岐阜数学教育研究
2008, Vol.7, 48-59

高校生を対象とした2次曲線を題材とする教材の開発と実践

岡田真子[1]，愛木豊彦[2]

「放物面で太陽の光を集めると焦点に光が集まり発火させることができる」ということはよく知られているが，このことを数式で示したり，実際に試したりしたことのある生徒は少ないと考え，このことを題材とする授業案を開発した。本稿では，放物線の焦点の性質を証明するために必要な学習内容を整理した後，実験方法を説明する。そして，2008年8月に実施した高校数学セミナーの内容を紹介し，生徒の様子やアンケートをもとに実践結果を考察する。

＜キーワード＞　放物面，焦点，光の反射，発火，線対称，正接

1．はじめに

放物面は衛星放送の電波を受信するアンテナや，今年開催されたオリンピックにおいては聖火を採火するときの凹面鏡などに用いられる。これらは，放物線の焦点の性質 $(*)$「放物面の回転軸に平行に進んできた光が，この面上の1点で反射すると必ず焦点と呼ばれる決まった1点を通る。」を利用したものである。このように身の回りのものにも使われている放物線に関する学習内容を次に示す。

中学3年　関数 $y = ax^2$ のグラフ
数学I　2次関数とグラフ，2次不等式
数学C　2次曲線

現在，使用されている教科書を2種類([1],[2])調べたところ，コラムの話題として焦点の性質 $(*)$ を紹介している程度であった。第2節で示すように，焦点の性質 $(*)$ が成り立つことを示すには，接線，垂直な2直線の関係，線対称，正接及びその加法定理など，高校で学習する重要な事項をいくつも必要とする。従って，高校で学習する内容の関連を感じ，また実用的な面もあるので，学習することの意義を理解できるのではと考え，このことを題材とする授業案を開発することにした。

また，愛木・久保田 [3] で指摘しているように実験や工作などものを作ることを授業の出口とすると，高校生が対象であったとしても，目的がはっきりし学習意欲が高まる，楽しんで授業を受けられるなどの学習効果が期待できる。特に，実験で起こる現象を数学を用いて証明することで，数学が実際の現象の解明をすることができるという有用性を体感できる点からも有意義であると考えた。

以上より，岐阜県教育委員会主催の岐阜県の高校生 (中学生を含む) を集めて開かれる高校数学セミナーにおいてこの授業案を実践することにした。また，この授業における目標を「放物線の焦点の性質を数学的に証明し，それを実験で確かめること」とした。

参加する生徒は自ら望んで本セミナーに申し込んでいるので，受け身的な授業よりも自主的に学習が進められるような配慮を授業の展開に取り込んだ。まず，証明で必要とする内容を既習の生徒とそうでない生徒が混在しているので，そのどちらの生徒も各自のペースで学習できるようテキストを作成した。テキストの内容については，第2.3節で詳述する。また，放物面の作成においても生徒の自由な

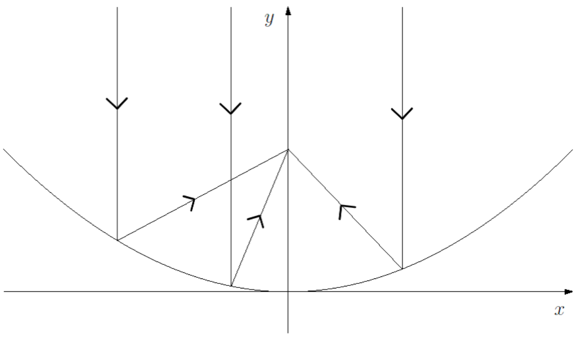
[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

発想で各々の放物面を完成させ，実験を行ってもらおうと考え，作り方の詳しい説明をせずに生徒の考えに委ねるような展開にした。

2．教材について

2.1　焦点の性質

まず，焦点の性質 $(*)$ が成り立つことを数学的に証明する (グラフ 1)。



グラフ 1

ここで重要なのは，光が反射する際，入射角と反射角が等しいという法則を用いることである。これをふまえ，焦点の性質 $(*)$ を数学的に表現すると次のようになる。

「放物線 C: $y = ax^2$ と直線 $k : x = p$ の交点を P とする。C の P における接線を ℓ とし，P を通り ℓ に垂直な直線を h とする。h に対して k と対称な直線を m とすると，直線 m は，p の値によらずある定点を通る。」

このことを 2 通りの方法で証明する。

まず ℓ の方程式を求める (グラフ 2)。$y = ax^2$ を微分すると $y' = 2ax$ であり，P(p, ap^2) で接するので，ℓ の方程式は $y = 2ap(x - p) + ap^2$ と表せ，

$$y = 2apx - ap^2$$

これより，$p \neq 0$ とすると h の方程式は $y = -\frac{1}{2ap}(x - p) + ap^2$ と表せるので，

$$y = -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2$$

m 上の任意の点を Q(q, r)，それと h に関して対称な k 上の点を R(p, s) とおくと，直線 QR は ℓ と平行なので，$\frac{r-s}{q-p} = 2ap$ より

$$s = r - 2apq + 2ap^2 \qquad (1)$$

Q,R の中点 $(\frac{q+p}{2}, \frac{r+s}{2})$ が h 上にあるので

$$\frac{r+s}{2} = -\frac{1}{2ap}\frac{q+p}{2} + \frac{1}{2a} + ap^2 \qquad (2)$$

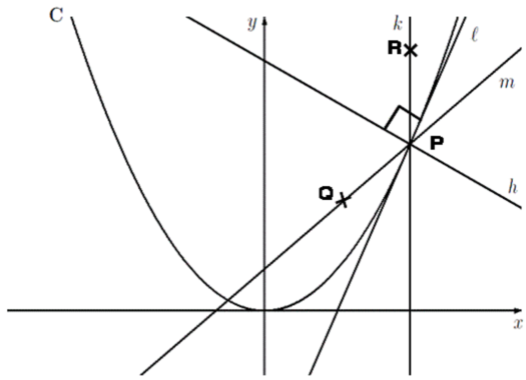
(2) に (1) を代入すると $4apr = (4a^2p^2 - 1)q + ap$,

$r = \frac{4a^2p^2-1}{4ap}q + \frac{1}{4a}$ となる。よって，m の方程式は

$$y = \frac{4a^2p^2 - 1}{4ap}x + \frac{1}{4a}$$

次に $p = 0$ の場合を考える。接線 ℓ の方程式は $y = 0$ となり，直線 h は直線 k と一致する。よって，直線 m の方程式は $x = 0$ となる。

従って，直線 m は全ての p の値に対して $(0, \frac{1}{4a})$ を通る。 $\square$



グラフ 2

次に，正接を用いた証明を紹介する。

ℓ の方程式を上と同様に求め，

$$y = 2apx - ap^2$$

ここで，x 軸と ℓ とのなす角 θ とすると $\tan\theta = 2ap$

となる。まず，$\theta \neq 0$，つまり，$\tan\theta \neq 0$ の場合を考える。x 軸と m，ℓ，k の交点をそれぞれ X,Y,Z(グラフ 3) とすると，対頂角の性質と k と m が h に関して線対称なことから

$\angle$ XPY$=\angle$ YPZ$=90^\circ-\theta$
よって，

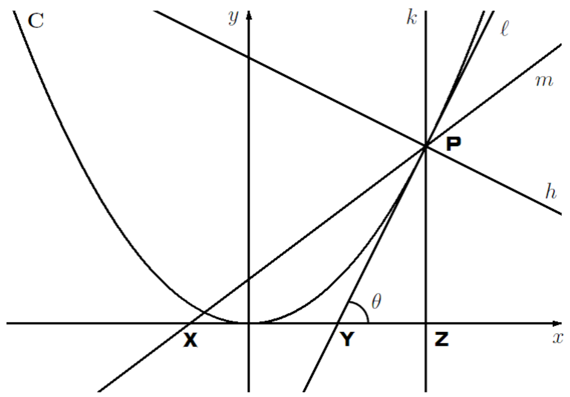
$$\begin{aligned}\angle \mathrm{PXY} &= 180^\circ-\angle \mathrm{XPY}-\angle \mathrm{XYP}\\ &= 180^\circ-(90^\circ-\theta)-(180^\circ-\theta)\\ &= \theta-90^\circ\end{aligned}$$

従って，$\tan(2\theta-90^\circ)=-\frac{1}{\tan 2\theta}=-\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$，$\tan\theta=2ap$ より，m の傾きが $\tan(2\theta-90^\circ)$ なので，m の方程式は $y=\frac{4a^2p^2-1}{4ap}(x-p)+ap^2$

$$\text{よって } y=\frac{4a^2p^2-1}{4ap}x+\frac{1}{4a} \text{ となる。}$$

$\theta=0$ つまり，$\tan\theta=0$ の場合を考える。上と同様に求め，直線 m の方程式は $x=0$ となる。

以上より，直線 m は全ての p の値に対して $(0,\frac{1}{4a})$ を通る。 □



グラフ3

2.2 放物面の作り方

「放物面鏡の発火実験」[4] を参考に予備実験を何度か行い，以下のように放物面鏡を作成すれば発火実験が成功することがわかった。

まず，工作用紙に定義域が正の部分の $y=ax^2$ のグラフをかく。x,y ともに単位を cm とすると a の値は $\frac{1}{20}$，定義域は $0\leq x\leq 15$ が適当であった。これを切り取り，同じものを36枚作る。土台となる板 (例えば，発泡スチロールボード) に，これらを 10° おきに放射状に貼りつける。ここでは，貼りやすいように分度器をコピーしたものを用いている (写真1)。

写真1

次に，並べて立てた放物線の型の上にアルミニウム箔をかぶせるように貼り，仮の曲面を作る。そして，その上からアルミテープを隙間なく貼っていき，なめらかに曲面を作る (写真2)。その中心に竹串を刺し，焦点の位置には黒く塗ったフラッシュコットンをつけた (写真3)。このとき，竹串は放物面の回転軸になっている。

写真2

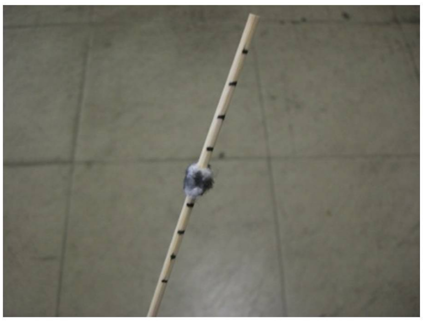


写真3

フラッシュコットンとは，発火温度の低い手品用品である。日差しの強い昼間に実験を行うと 1 秒ほどで発火した。発火させるものとして，新聞紙なども試したが，煙が出るだけで火がつかなかった。また，放物面をきれいに作ればマッチでも火がついたが，いずれにしても発火させようとするものを黒く塗ることが重要である。

また，実験上の留意点として放物面の回転軸となっている竹串を太陽の光と平行にする必要がある。光が進んでいる方向は目で確認できないため，光が作る影を利用した。土台となる板に垂直に棒を立て，その影ができないように傾けると，太陽の光と放物面の軸とを平行にすることができる。板の裏から釘を刺し，板と釘が垂直になるようにし (写真 2, 丸囲み) た。安全のため，先端の尖った部分にはストローをさしておくと良い。

2.3　テキスト

第 1 節で述べた本セミナー用のテキストを，高校で使用されている教科書 [5] を参考にして 2 つ作成した。

1 つ目のテキストの構成は次の通りである。

1. 焦点の性質　証明する命題の紹介
2. 点と直線　中点の座標や 2 点間の距離
3. 放物線と直線の共有点　接線の方程式
4. 2 直線の関係　垂直であるときそれぞれの傾きをかけると -1 になること，線対称な直線の方程式
5. 焦点の性質の証明 (1)　線対称を用いた証明

このテキストでは，既に習っている公式や性質であっても，まず具体的な数値を代入することで，結果を推測したり証明の手がかりとなるよう問題の出し方を工夫した。

2 つ目のテキストの構成は次の通りである。

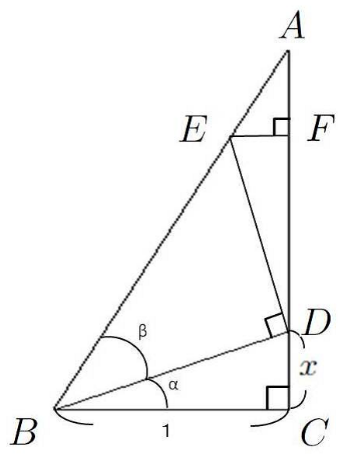
1. 正接　定義と具体的な数値計算
2. $(90^\circ-\theta)$ の三角比　$\tan\theta$ と $\tan(90^\circ-\theta)$ の関係式
3. 三角比の拡張　単位円を用いた 0° 以上 180° 以下の角まで拡張，また，負の角への拡張
4. 正接の性質　図を用いた正接の 2 倍角の定理，加法定理の証明
5. 焦点の性質の証明 (2)　正接の性質を用いた命題の証明

このテキストでは，三角比，三角関数を学習していない生徒も解答できるように，正弦, 余弦を用いない方法で問題を作成した。つまり，正接だけを扱い，必要な学習ができるようにした。4. 正接の性質で取り上げた正接の 2 倍角や加法定理の証明は，数学 II の教科書 [5] では，正弦・余弦の加法定理を用いて証明している。本テキストでは図を用いて，三平方の定理や三角形の相似等，中学校までの既習事項から導くようにした。そこで正接の加法定理の証明を次のような問題にした。

「問　$\tan\alpha = x$,$\tan\beta = y$ とするとき，$\tan(\alpha+\beta)$ を x, y を用いて表せ。」

ここで，証明をいくつか紹介する。

(1)



三平方の定理より

$BD=\sqrt{1+x^2}$，$ED=y\sqrt{1+x^2}$

$\angle EDF=\alpha$ より $\frac{EF}{FD}=\tan\alpha$ なので $EF=xFD$

三平方の定理より

$y^2(1+x^2)=FD^2+x^2FD^2 \therefore FD=y$

$\triangle ABC \backsim \triangle AEF$，$AF=AC-y-x$ より

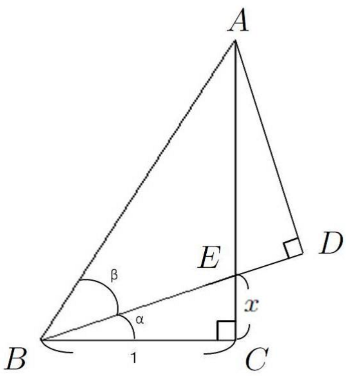
$1:EF=AC:AF$ となる。従って，$AC=$

$\frac{x+y}{1-xy}$,
$AC = \tan(\alpha+\beta)$ より，

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

□

(2)



$BE = \sqrt{1+x^2}$，$\frac{AD}{BD} = \tan\beta$ より
$AD = yBD = y(ED + \sqrt{1+x^2})$
ここで，$\angle EAD = \alpha$ より $\frac{ED}{AD} = \tan\alpha$ なので
$ED = xAD = xy(ED + \sqrt{1+x^2})$

$$\text{よって}, ED = \frac{xy\sqrt{1+x^2}}{1-xy}$$

また $AE = AC - x$，$\triangle EBC \backsim \triangle EAD$ より $BC : BE = AD : AE$，従って $AC = \frac{x+y}{1-xy}$
$AC = \tan(\alpha+\beta)$ より，

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

□

3．授業実践について

3.1　授業のねらい

「証明」と「実験」をキーワードにした授業案におけるねらいを次の４つにした。

(A) **放物線の性質について理解し，証明することができる。**

(B) **計算で求めた焦点の位置を実験によって明らかにする。**

(C) **放物面の作成や実験で問題解決能力を養う。**

(D) **証明を通して学習内容の関連を実感することができる。**

3.2 実践方法

主　催　：岐阜県教育委員会
場　所　：岐阜大学教育学部
日　程　：平成 20 年 8 月 2 日，3 日の 2 日間
対象生徒：中学校 3 年生～高校 2 年生
　　　　　1 日目 (28 人)，2 日目 (29 人)
教材名「It’s　焦　time.」
授業の展開

１日目の目標を前節で紹介した２つの方法で焦点の性質 $(*)$ を証明することとした。第 2.3 節で示したテキストを用い，生徒が各自のペースで学習を進める。既習の内容に差があるので 2，3 人の生徒に，指導補助として大学生を１人配置した。

２日目は，3～4 人の１グループで協力して放物面を作った。放物面を作る材料として準備したものは以下の通りである。

工作用紙・カラーボード・段ボール・発泡スチロール $(20\times20\times5)$・針金・アルミニウム箔・アルミテープ・新聞紙・セロテープ・ガムテープ・ボンド・竹ひご・釘

また，発火させるものとしてフラッシュコットン・マッチ・漫画雑誌を用意した。他に道具として，電卓・コンパス・ものさし・さしがね・自在定規・分度器・カッター・はさみ・発泡スチロールカッター・カラーペン・サングラス・温度計を用意した。

第 2.2 節に紹介した方法で放物面を作れば確実に発火するが，今回はねらい (C) にもあるように自分で創意工夫することで，問題解決能力を養うことを目的としているので，作り方を説明せずに自由に作ることにした。また，同様の理由により，放物面を作った後に行う実験の目的・方法もすべて生徒に任せることにした。

3.3 生徒の様子

1つ目のテキストでは，特に4. 2直線の関係 (資料1) に大半の生徒が時間をかけて取り組んでいた。生徒は三平方の定理 (写真4左) や，直角三角形の合同 (写真4右) を用いる方法で証明していた。

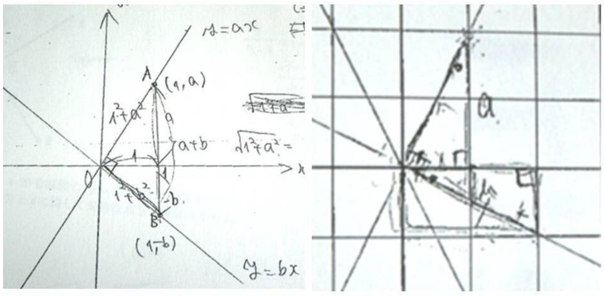


写真4

2つ目のテキストでは，正接の2倍角の定理，加法定理 (資料2) についてじっくり考え，いろいろな見方で証明をしていた。生徒の解答を紹介する (写真5)。

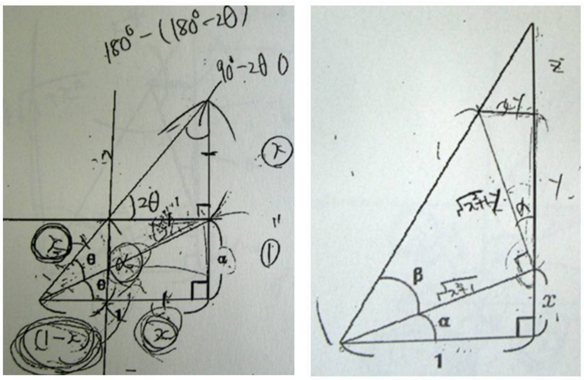


写真5

また，2. $(90° - \theta)$ の三角比では，$\tan\theta$ と $\tan(90° - \theta)$ の関係式を考えるときに

$$\tan\theta = -\frac{1}{\tan(90° - \theta)}$$

の公式を導くだけでなく，1つ目のテキストの4. 2直線の関係で証明した「垂直であるときそれぞれの傾きをかけると -1 になること」との関連を実感している生徒が多かった。

1日目は，テキストの問題を難しいと感じた生徒が多く，最後まで解答できなかった生徒は40 %弱いた。そのため，解き方がわかっても数値として焦点の座標 $(0, \frac{1}{4a})$ を自力で求められなかった生徒がいた。

2日目の放物面の作成では，周りの囲いを先に作り，橋をかけるようにアルミテープを貼るグループがいた (写真6)。この面で実験をしたところ，発火しなかった。そこで，この場合は，懸垂線であり放物線ではないことを説明し，別の作り方を考えるように指示した。

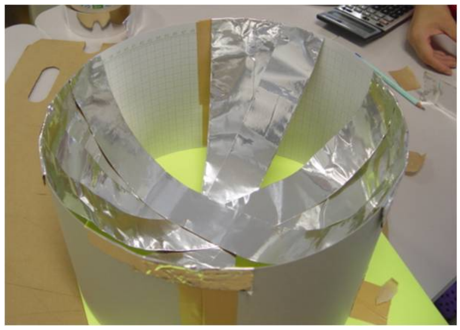


写真6

ほとんどのグループは放物線が回転してできていることに着目し，同じ型の放物線 (定義域が正のみの半分のグラフ) をいくつも作り放射状に並べていたが，定義域を正負両方で描いたグラフから放物面の土台を作ろうと考えたグループは，台にグラフの型を固定するときに中心部分で重なり合うため正確に作成することが難しいようであった。

1つのグループを除いて発火実験は，成功した。このように発火させることができたグループは，自らが考えたテーマで実験結果をレポートとしてまとめた (資料3)。発火させることができなかったグループも，放物面は完成させていた。全体を通して，生徒の自由な発想がそのまま反映され，授業者にとっても新鮮な反応を得ることができた。特に，予備実験の段階では気づかなかったことを生徒

の実験から学ぶことができた。それは，アルミテープの貼り方である。底面に平行な方向に円を描くようにアルミテープを貼っていくと曲面に凹凸ができやすく，焦点に光を集めにくいことがわかった。同じ放物面でも，中心に向かってアルミテープを貼り直せば発火した。

4．アンケート結果と考察

「計算や証明のなかで印象に残ったことは何ですか？」という質問に対して,「垂直に交わる 2 つの直線の傾きの積が -1 になる証明」という意見が 17 %程あり，普段使っている公式を改めて証明することは高校生にとって新鮮な経験なのだと感じた。

(1) 授業のねらい (A) について

「放物線の性質について理解できましたか？」の質問に対して 100 %の生徒が理解できたと回答し,「2 つの証明方法は理解できましたか？」の質問に対して 90 %の生徒が理解できたと回答している。よって，このねらいは達成できたと考える。

(2) 授業のねらい (B) について

実験レポートの考察で「焦点の位置しか光っていなかった」「焦点が一番温度が高くなる」「計算でだした光の集まる位置より少しでもずらすと火がつかなかった。」等の意見が生徒から出た。この結果から，このねらいも達成できたと考える。

(3) 授業のねらい (C) について

作り方や材料の使い方はグループによって異なり，出来映えも違う。放物線が回転してできていることに着目した生徒は同じ放物線のグラフを作り，それらを放射状に並べていた。しかし，先に回りの囲いから作り，その囲いに橋をたくさんかけるようにして曲面を作ろうとするグループもあった。この作り方では放物面ができないことに気づき，試行錯誤する姿が見られた。作った全ての放物面で発火実験が成功したわけではないが，作り方の方針を立て放物面の完成に近づけることができた。よって，このねらいは達成できたと考える。

(4) 授業のねらい (D) について

「計算や証明のなかで印象に残ったことは何ですか？」という質問に対して「垂直に交わる 2 つの直線の傾きの積が -1 になることとタンジェントの $(90^\circ - \theta)$ がつながったところ」等，内容の関連について記述した生徒が 18 %程いた。しかし,「日頃使っている公式などを証明することが難しかったこと」や「ある直線について対称という新しい考え方」等,一つ一つの問題が印象に残った生徒が半数を占めていた。よって，ねらいである学習内容の関連を実感できたとは言い難い。

ねらい (A)〜(D) とは別に,「実験で心に残ったことは何ですか?」と質問したところ,「計算で求めた焦点が本当にそこだ！ということがわかったところです。」など実際に焦点で発火させることができたことを回答している生徒が 62 %程おり，1 日目 (証明) と 2 日目 (実験) のつながりを感じてもらえたと考える。温度計を使い，焦点の温度が何度まで上昇するのか実験したグループの結果では，200 度を超え満足する生徒の姿が見られた (写真 7)。さらに，色による発火点の違いを調べたり，フラッシュコットン以外の物を燃やそうと実験するグループがあり，自分で調べようとする意欲が感じられた。

写真 7

5．今後の課題

「どちらの証明が好きですか？」という質問に対して半数が線対称と回答している。その理由の一つに，2 つ目のテキストであるタンジェントを用いる証明までできなかったことが挙げられる。「タンジェントの方は図形的な見方をしているので，発想が必要だと思った。線対称の方は計算が多くて大変だったけど，わりとみつけやすい。」という感想もあり，生徒にとっては，順に計算をして式を求めていく方がわかりやすかったのだと感じた。2 つ目のテキストまで完答できた生徒からは「図形を使う証明はたくさんの方法があっておもしろいと思った。」や「1 つの事に関して，たくさんの証明法があり，それを考えるのが楽しかった。」等の感想を得られた。三角関数などまだ学習していない生徒には大学生が指導するようにはなっていたが，より時間をかけて丁寧に指導する必要があったのではないかと感じた。一方，正接を使う証明は流れは全く違うが，同じ命題を証明するので，2 つの証明につながりを見つけられる場面がある。今回も，違う内容を学習しているようで，実は同じところにつながっているという経験をすることができた。このようなつながりが印象に残るような授業展開にしたい。そのため，テキストの内容構成を見直し，より関連を実感できるように指導したい。

また 2 日目は，放物面の作り方を提示せず生徒に 1 から考えさせるという展開にしたことで，生徒からは「放物面作りは，特に説明がない中で作っただけに，いろいろ発見があっておもしろかった。」「放物面を作るときに説明するのではなく，自分たちの発想で作らせるのがよかった。」という感想が得られたが，時間が足りず十分に実験ができなかったグループもあった。作り方を提示し，実験に重点を置いた展開ではどのような結果が得られたのかを考え，今後の課題としたい。

最後に,「算数・数学と結び付けてものを作ること」を題材にした教材をいろいろなレベルで開発していくことは可能であると考える。従って，今後は小学生や中学生などでも実践できるように教材開発もしていきたい。

引用文献

[1] 梅垣壽春・大矢雅則ほか 10 名，2000，探究　数学 I・C，数研出版

[2] 飯高茂・松本幸夫ほか 22 名，2005，数学 I・C，東京書籍

[3] 久保田滝敏・愛木豊彦，2007，数学と物理学を結ぶ授業の提案と実践～ベクトルを題材とする実験を取り入れた授業～，岐阜数学教育研究第 6 号，33-50

[4] 放物面鏡の発火実験，グラフ電卓の授業，T＾3 ナッシュビル（2003 年 3 月）から

http://www.asahi-net.or.jp/~jz4k-ktok/parabola/parabola.html

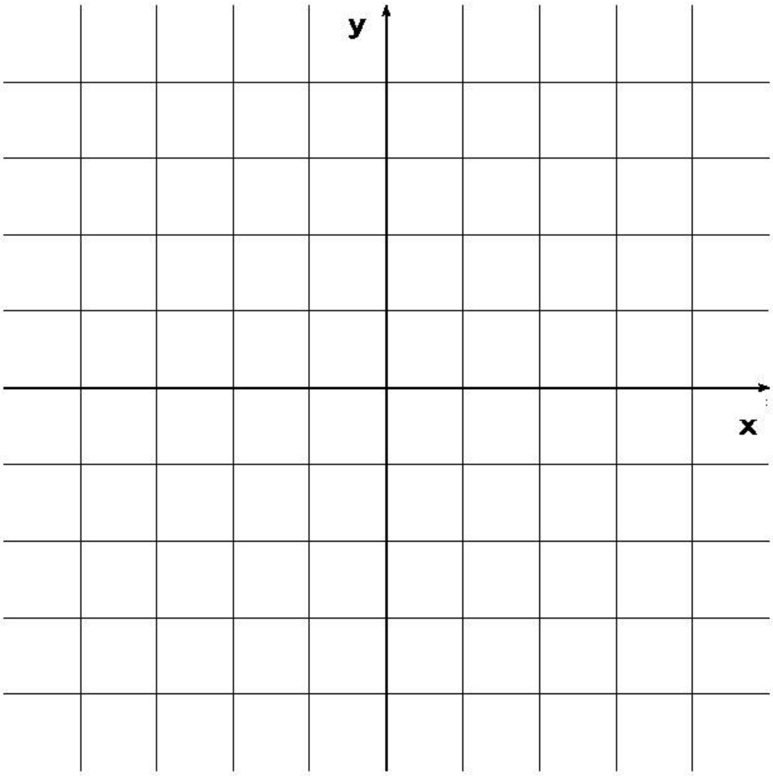
[5] 大島利雄・加藤順二ほか 12 名，2003，数学 I・II・C，数研出版

資料 1

問　次の直線と垂直に交わる直線のうち，原点を通るものを求めよ。

(1)$y = 2x$

(2)$y = -3x$



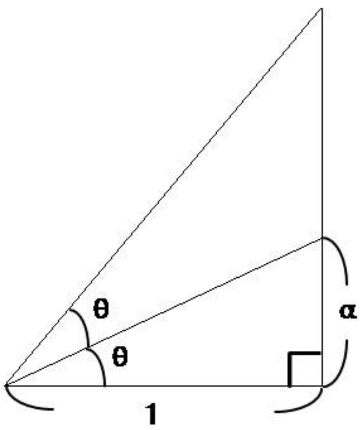
2 直線 (A),(B) が垂直であるとき a, b にどんな関係があるか，予想してみよう。

予想が正しいことを証明しよう。

資料 2

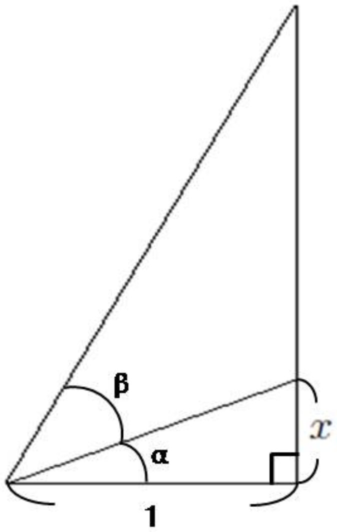
問　2 倍角

$\tan\theta = \alpha$ とするとき，$\tan 2\theta$ を α を用いて表せ。



問　加法定理

$\tan\alpha = x$,$\tan\beta = y$ とするとき，$\tan(\alpha+\beta)$ を x, y を用いて表せ。



資料 3

実験レポート

目的

実験方法

結果

考察

感想