と気づく生徒や，周りの仲間の声を聞いて補助線を引く姿が多く見られた。円周角に着目した後は,（証明１）で示した方法で証明する生徒が多く見られる中,（証明２）で示した方法で証明する生徒も数名見られた。考えを進められない生徒もいたが，その生徒たちに対しては，机間指導で「ＦとＨを結ぶと，∠Ｃと同じ角度ってできない？」と発問すると,「円周角は等しいんだった！」と気づくなど，２年生で学習したことを思い出しながら解決に向かっていた。

（3）意見交流・まとめ

全体の場で，課題をどのように証明したかを交流した。（証明１）で証明していた１人の生徒に，自分の行った証明を黒板に書いてもらい，発表してもらった。（証明２）で証明した生徒も見られたが，時間の関係上（証明１）の意見だけを紹介し,「別の考え方で証明していた人もいるけど，その証明方法でも正しいです。」と話した。

4．授業に対する考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

生徒の感想

・サッカーも数学的に考えるとおもしろいと思いました。普段は考えないことなので，色々他にも知りたいと思いました。

・証明方法で，人の証明と比べてみてもっと簡単に証明していたり，異なる証明の仕方があったりと，いろいろな方法があっておもしろかった。

・最初はなんとなく感覚でＣ地点が１番入りやすいと決めたけど，角の大きさを調べたり，証明したりして，しっかりと学べたと思います。身の回りの数学に実は関係しているのが分かりました。

・Ｃ地点だという気はしたのだけど，まさか三角形の性質を使えるとは思わなかった。

・とても身近なことについて楽しく考えることができたし，ちゃんと理解できた。他にも身の回りのことでこういうことにつながるのか調べたいと思った。

・三角形の外角とかのことだけで証明できることがわかったし，スポーツにも数学があるということがよくわかった。

ねらいの達成度

先に述べた今回の授業における３つのねらいが達成できたかどうか考察する。

（a）について

授業後アンケートの「この授業で学んだことの中で，これからの生活の中でいかしてい

きたい考え方はなんですか。」という質問に対して,「スポーツに数学があることが分かったので，頭脳で勝負してみたい。」,「スポーツと数学は関係があることが分かったので，他のスポーツでも調べてみたい。」,「数学を利用すると，サッカーで勝てる確率を増やしていくことができるなと思った。このように生活の中でも利用し，効率の良い生活をしたい。」という回答が見られ，また授業の中でも「考えてプレーすれば楽だし，効率がいい。」という声が聞かれたのでねらいは十分達成できたと考える。

（b）について

授業後アンケートの「今日の授業の証明は理解できましたか。」という質問に対して,「理解できた。」と答えた生徒が３８人,「だいたい理解できた。」と答えた生徒が７人,「よくわからなかった。」と答えた生徒が１人だった。個人追究の時間の中で，すぐに証明を思いつた生徒が回りの仲間にヒントを出したり，教え合いをしたりする中で，クラス全体が順番に理解していくという様子であった。また，証明を書いていく中で，多くの生徒が「円周角の定理より」や,「三角形の１つの外角は，それととなり合わない２つの内角の和に等しいから」などとしっかりと根拠を記入しながら証明を進められていて，根拠を記入していない生徒でも,「どうしてこうなるの？」と質問すると，しっかりと根拠を説明できていた。

（c）について

授業後アンケートの感想の中に,「楽しかった。」,「おもしろかった。」と書いている生徒が多くみられ，また「スポーツの中にも数学があって驚いた。」という生徒もみられた。授業の中でもサッカーという教材にとても興味・関心を持ち，積極的に活動していた。

5．今後の課題

まず，本教材の見直しから始めたい。今回の授業では，各場所とゴールの両端を結んでできる角度が大きいほどゴールに入りやすくなると考えられるとして話を進めたが，どこの角度に着目してよいか分からず，角度を測ることができない生徒が見られた。よって着目する角度がよりはっきり生徒に伝わるような工夫をしていきたい。また，今回取り上げることのできなかった作図についても工夫をして授業の中に取り入れていきたい。

次に，新たな教材の開発も行いたい。授業後アンケートの中で,「他のスポーツでも数学がないか調べてみたい。」という意見があった。これも踏まえつつ，今後もこのような教材を開発していきたい。

引用文献

[1] 平成 20 年度全国学力・学習調査 [中学校] 報告書，教科に関する調査の各問題の分析結果と課題

http://www.nier.go.jp/08chousakekkahoukoku/08chuu_data/houkokusho/03_chuu_shitsumonshi_kaitoukekka.pdf

[2] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領解説，数学編，教育出版株式会社

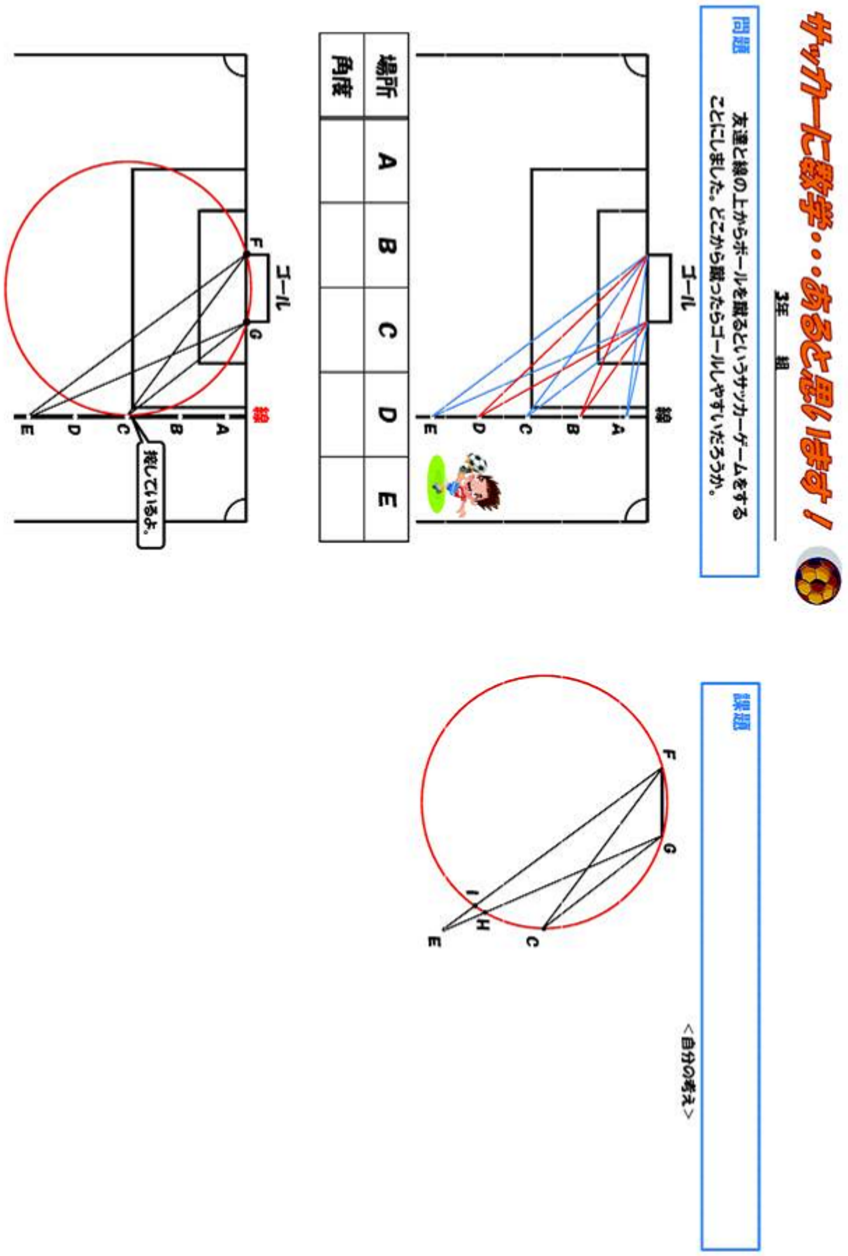
[3] 吉田稔ほか 17 名，2006，新版中学校数学 2，大日本図書株式会社

[4] 柴垣和三，金山靖夫共訳，G. ボリア，1864，数学の問題の発見的解き方 1，株式会社みすず書房

[5] 作図の小部屋

http://homepage2.nifty.com/sintakenoko/Construction/Draw21.html

資料 1


サッカーに数学・・・あると思います！
3年　組
問題
友達と線の上からボールを蹴るというサッカーゲームをすることにしました。どこから蹴ったらゴールしやすいだろうか。
ゴール
線
A
B
C
D
E
場所
角度
F
G
接しているよ。
課題
H
I
＜自分の考え＞