岐阜数学教育研究
2008, Vol.7, 72-79

図形領域における数学的活動を取り入れた教材の開発と実践

竹内雅人[1]，愛木豊彦[2]

本年，学習指導要領が改定され，数学的活動が今までより一層重視されることになった。そこで本論文では,数学的活動の１つである,「数学を活用する活動」と位置づけられる授業案を開発することにした。その題材として選んだのは測量法の１つであるトラバース法である。ここでは，トラバース法について簡単に述べるとともに，授業案と実践の様子を紹介する。

＜キーワード＞数学を活用する活動，測量，トラバース法，相似

1. 序論

2008 年３月に公示された学習指導要領 [1] で示されている中学校数学科の目標は「数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに，数学的な活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。」である。また，数学的活動を１つの領域にするなど,「数学的活動」が前回の学習指導要領よりも重視されている。「数学的活動」の [1] による定義は,「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」であり，特に重視するのは「ア数や図形の性質などを見いだす活動，イ数学を活用する活動，ウ数学的に説明し伝え合う活動」であるとしている。

本論文では，この中のイに相当する数学的活動を含む授業案を開発することにした。その理由は，実践の場が，各務原市で開催される市内の参加を希望する中学生が学年を越えて集うノビルサー夏季講座だからである。もし，アをねらいとすると参加希望の学年が同じではないため，数学の既習内容が異なるので，性質を見いだす活動の設定が難しい。また，参加希望者が少ないので「説明し伝え合う活動」が効果的なものにならないと判断される。よって，ウをねらいとすることも難しい。以上の理由と，数学に対する有用性を感じている生徒が少ないという実態の克服も念頭におき，イの実現を目指す授業案の作成にとりかかることにした。そこで，題材に選んだのがトラバース法による面積測定である。次節以降で，トラバース法，授業の展開等について述べる。

2. トラバース法について

この節の内容は [2]，[3] を参考にしている。

2.1 トラバース法の概要

トラバース法は測量法の一つで，２地点 X, Y 間を折れ線（幾つかの線分）で結び，その線分１つ１つ（測線）の長さと，測線のなす角度を測ることで，X と Y の平面位置を決定する方法（図１）である。

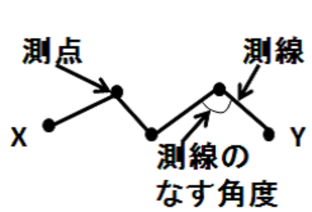


図１

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

ここでトラバースとは，幾つかの測線を連ねてできる折れ線状の図形を指す。この測量方法は，中規模以下の測量に適することなどを理由に，大縮図地形図作成，市街地測量などの基準点測量にしばしば適用されている。以下，今回の実践で取り上げる閉合トラバース法について説明する。閉合トラバース法とは，図２のように，トラバースの始点と終点が同じ点になるように測量する方法である。

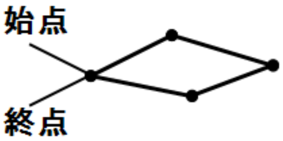


図２

2.2 トラバースの測角の測定

トラバース測量の測角の方法の１つである方向角法を紹介する。これは，図３のように全ての測点 P_i で，ある定まった方向（図３の場合Ｎ方向）から各測線 P_iP_{i+1} までの右回りの角度 α$_i$ を測定する方法である。

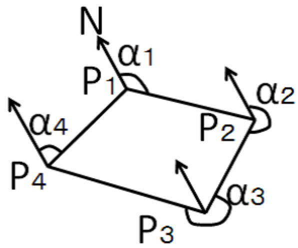


図３

2.3 閉トラバースの面積の計算

図２のような閉トラバースで囲まれた図形の面積を計算する方法について述べる。まず，平面上に角度を測定する際に用いたＮ方向を正の向きとする軸をひき，それを縦軸とする。次にこれと直交し，Ｎの向きを北方向としたとき，東の方向になる向きを正の向きとする軸を横軸とする。これら２つの軸の交点を原点とする座標平面（図４）を考える。閉トラバースの測点を $P_1, P_2, \cdots, P_n$ とする。点 P_r におけるＮ方向からの線分 P_rP_{r+1} までの右回りの角度を α$_r$ とする。また，l_r で線分 P_rP_{r+1} の長さを表すことにする。このとき，$L_r = l_r \cos$ α$_r$，$D_r = l_r \sin$ α$_r$ をそれぞれ，測線の緯距，経距という。α$_r$ のとりうる値の範囲は０ °以上360 °未満なので，緯距，経距はともに負の値をとりうる。以下，線分 AB の長さを $\overline{AB}$, 多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ の面積を $A_1A_2\cdots A_n$ で表すことにする。

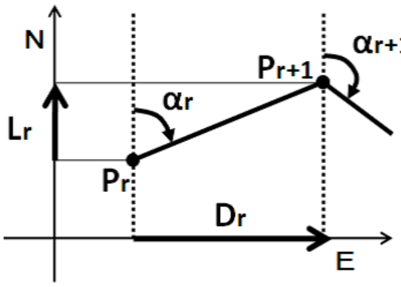


図４

次に，ここで定めた緯距，経距を用いて，閉トラバースで囲まれた図形の面積を求める。各測点 P_r の座標を $(x_r, y_r)(1 \leqq r \leqq n)$ とおく。P_r を縦軸へ射影した点を Q_r とすると，$1 \leqq r \leqq n-1$ のとき P_rP_{r+1} の中点と縦軸との距離 M_r は，

$$M_r = \frac{1}{2}(\overline{P_rQ_r} + \overline{P_{r+1}Q_{r+1}}) = \frac{x_r + x_{r+1}}{2}$$

となる（図５）。また，$r = n$ のとき，P_nP_1 の中点と縦軸との距離 M_n は，

$$M_n = \frac{x_n + x_1}{2}$$

となる。

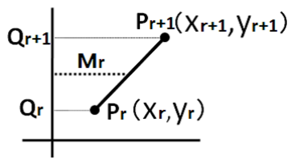


図５

このとき，トラバース $P_1P_2\cdots P_n$ の面積 A_n が

$$A_n = -\sum_{r=1}^{n} M_r L_r (n \geqq 3)$$

となることを数学的帰納法を用いて証明する。

i）$n=3$ のとき

図6のようなトラバース $P_1P_2P_3$ を考える。この面積を A_3 とすると，台形の面積を求める公式より，

$$\begin{aligned}A_3 &= P_2P_3Q_3Q_2 + P_3P_1Q_1Q_3 - P_2P_1Q_1Q_2\\&= \tfrac{\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}}{2}\times\overline{Q_2Q_3} + \tfrac{\overline{P_3Q_3}+\overline{P_1Q_1}}{2}\times\overline{Q_3Q_1}\\&\quad -\tfrac{\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}}{2}\times\overline{Q_1Q_2}\\&= \tfrac{x_2+x_3}{2}\times(y_2-y_3) + \tfrac{x_3+x_1}{2}\times(y_3-y_1)\\&\quad -\tfrac{x_1+x_2}{2}\times(y_2-y_1)\end{aligned}$$

ここで第 r 測線の緯距は $L_r = y_{r+1} - y_r$ なので，

$$\begin{aligned}A_3 &= M_2(-L_2) + M_3(-L_3) - M_1(L_1)\\&= -(M_1L_1 + M_2L_2 + M_3L_3)\\&= -\sum_{r=1}^{3} M_r L_r\end{aligned}$$

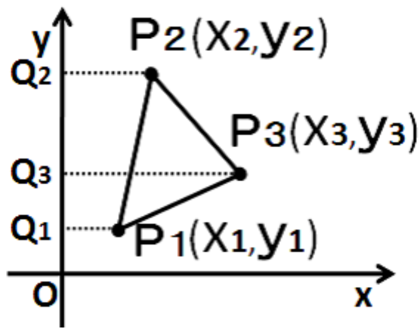


図6

ii）$n=k$ のとき $(k \geqq 3)$

トラバース $P_1P_2\cdots P_k$ の面積を A_k としたとき

$A_k = -\sum_{r=1}^{k} M_r L_r$ と仮定する。

図7のように測点 P_{k+1} をおくと，トラバース $P_1P_2\cdots P_kP_{k+1}$ の面積 A_{k+1} は $A_{k+1} = A_k + P_1P_kP_{k+1}$ と表せる。よって，仮定より

$$\begin{aligned}A_{k+1} &= A_k + P_kP_{k+1}Q_{k+1}Q_k\\&\quad + P_1P_kQ_kQ_1 - P_1P_{k+1}Q_{k+1}Q_1\\&= A_k + \tfrac{\overline{P_kQ_k}+\overline{P_{k+1}Q_{k+1}}}{2}\times\overline{Q_kQ_{k+1}}\\&\quad + \tfrac{\overline{P_1Q_1}+\overline{P_kQ_k}}{2}\times\overline{Q_1Q_k}\\&\quad - \tfrac{\overline{P_{k+1}Q_{k+1}}+\overline{P_1Q_1}}{2}\times\overline{Q_{k+1}Q_1}\\&= A_k + \tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\times(y_k-y_{k+1}) + \tfrac{x_1+x_k}{2}\\&\quad \times(y_1-y_k) - \tfrac{x_{k+1}+x_1}{2}\times(y_1-y_{k+1})\\&= A_k + M_k(-L_k) + M_kL_k - M_{k+1}L_{k+1}\\&= A_k - M_{k+1}L_{k+1}\\&= -\sum_{r=1}^{k+1} M_r L_r\end{aligned}$$

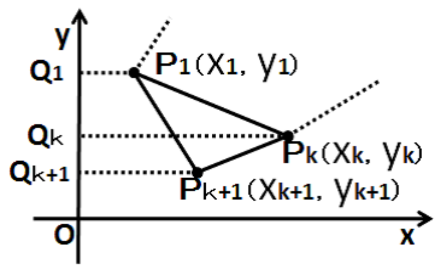


図7

i），ii）より，トラバース $P_1P_2\cdots P_n$ の面積 A_n は

$$A_n = -\sum_{r=1}^{n} M_r L_r$$

で求められる。さらに，$1 \leqq r \leqq n-1$ のとき $D_r = x_{r+1} - x_r$ なので，

$$D_1 + \cdots + D_r = x_{r+1} - x_1$$

従って，$x_{r+1} = D_1 + \cdots + D_r + x_1$

$x_r = D_1 + \cdots + D_{r-1} + x_1$

より，$M_r = \frac{1}{2}(x_r + x_{r+1})$

$= D_1 + \cdots + D_{r-1} + x_1 + \frac{1}{2}D_r$

また，$D_n = x_1 - x_n$ なので，

$$M_n = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{x_1 + x_1 - D_n}{2} = x_1 - \frac{1}{2}D_n$$

となり，A_n を x_1，緯距と経距で表すことができる。

2.4 測定における注意事項

[2]，[3] で示されているトラバース法を用いる際の注意点を以下にまとめる。

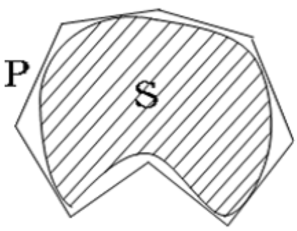
- 隣り合うトラバース測点間の距離，すなわち辺長は，その長短がはげしいと誤差発生の原因になる。したがって辺長は，大差がないのが望ましい。
- 測定精度を高めるために，測点数は少ない方がよい。
- 普通は 100m ぐらいの辺長が用いられる。また，いかに辺長が短くても 10m 以下にすべきではない。
- 閉トラバースによって区切られる面積は，50,000m^2 ぐらいが適当である。

3. 授業の概要

3.1 トラバース法の改良

第２節で紹介した方法や注意点に忠実に従うと，中学生にとって未習である三角関数を扱うこと，計測に膨大な労力がかかることを考慮し，トラバース法の手順を以下のように変更した。

1. 下図のように，面積を求める図形Ｓを等辺多角形Ｐで囲む。



2. 多角形 P の各頂点の角度（内角）を測る。
3. 測定した角度の合計と，多角形の内角の和との差を求める。
4. 角度の誤差を，測定した各角度に割り振り，多角形の内角の和との差を 0 にする。
5. 割り振りした後の角度から等辺多角形 P の縮図を方眼紙に描く。
6. ５で描いた等辺多角形の面積を求める。
7. ６で求めた面積をもとに，相似比を用いて, 等辺多角形 P の面積を求める。この値を，図形 S の面積の近似値とする。

3.2 授業の展開

この測量を題材として，１日の授業の流れを以下のように設定した。
午前：トラバース法を紹介した後，その方法で写真１のようなブルーシートの面積を求める。このブルーシートは，市販のもの（約 3m ×約 5m）を，はさみで適当に切ったものである。これを長さ 90cm の木の棒で周りを囲む。

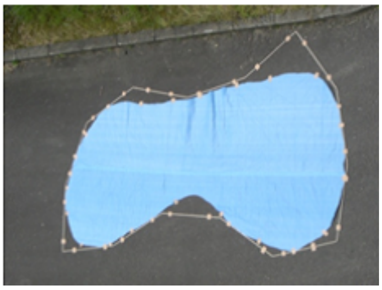


写真１

午後: トラバース法以外の方法で，ブルーシートの面積を求める。

ブルーシートを素材として選んだのは，重さを測ったり，切ったりなど面積を求める方法がいくつか考えられるからである。また，このような授業展開にしたのは，以下の４つの理由からである。

- トラバース法を中学生が思いつくような授業展開にするのは難しいと判断した。
- 測量の活動の中で，多角形の内角の和，比，相似（縮図）などの既習事項が活用できる。
- 午後の活動では，自分達のアイディアを自由に試すことができるので，そこで自主的な活動になりうる。

- 午前中の活動だけでは，トラバース法で求めた面積の値がどの程度正確なのか判断できない。そこで，同じブルーシートの面積をトラバース法以外の方法で求め，結果を比べることで，トラバース法の正しさを理解することができる。

午前の活動では，木の棒など必要なものはすべて授業者から生徒に渡すのに対して，午後の活動では，会場の一部に秤など必要と思われるものをおき，生徒はそれらをみて，自分の発想で面積を求めるという展開にした。午後の活動で，面積を求める方法として想定していたのは，以下の6つである。

(a) 新聞紙，またはそれを切ったものでブルーシートを覆い，覆った新聞紙の面積を求める。

(b) 午前中は，長さ 90cm の棒で囲むため，囲んだ多角形とブルーシートとはずれが大きい。そこで，ストローで囲み，より誤差が小さいと考えられる多角形の面積を求める。

(b) はトラバース法であるが，子どもが午前中よりも，より正確と思われる面積を求めようとするのではと考え，これが実行できるよう準備した。

(c) ブルーシートを三角形等，公式で面積が求められる図形に分割し，それらを合計する。

(d) ブルーシートを長方形で囲み，ブルーシートとの間にできた隙間の部分の面積を,長方形の面積から引く。

(e) ブルーシートの重さを用いる。

(f) 高いところからブルーシートの写真を撮り，それを印刷する。その印刷されたものの面積を求めることで，ブルーシートの面積を求める。

ここで，現行の学習指導要領においては，相似な図形の面積比を扱っていないことに注意しなければならない。従って，縮図から元の図形の面積を求める際に次のように考えるよう指導した。

・方眼紙にかいた図形の面積を求めた後，方眼紙上の 1cm に対応するもとの図形での長さを求める。

・これから，方眼紙上の 1cm^2 に対応するもとの図形での面積を求める。

3.3 授業のねらい

ここまで述べたことを踏まえ，授業のねらいを以下の２点にした。

1. トラバース法を理解し，面積を求める活動を通して，多角形の内角の和の公式など既習事項を活用できる。
2. ブルーシートの面積をいろいろな方法で調べることで，多様な考え方があることを知る。

4. 活動結果

以下の通りに実践を行った。

場所：岐阜県各務原市立中央小学校

日程：平成２０年８月６日，７日

対象：各務原市内の中学生４人

4.1 トラバース法でブルーシートの面積を求める

トラバース法についてプリントを用いて説明した後，棒（90cm）で図形を囲むように指示した。しかし，その指示通りでは，棒を図形のぎりぎりにおくことが難しいときもある。そこで，ある生徒は，すべての棒を外側におくのではなく，一部の棒をブルーシートの上におくことで，より正確な値を求めようと工夫していた (写真２)。さらにこの生徒は，棒と棒の端をガムテープで固定し (写真３)，分度器で角度が測りやすくなるようにした。その結果，測定した角度の合計と，多角形の内角の和との誤差が０ °になった。

写真２

写真３

また，方眼紙上にかいた多角形の縮図の面積を求める際，多角形を三角形に分割したり(写真４), 多角形に完全に含まれている $1cm^2$ のマスを数え，$1cm^2$ に満たない部分は，それらを足して $1cm^2$ とみなす方法(写真５) を使ったりするなどいろいろな工夫が見られた。

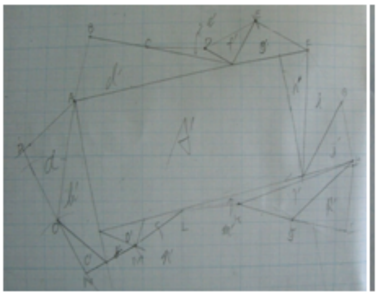


写真４

写真５

4.2 いろいろな方法で面積を求める

面積を求める方法として想定していた６つのうち，(f) 以外の５つの方法が実際に用いられた。その様子を紹介する。

(a) 生徒Ａは，ブルーシートの上に新聞紙を敷き詰める方法で面積を求めた (写真６)。その過程でブルーシートを完全に覆うために新聞紙を１枚ずつおいていくと，はみ出る部分ができてしまう。そこで生徒Ａは，新聞紙を 1/2，1/4…と順に小さく切っていき，はみ出すことなくきれいに敷き詰めることができた。

写真６

(b) 生徒Ｂは，午前中よりも正確にブルーシートの面積をトラバース法で求めようと，木の棒（90cm）の代わりにストロー（18.5cm）を使った。写真７のようにストローを用いることで，ブルーシートの形とほとんど変わらない多角形を作ることができている。しかし，この方法は使用する材料がストローであるために角度が測りにくいことや，できた多角形が 75 角形になってしまい，角の数が多いので，誤差が大きくなるなどの問題が生じ，縮図を描くことができなかった。トラバース法を参考にした [4] にも,「角はどんなに多くなっても 25 個ぐらいまでがよい。」と記述がある。

写真７

(c) 生徒Cは，ブルーシートを木の棒やビニールテープを用いて三角形のような公式で面積が求められる図形に分割し，そのそれぞれの面積を求めた。そして，それらを合計し，ブルーシートの面積を求めた (写真８)。

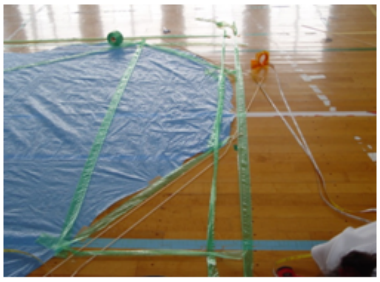


写真８

(d) 生徒Dは，写真９のようにブルーシートを長方形で囲み，長方形とブルーシートとの間にできた隙間の部分の面積を，三角形や台形に分割して求め，それを引くことによって，面積を求めた。

写真９

(e) ブルーシートを長方形で囲む方法をとった生徒Dは，予定よりも早く測定作業が終わったので，電子秤を用いてブルーシートの重さから面積を求めた。写真１０は，ブルーシートから一辺が３ cm の正方形を切り取っている様子を撮影したものである。この正方形に切り取った部分の重さと，ブルーシート全体の重さを測定し，重さの比からブルーシート全体の面積を求めた。

写真１０

4.3 トラバース法（午前）とそれ以外の方法（午後）で測定した面積の比較

	午前	午後 (測定方法)
生徒Ａ	12.9m^2	11.5m^2(a)
生徒Ｂ	13.3m^2	測定結果無し (b)
生徒Ｃ	12.3m^2	10.2m^2(c)
生徒Ｄ	12.6m^2	11.3m^2(d)

5. 考察

（１）生徒の感想

以下に生徒の感想をまとめておく。

- 曲線だけど円ではない図を，トラバース法によってそれに近い面積を求めることができた。
- トラバース法を用いることで，全体がどんな形なのか正確ではないけど見ることができる。
- 方眼紙に多角形の縮図をかくのが楽しかった。

（２）ねらいの達成度について

ねらい (1)

ほとんどの生徒が，多角形の内角の和の公式を活用できていたし，それを忘れてしまった生徒も，多角形を三角形に分割することで，多角形の内角の和を調べることができていた。また，4.1 節で紹介したように，既習事項を活用して，様々な方法で縮図の面積を求めることができていたので，このねらいは十分達成できたといえる。

ねらい (2)

１日目の最後に，各自の方法を全体に紹介する予定だったのだが，時間が足りなくなったので，全体で交流することができなかった。従って，多様な考えがあることが理解できていないので，このねらいを達成することはできなかったと判断した。

6. 今後の反省と課題

本実践の反省点は，ねらい２が達成できなかったことである。他の人が考えた方法を知ることは，自分の考えをさらに膨らませることにつながるので，今後の授業では，他の生徒と交流する機会をより大事にしていきたい。

今回中学生を対象にした実践で，普段の授業では経験できないような，身の回りにある図形の面積を求める活動に，生徒は強い興味と関心をもつことが分かった。今後は，基本図形の面積の公式を学習した小学生を対象に，このような内容をもつ授業の開発を進めていきたい。

引用文献

[1] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領（平成 20 年 9 月）解説ー数学編ー.

[2] 春日屋伸昌，1962，トラバース測量，森北出版株式会社.

[3] 米谷榮二校閲，森忠次著，1979，測量学（１基礎編），丸善株式会社.

[4] 兼杉博，1970，測量公式活用ポケットブック，オーム社.