

帰納的な考え方を取り入れた教材の開発と実践

小暮あゆみ¹, 愛木豊彦¹

児童・生徒が「数学は楽しい。」と感ずるためには、数学的な見方・考え方のよさや算数・数学と日常生活との結びつきを理解することが重要だと考えた。本論文では、日常生活の中にある電車に乗るときの「切符」を題材にし、数学的な見方・考え方の一つである「帰納的な考え方」に重点をおいた授業を提案し、その実践結果をまとめた。

<キーワード> 帰納的な考え方, バーコード, 場合の数

1. はじめに

2008年9月に示された中学校学習指導要領解説[1]の中の数学科改訂の要点に、「数学的活動の楽しさや数学のよさを実感することができるようにすること」とある。ここでいう「数学的活動の楽しさ」について、「単に楽しく活動をするという側面だけでなく、それによって生徒にどのような知的成長がもたらされるかという質的側面にも目を向ける必要がある」と述べられている。また、「数学のよさ」とは、「数学的な表現や処理のよさがある。また、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則のよさ、数学的な見方や考え方のよさなども含まれる。さらに、数学が生活に役立つこと、数学が科学技術を支え相互にかかわって発展してきていることなどにかかわる知識も数学のよさである」とある。

本論文で提案する授業は、上で示した数学的な見方や考え方のよさと数学が生活に役立つことを生徒に伝えることに重点をおいて考えた。

次節で授業の題材、そこで必要となる数学的な見方や考え方、授業展開を示す。

2. 授業の概要

2.1. 題材について

今回の授業実践で選んだ題材は、電車に乗るときの切符である(写真1)。切符の裏には、日付や料金、大人か子どもの区別などの情報がバーコードとして記録されている。そのバーコードは、使い捨てカイロの粉(鉄粉)をふりかけると写真2や写真3のように浮き出てきて見ることができる。ここで示す切符のバーコードに関する情報は、同志社中学校の面白授業紹介[2]や[3]を参考にしている。



写真1



写真2



写真3

¹岐阜大学教育学部

一般にバーコードは黒く塗られた部分の幅で情報を表わしているが、切符の裏のバーコードには、二進法が使われている。つまり黒い部分を1、黒くなっていないところを0とした二進法が使われている。写真2と写真3は同じ日に同じ駅で買った料金だけが違う2枚の切符の裏にあるバーコードの写真である。この2枚を比較すると、3列目の真ん中あたりが違ってくるのが分かり、日付、料金などの情報がバラバラに記憶されていることが確認できる。

ここで示したように普段使っている切符の裏にバーコードが隠れていて、しかもそれを簡単な方法で見ることができ、記憶している情報の違いも確認しやすい。従って、生徒も興味・関心を持ち積極的に授業に臨めると考えて、これを授業の題材とした。

2.2. 授業の展開

前述した黒くなっていない部分と黒くなっている部分を白と黒のマスのマスで表す。この白と黒のマスのマスで何通りの表し方ができるのかという問題を扱うのだが、授業の展開を考えるに際し、マスの数をいくつにするかについて検討した。バーコード全部のマスの数は $59 \times 3 = 177$ 個(写真2)であり、表し方が 2^{177} 個となり授業で扱うには多すぎる。そこで、現実から離れてしまうが、マスの数を10とした。その理由を述べる。本授業を实践するのは2年生であり、実践時において場合の数は未習であり、樹形図の描き方も学習していない。従って、表し方が何通りかを求めるには、1マスの場合から何通りあるかを考えていき、求めた値を表にして、そこから規則を見つけて解く方法が多く用いられると予想される。また、マスの数を10より大きくしても、2の累乗を求めるだけで本質的には変化しない。また、10マスで何通り表すことができるかと尋ねた場合、100と予想するのではないか。そして、結果が1000を超えることを知り、そのことが数学の有用性を感じるきっかけになると考え

た。このことをふまえ、授業では、写真2と写真3を生徒に見せ、違っていそうな場所を発見し、そこだけに注目し、10マスについて考えるという展開にした。

授業で扱う問題を正確に述べると次の通りである。

問題「料金を表わしている部分を10マスと考える。その10マスで白と黒を使って何通りの表し方ができるだろうか」

この問題の答えは、場合の数や樹形図の描き方を学習した後であれば、 2^{10} とすぐに求められる。しかし、それらが未習なため、この求め方は使えない。そこで、図1のように実際に白と黒を並べ、何通りあるかを数える方法が考えられるが、この方法も数が多いので、最後まで正確に数えるのは困難である。

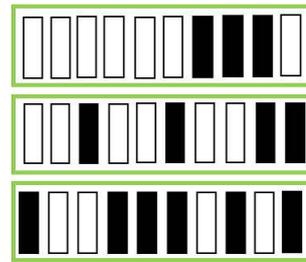


図1

従って、はじめから10マスで考えるのではなく、1マスのときは2通り、2マスのときは4通りというように順番に考えていき、分かったことを表にまとめることなどを手がかりにすれば、10マスのときも考えられる。そして、授業の最後で大きい値を考えるときに、小さい値から順に考えていき、規則を見つけていくことができるとまとめることができるのではないかと考えた。

2.3. 授業のねらい

今まで述べてきたことから、本教材のねらいを以下のようにした。

(a) 白と黒のマスのマスを使って何通りの表し方ができるのかを考える活動を通して、小さい値から順に考えていき、規則性に気づき、自分の考えをまとめることができる。

(b) 数学の実生活への有用性を感じることができ、数学への興味関心を高めることができる。
 (c) 白と黒だけで、何通りもの表し方ができると関心を持つことができる。

本授業で重点をおいたところは数学的な考え方や見方のよさと数学が生活に役立つことを伝えるということである。

(a) は数学的な見方や考え方の一つである「帰納的な考え方」のよさを伝えることを意図している。また、たった2色だけを使っただけで何通りもの表し方ができるということ、切符という日常生活のものを扱っていることから (b), (c) によって数学が役に立つことを伝えようとしている。

2.4. 授業の流れ

授業の詳しい計画は、指導案(文末資料1)で示したので、ここでは簡単に説明する。

(1) 実験

切符と使い捨てカイロを使って、切符の裏からバーコードが浮き出てくることを確かめる。このとき、生徒2人に実験を一緒に行ってもらおう。

(2) 実験の解説・課題設定

バーコードが日付や駅名、料金などを表わしていることを知る。2枚の写真(日付、駅名が同じで料金が違う)を比較し、どこが違うのか確認する。違うところが料金を表わしていることに気づく。ここで、料金を表わしている部分を白と黒を使って10マスで表わしている図を見て、料金によって表し方が変わることを確認する。そして、「白と黒のマスを10個使って、何通りの表し方ができるのかまとめよう」という課題を設定する。

(3) 個人追究

課題を聞いた後、解決できそうであればすぐに取りかかる。見通しが持てていない生徒は、教師の説明を聞く。図2のように1マスのときは2通り、2マスのときは4通りになるという説明を聞き、3マスのときから自分

で考える。自分で図をかいて何通りか確かめていく。求めた値を表1のようにまとめるよう促し、規則を見つけやすくする。そして、マスの数が1つ増えれば表し方の数が2倍になっているという規則を見つける。

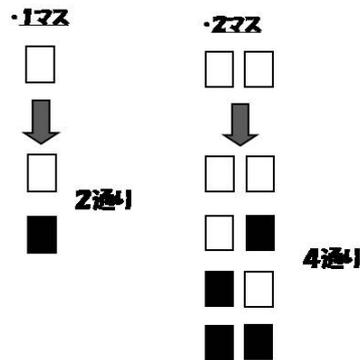


図 2

マスの数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
表し方	2	4	8							

表 1

(4) 全体交流・まとめ

個人追究したことを全体で交流する。2倍になっているという規則があることや10マスのとき1024通りになったことを確認する。本時の課題に対し、マスの数が10のときは、すぐに答えを求めることが困難なので、まず、マスの数が1, 2, 3のように小さい場合を考える。このように、問題を解決する際、小さい値から順に考えていき、規則を見つけるといった方法が有効である場合があると、まとめる。

3 実践結果

講座名: 「切符の裏の秘密を探ろう！」

場所: 岐阜県岐阜市立青山中学校

1回目 実施日: 平成20年12月1日(月)
第3校時

対象: 中学2年生(24名)

2回目 実施日: 平成20年12月12日(金)
第4校時

対象：中学2年生（19名）

通りあるかをもれなく数えていた。

授業は選択教科「数学」の時間であり、同じ授業を2回行った。

3.1 活動の様子

(1) 実験

2人の生徒を前に出して、教師とともに実験を行った。他の生徒を周りに集め、みんなに見えるようにした。切符の裏からバーコードが現れると、みんな驚いた様子だった。

(2) 実験の解説・課題設定

写真4のように、2枚の切符の写真を掲示して、比較し、「どこが違うか分かる？」と問いかけると、「下の列の真ん中が違う」とすぐに反応があった。

そのあと、料金を表わしている部分を抜き出した図（図1）で表したものを掲示した。課題設定に入るために、「全部のパターンを数えたら、いくつくらいあるだろう？」という問いかけをした。これに対し「50!」「100!」、「1万!」などの反応があった。



写真4

(3) 個人追究

課題を提示した後、見通しの持てない生徒のために、2マスまでの求め方を説明したところ、ほとんどの生徒がその説明を聞いていた。そして、説明を聞くことで、課題解決への見通しが持てたようであった。

生徒たちの学習プリントを一部紹介する。

・写真5の生徒は図を使って、5マスまで何

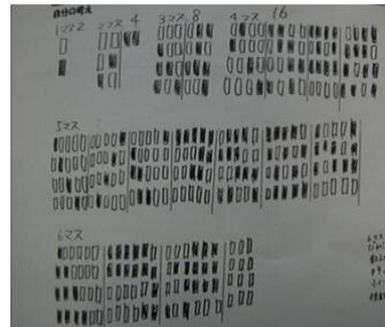


写真5

・写真6の生徒は4マスまでは数えて、値を表にまとめ、増え方の規則を見つけた。

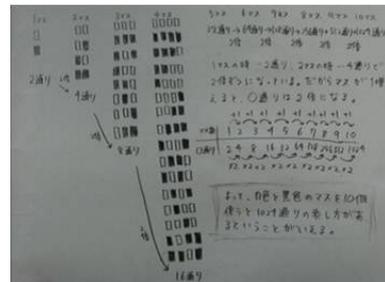


写真6

・写真7の生徒は、 n マスでは、どのように表わせるのかまで考えた。



写真7

(4) 全体交流・まとめ

1回目、2回目の授業ともほとんどの生徒が10マスのときの表し方の数を求め、表を使ってその理由を説明することができていた。

1回目の授業では2倍になる理由も次のように説明することができた。

「図のように、先頭が白と黒のグループでまとめてかく。2マスの場合は先頭の白と黒のそれぞれのマスの後ろに、1マスのときに表されたものがつく。このように、1マス前の表し方に白と黒を先頭につければ表し方はすべて求められるので、その数は2倍になる。」

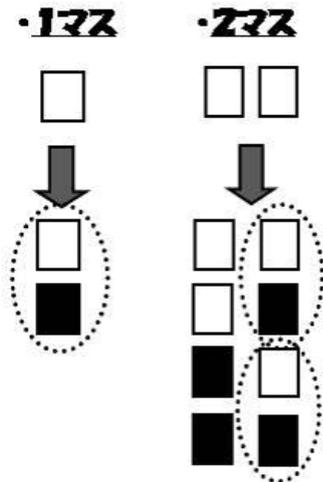


図3

4. 考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

(1)「白色と黒色のマスを10個使って何通りの表し方があるのでしょうか」という問題で、最初は何通りだと思いましたか？

- ・100通りだと思った。(15人)
- ・1000通りだと思った。(4人)
- ・1000通り以上(8人)
- ・500通り(2人)
- ・100通り未満(3人)
- ・その他(4人)

(2)この授業で学んだことの中で、これから数学を勉強する時に活かしていきたい考え方は何ですか？

- ・法則・規則性を見つけること。
- ・表や図を使って、分かりやすくすること。
- ・小さい数から考えれば、求めたい数も分

かること。

- ・分からない。

(3)授業で切符の秘密を知ってどう思いましたか？

- ・すごいと思った。驚いた。
- ・面白かった。楽しかった。
- ・何通りもあって大変だと思った。
- ・へえと思った。なるほどと思った。

(4)授業の感想を書いてください。

・考えたこともなかったことが分かってよかったし、楽しかった。

- ・楽しくできてよかった。

- ・分かりやすくおもしろかった。

・最初はバーコードなどの話で「全然数学と関係ない」と思っていたけど、ちゃんと数学だったし、すごく授業がおもしろかった。

・1マス増えただけで、とんでもなく増えてしまうのがおもしろかった。

・図や表などを書いて考えたので、すごく分かりやすかった。また、いろいろな通りを考えるのが楽しかった。

・はじめはやり方が分からなかったけど、調べたことを表にまとめたらだんだん分かってきて、最後には問題が解けたのでよかった。

・数学が苦手だったけど、解けたのでよかった。

- ・分からなかった。難しかった。

本授業のねらい(a),(b),(c)の達成度について考察する。

(a)について

課題追究に入ってから、すぐに全体に対し、1マスのときから考えるという求め方の方針を説明したため、10マスから考える生徒はいなかった。生徒の学習プリントを見ると、マスの数が1増えると表し方が2倍になっているという規則性については、ほとんどの生徒が気づくことができていた。しかし、アンケートの(2)の質問に対し、「規則を見つけること」、「表や図を使って分かりやすくするこ

と」という回答が多く、ねらいにある「小さい値から順に考えていく」という考え方を回答した生徒は少なかった。

(b) について

生徒の感想から、「最初は数学ではないと思ったけど、ちゃんと数学が使われていた。」などの言葉があったことから、実生活と数学が結びついているということを実感できたと考え。

(c) について

ほとんどの生徒が予想していたよりも多く表わすことができると実感していたようだ。アンケートの感想にも「1マス増えただけで、とんでもなく増えてしまうのがおもしろかった。」ということが書かれていた。こういった感想からも、たったの2色だけでもたくさんの表し方ができることに関心が持てたのではないかと考える。

5. 今後の課題

1つ目は、数学的なおもしろさが伝えきれていなかったということである。授業全体を通したら、実験もあり、切符の裏にはバーコードがあるということを知ることでもできて楽しかったようである。その一方、今回の授業では、「小さい値から順に考えていき、規

則を見つけることができる」という考え方のよさを伝えることをねらいの1つとしていたが、1マスから順に考えるという説明を先にしたため、生徒自らが解決する方法を考える時間がなかった。そのため、このねらいが達成できなかったと考えている。従って、生徒が問題を解く方針を考える時間を用意したよりよい授業にしていきたい。

2つ目は、切符の裏のバーコードについてもっと調べるということと、生徒がバーコードについて探究していける教材にしたいということである。さらに、場合の数や樹形図を学習した生徒を対象としたときに、どのような授業ができるのかも考えていきたい。

今回の教材開発をもとに、今後も算数・数学は楽しいと思える児童・生徒が増えるような教材を考えていきたい。

引用文献

- [1] 文部科学省, 2008, 中学校学習指導要領解説, 数学編, 教育出版株式会社
- [2] 同志社中学校, 面白授業紹介
<http://www.jhs.doshisha.ac.jp/manabi/barcode.html>
- [3] 二進法ってなーに?
<http://www2.odn.ne.jp/aai55890/nisinnsu.htm>

(資料1, 指導案)

過程	ねらい	学習活動	指導・援助																						
<p>導入</p> <p>展開</p> <p>まとめ</p>	<p>誰もが使ったことのある切符の裏から出てきたバーコードに興味を持つ。</p> <p>いくつかのバーコードの例を見てパターンの違いを理解する。</p> <p>課題を見て、どうしたらいいか見通しを持つことができる。</p> <p>簡単な場合を考えることで、この先がどのようなになるのか予想できる。</p> <p>少ない数のマスから順番に考え、規則性を見つけることができる。</p> <p>10マスのとき、何通りの表し方ができるのか求めることができる。</p>	<p>1. 切符の裏からバーコードが出てくることを確認する。切符を比較した写真を見て、料金を示している部分を把握する。</p> <p>2. いくつかの違うバーコードの図を見て、全パターンは何通りあるのか予想する。</p> <p>3. 課題について考える。</p> <div data-bbox="614 797 1182 931" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>学習課題 白色と黒色のマスを10個使って、何通りの表し方があるのかまとめよう。</p> </div> <p>4. 1マスのとき、2マスのとき、3マスのときと順番に考えていき、規則性を見つける。</p> <div data-bbox="630 1111 973 1370"> <p>1マス 2通り</p> <p>2マス 4通り</p> <p>3マス 8通り</p> <p>2倍</p> <p>2倍</p> </div> <p>表にして規則性を見つける。</p> <table border="1" data-bbox="624 1473 1209 1563"> <tr> <td>マスの数</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>表し方</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>5. 何通りの表し方があるのか求め、求め方もまとめる。</p> <p>6. まとめたことを発表する。</p> <div data-bbox="614 1720 1182 2056" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><全体交流></p> <p>まとめ</p> <ul style="list-style-type: none"> ・白色と黒色の2色だけで1024通りの表し方がある。 ・大きい値で考えるのが難しいとき、小さい値から順番に求めていき、規則性を見つけることで解決することができる。 </div>	マスの数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	表し方	2	4	8	16							<p>・比較したバーコードの写真を掲示し、どこが違うのかをはっきりさせる。</p> <p>・見通しが持てない生徒には、1マス、2マスのとき何通りになるのか説明し、3マスから自分で考えるように提示する。</p> <p>・規則性が見つからない生徒には、表をかくように促す。</p> <p>・規則性を見つけ、10マスのとき何通りかを求めた生徒には、2倍になる理由や100マスのときなどの一般化について考えさせる。</p>
マスの数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10															
表し方	2	4	8	16																					