岐阜数学教育研究
2007,Vol. 6, 95-106

数学的な見方や考え方を養う教材開発とその実践

岡田真子[1]，愛木豊彦[1]

数学的な見方や考え方は，現実の諸問題をいろいろな視点で見たり，与えられた条件の中で解決したりする場面で人が自然に用いている思考法ではないだろうか。現代の学校教育において「生きる力」の育成は大きなテーマであり，それは数学教育でも同じである。数学の授業で養われる数学的な見方や考え方は，社会での「生きる力」の基盤になっていくのではないかと考える。そこで，子どもにとって興味深いゲームである 15 ゲームを内容とする，数学的な見方や考え方を養う教材開発を行った。本論文では，その教材及び実践内容を報告する。
＜キーワード＞数学的な見方や考え方，単純化，15 ゲーム，順列

1. はじめに

数学的な見方や考え方のよさを知ることは，平成元年に改訂された学習指導要領における数学科の目標の一つである。[1,2] によると，「数学的な見方や考え方のよさ」は知識として覚えさせるのではなく，よさを味わうことを通して，数学の学習意欲をもたせることが重要なねらいである。よさを味わわせるためには，数学的な見方や考え方によって能率的に処理できるようになったり，簡潔に表現できるようになったりしたことを振り返ってみせることが大切である。また，よさを感じさせるためには，事象の中に法則を見つけて事がらの性質を明らかにしたり，具体的な操作や実験を通して帰納したりするなど，数学を活かして使う経験をすることが必要である。

平成 15 年度教育課程実施状況調査 [3] における評価の観点別に通過率と設定通過率を比較すると，3 学年ともに「数学的な見方や考え方」の観点の問題は，設定通過率を下回る問題が他の観点より多い傾向が見られた。またＯＥＣＤ生徒の学習到達度調査（ＰＩＳＡ）2003 年のアンケート調査 [4] では,「数学を日常生活にどう応用できるか考えている」と答えた生徒はわずか 12.5 %で，平均の 53 %にはるか及ばなかったと報告されている（表１）。

これらの状況を踏まえ,「数学的な見方や考え方」を育成するための研究と実践を一層進めていかなければならない。そこで，数学的な見方や考え方の一つである単純化を扱うことのできる授業案を開発することにした。単純化とは，問題を解決するとき，本質的条件や一般性を損なわないように幾つかの条件を無視し，簡単な場合に置き直して考えることである ([5])。例えば，大きい数や，小数，分数などを含んだ文章題や，条件が幾つもある問題を考えたとする。その問題において数量関係が数の大きさや条件の多さにまどわされて分かりにくいときに，難しいところ（例えば数値や条件が複雑であること）をはっきりさせ，その数値を簡単な整数に置き換えたり，条件を１つずつ考えたり，というような考え方のことである。つまり，問題の条件が複雑になり難しく感じるときでも，既習の条件に帰着して考えられるようにすることはとても大切であり，必要な思考法である。そこで，一般性を失わないように幾つかの条件を一時無視して，簡単な基本的な場合に直して考えられるようにし，また，この思考法で解決できたことを振り返り，よさを実感できるように

[1]岐阜大学教育学部

したい。

以上をふまえて，事象を単純化することで規則が見つけやすくなる経験を通して数学的な見方や考え方を養う教材を開発した。

区分		問題数	設定通過率との比較		
			上回る	同程度	下回る
第一学年	数学への関心・意欲・態度	14	2	3	9
	数学的な見方や考え方	20	3	7	10
	数学的な表現・処理	32	9	8	15
	数量，図形などについての知識・理解	17	6	5	6
第二学年	数学への関心・意欲・態度	12	1	4	7
	数学的な見方や考え方	25	3	9	13
	数学的な表現・処理	26	8	10	8
	数量，図形などについての知識・理解	14	3	4	7
第三学年	数学への関心・意欲・態度	14	1	6	7
	数学的な見方や考え方	26	4	11	11
	数学的な表現・処理	21	8	8	5
	数量，図形などについての知識・理解	15	4	3	8

表 1

2. 教材について

教材として選んだのは 15 ゲームと呼ばれるパズルのようなゲームである。

2.1　教材の背景

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

図 1

15 ゲームは，1878 年にアメリカのサム・ロイドが考案したもので日本へも輸入され，流行を極めた。地元岐阜県の誇る世界的な数学者高木貞治の著書「数学小景」[6] の中でも”15 の駒遊び”として紹介されている。このゲームの内容は次の通りである。まず，四角い小箱に 1 から 16 までの番号がついた駒が並べてある。16 番目の駒を箱から出してしまうと空所が生じるから，そこへ隣の駒をずらして入れることができる。そのようにして 15 の駒の位置が変えられる。始めに 15 の駒を任意の順序に入れて置いて，駒を左右または上下にずらして，正しい順序（図 1 のような配列，以下，基本配列とよぶ。）にすることができるか，というものである。

高木は，このゲームがどの場合に基本配列にすることができ，どの場合に基本配列にすることができないのかを，順列や行列，置換などの考えを用いて解決している。ここでは，その証明をもとに，より一般的な場合について考察する。

2.1.1　用語の定義

まず，いくつかの用語の定義をする。このゲームを図 2 のように $m \times n$ の型で定義する。ただし $m, n \geqq 2$ とする。そして，これを $(mn-1)$ ゲームということにする。

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\cdots$	$x_{1,m-1}$	$x_{1,m}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\cdots$	$x_{2,m-1}$	$x_{2,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{n,1}$	$x_{n,2}$	$\cdots$	$x_{n,m-1}$	／

図 2

図３のように列，行を定義する。

第1列	第2列	…	第m列

第１行
第２行
・・・
第n行

図３(1)　(2)

列というのは上下の筋で，列の番号は左から数える。また，行というのは左右の筋で，行の番号は上から数えることとする。以下，第i行，第j列の位置を(i,j)と表す。

なお，ゲームにおける配列で，次の図4,5のような並び方を畸形と呼ぶことにする。
ただし，

$$x_{i,j}=m(i-1)+j \quad 1\leqq i\leqq n, 1\leqq j\leqq m$$

とする。
$m\geqq 2, n=2$のとき

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$
⋮	⋮
$x_{m-1,1}$	$x_{m,1}$
$x_{m-1,2}$	／

図４

$m\geqq 2, n\geqq 3$のとき

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	…	$x_{1,n-2}$	$x_{1,n-1}$	$x_{1,n}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	…	$x_{2,n-2}$	$x_{2,n-1}$	$x_{2,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	…	$x_{m,n-1}$	$x_{m,n-2}$	／

図５

次に，順列，転倒などを定義する。n個の異なる数を１列に並べたものを順列という。いま，n個の整数$1,2,\cdots,n$からつくられる順列を

$$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$$

で表わす。そのとき，このような順列の個数は全部で$n!$個である。このうち，特に

$$(1,2,\cdots,n)$$

のように，小さい方から順に数が並んでいるものを基本順列という。順列$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$は，基本順列$(1,2,\cdots,n)$の各数を並べ変えて得られたもので，１番目に数p_1が，２番目にp_2が，…，n番目に数p_nがきたものとみなせる。いま，順列$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$を基本順列$(1,2,\cdots,n)$と比べるとき，２つの数，たとえばi番目にある数p_iとｊ番目にある数p_jの間で，数の大きさが逆転していれば，すなわち

$$i<j \quad で \quad p_i>p_j$$

となっていれば，p_iとp_jに転倒があるといい，順列$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$における転倒の総数をこの順列の転倒数とよぶ。つまり，順列において，p_1より右側にあり，p_1より小さい数の個数をN_{p_1}とし，一般にp_kより右側にあり，p_kより小さい数の個数をN_{p_k}とすると，転倒数Nは

$$N=\sum_{k=1}^{n}N_{p_k}$$

とかける([7])。

順列$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$の転倒数が偶数のとき，その順列を偶順列といい，転倒数が奇数のとき，奇順列という。基本順列も１つの順列であるが，それに転倒はない。従って，転倒数は0である。0も偶数なので，それも偶順列である。

ゲームの途中に生じる$(mn-1)$個の駒の配列を，左から右へ，上から下への順に，空所は飛ばして，一直線に並べて書くと，そこに１つの順列が生じる。例えば，15ゲームにお

いて図 6 の配列を順列として書けば，次のようになる。

7	3	2	9
11	／	1	5
4	15	6	13
10	12	14	8

図 6

$$(7, 3, 2, 9, 11, 1, 5, 4, 15, 6, 13, 10, 12, 14, 8)$$

この中の転倒を左から順に数えていけば (＊) のようになる。

$6+2+1+5+6+0+0+1+0+6+0+3+1+1+1+0$　(＊)

転倒数が奇数か偶数かを知るには，これらの中に奇数がいくつあるかを見ればよい。今，奇数は 7 つあるから，この順列は奇順列である。また，図 4,5 の畸形配列から生じる順列では，転倒は $x_{m,n-1}$ から生じる 1 つだけだから，これも奇順列である。

また，順列を 2 つの数の入れ替えによって基本順列に並びかえる操作をする。このときの入れ替えた回数の総数を入れ替え数とよぶことにする。

2.1.2　基本的な性質

ここでは，$(mn-1)$ ゲームがどのようなときに基本順列にすることができて，どのようなときにできないのかを示す。そのためにいくつかの性質を準備する。

性質 2.1([6])　空所を盤上の任意の位置へ移すことができる。

（証明）　空所の隣（左，右または上，下）の駒をずらして空所へ入れれば，空所は隣へ移せるからである。 □

性質 2.2([6])　指定された 1 つの駒を，指定された 1 つの位置へ移すことができる。

（証明）　指定された駒の隣へ空所をもってきて，その駒を空所へ入れれば，駒は隣へ移るから，隣から隣へと移動して，ついに，指定の位置へ移る。 □

性質 2.3([6])　駒が始めにどのような順序に配列されてあったとしても，それを基本配列または，畸形配列に直すことができる。

（証明）　(i)$m \geqq 2, n \geqq 3$ のとき
性質 2.2 より，1 の駒が始めにどこにあったとしても，それを正しい位置に移すことができる。1 の駒が正しい位置 $(1,1)$ に据わったとする。次に，$m \geqq 3$ ならば 1 の駒を動かさないで，2 の駒を正しい位置 $(1,2)$ にもってくることができる。なぜなら，もしも 2 の駒が第 2 列にないならば，2 の駒を第 2 列へもってくることはできるが，そのとき第 1 列を使わないで，つまり第 1 列以外の第 2 列から第 m 列までを使い（もちろん空所もその範囲内へ移して）2 の駒を正しい位置 $(1,2)$ に移すことができる。それは 1 の駒を正しい位置に移したのと同様の方法でできる。

再び，$m \geqq 2$ とする。同様の方法で，第 1 行をそろえていく。$1, 2, \cdots, m-2$ の駒に触れないで，$m-1$ の駒を正しい位置に移すことはできるが，そのとき，$1, 2, \cdots, m-1$ の駒を動かさないで，m の駒を正しい位置へ入れることはできない。それは第 m 列が右の端であって，今までと同様な操作をする余地がないからである。しかし，m の駒を $(2,m)$ の位置にもってくることはできる。そうしておいて，今度は第 $m-1$ 列，第 m 列だけを使って，$m-1, m$ の駒を正しい位置に入れることを試みる。その際，空所は図 7(1) に示す位置にあるとしてよい。そこへ空所をもってくることはできる。空所は b，または c のところにあっても同じことである。まず，4 つの駒を右回りに順送りにずらして，(2) のようにする。次に a を左へずらして，その跡へ m を入れると，(3) のようになる。これで $m-1, m$ の駒が第 m 列で上下に並んだから，5 つの駒を前とは反対の方向 (左回り) に順送りにずらせば (4) のように，$m-1, m$ の駒が正しい位

置へくる。もしも c を上げれば，空所も始めのところへくる。

	$m-1$	a
	b	m
	c	／

図 7(1)

	b	$m-1$
	／	a
	c	m

(2)

	b	$m-1$
	a	m
	c	／

(3)

	$m-1$	m
	b	／
	a	c

(4)

これで第 1 行はできた。次に第 2 行以下において，同様の方法で $m+1, m+2, \cdots, 2m$ の駒を正しい位置に移す。そのとき $2m-1, 2m$ の駒を入れるには，前に $m-1, m$ の駒を入れたときと同じ方法を第 $m-1$ 列，第 m 列の下の 3 行で行うのである。これを繰り返す。

第 $n-1$ 行以下では，この操作はできないが，縦と横を換えて行えば，$(n-1,1)$ の位置に $m(n-2)+1$ の駒を，$(n,1)$ の位置に $m(n-1)+1$ の駒を入れることができる。次に $(n-1,2)$ の位置に $m(n-2)+2$ の駒を，$(n,2)$ の位置に $m(n-1)+2$ の駒を入れることができ，正しい順序で入れられる。これを繰り返す。そうすると，$m(n-1)-1, m(n-1), mn-1$ の駒が，それぞれ $(n-1,m-1), (n-1,m), (n,m-1)$ の位置に残るが，それらを順送りにずらせば $(n-1,m-1)$ の位置に $m(n-1)-1$ の駒を入れることができる。そのとき同時に $(n-1,m)$ の位置に $m(n-1)$ の駒が，$(n,m-1)$ の位置に $(mn-1)$ の駒が入ればよいが，あるいは図 8 のようになることもあって，$mn-1$ の駒と $m(n-1)$ の駒が入れ代わりになる。

	$m(n-1)-2$	$m(n-1)-1$	$mn-1$
	$mn-2$	$m(n-1)$	／

図 8

さらに，図 9 の (1) から (4) の手順で $mn-2$ と $mn-1$ とだけが入れ代わった形，つまり畸形配列になる。

	$m(n-1)-1$	$mn-1$	／
	$m(n-1)-2$	$mn-2$	$m(n-1)$

図 9(1)

	$m(n-1)-1$	／	$m(n-1)$
	$m(n-1)-2$	$mn-1$	$mn-2$

(2)

	$m(n-1)-2$	$m(n-1)-1$	$m(n-1)$
	／	$mn-1$	$mn-2$

(3)

	$m(n-1)-2$	$m(n-1)-1$	$m(n-1)$
	$mn-1$	$mn-2$	／

(4)

(ii)$m \geq 3, n \geq 2$ のとき

縦と横を入れ替えて (i) でやったのと同様に操作する。

(iii) $m = n = 2$ のとき

考えられる配列は，図 10 に示す 6 通りである。前節で定義したように (1) が基本配列，(2) が畸形配列である。

1	2
3	／

図 10(1)

1	3
2	／

(2)

2	3
1	／

(3)

2	1
3	／

(4)

3	1
2	／

(5)

3	2
1	／

(6)

駒を順送りにすれば，(3) と (5) は基本配列にすることができ，(4) と (6) は畸形配列にすることができる。

以上より，駒が始めにどのような順序に配列されてあったとしても，それを基本配列または，畸形配列に直すことができる。 □

性質 2.4([8])　順列において隣り合う 2 つの数を入れ替えると，転倒数の増減は 1 だけである。つまり，偶順列は奇順列になり，奇順列は偶順列になる。

（証明）　まず，転倒数が r の順列 $(p_1, \cdots, p_i, p_{i+1}, \cdots, p_n)$ において p_i と p_{i+1} を入れ替えた順列の転倒数を考える。

p_i と p_{i+1} を入れ替えた順列 $(p_1, \cdots, p_{i+1}, p_i, \cdots, p_n)$ において，$p_i < p_{i+1}$ ならば転倒数の変化は，N_{p_i} が 1 増加するだけである。よって，転倒数は $r+1$ となる。$p_i > p_{i+1}$ ならば，$N_{p_{i+1}}$ が 1 減少するだけである。よって，転倒数は $r-1$ となる。

以上より，順列において隣り合う 2 つの数を入れ替えると，転倒数は ± 1 だけ変化する。つまり，偶順列は奇順列になり，奇順列は偶順列になる。 □

ここで，ゲームの規定に従って駒をずらすとき，順列の偶，奇の種類にどのような影響があるかをみていく。

性質 2.5([6])　駒を左右にずらしても，配列から生じる順列の偶奇の種類は変わらない。

（証明）　これは明らかである。 □

性質 2.6([6])　駒を上下へずらすと，m が奇数の場合は配列から生じる順列の偶奇の種類は変わらず，m が偶数の場合はその順列の偶奇の種類が変わる。

（証明）　駒を上下にずらすとき，配列に変化が生じるのは 2 行分である。よって，図 11(1) のように，(i, j) の位置にある駒を a とし，これをその上の空所へずらし，(2) のようにすることを考える。

$x_{i-1,1}$	$\cdots$	／	$\cdots$	$x_{i-1,m}$
$x_{i,1}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$x_{i,m}$

図 11(1)

$x_{i-1,1}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$x_{i-1,m}$
$x_{i,1}$	$\cdots$	／	$\cdots$	$x_{i,m}$

(2)

(1) の配列から生じる順列は

$$(x_{i-1,1}, \cdots, x_{i,j-1}, a, x_{i,j+1}, \cdots, x_{i,m})$$

であり，(2) の配列から生じる順列は

$$(x_{i-1,1}, \cdots, x_{i-1,j-1}, a, x_{i-1,j+1}, \cdots, x_{i,m})$$

である。即ち a の駒が $m-1$ 個の駒を飛び越すのである。このために生じる転倒数の変化を，次のように考える。

$$(1)(x_{i-1,1}, \cdots, x_{i,j-1}, a, x_{i,j+1}, \cdots, x_{i,m})$$

$$(1_1)(x_{i-1,1}, \cdots, x_{i,j-2}, a, x_{i,j-1}, x_{i,j+1}, \cdots, x_{i,m})$$

$$\vdots$$

$$(1_{m-2})(x_{i-1,1}, \cdots, x_{i-1,j-1}, x_{i-1,j+1}, a, \cdots, x_{i,j-1}, x_{i,j+1}, \cdots, x_{i,m})$$

$$(1_{m-1})(x_{i-1,1}, \cdots, x_{i-1,j-1}, a, x_{i-1,j+1}, \cdots, x_{i,j-1}, x_{i,j+1}, \cdots, x_{i,m})$$

(1) の a が $x_{i,j-1}$ と入れ換わって (1_1) を生じ，(1_1) の a が $x_{i,j-2}$ と入れ換わって (1_2) が生じる。これを $m-2$ 回繰り返すと (1_{m-2}) が生じる。次に，a と $x_{i-1,j+1}$ を入れ換えると (1_{m-1}) を得る。これは (2) の配列から生じる順列と同じである。即ち a が一度に $x_{i-1,j+1}, \cdots, x_{i,j-1}$ を飛び越す代りに，$x_{i,j-1}, \cdots, x_{i-1,j+1}$ を 1 つずつ $m-1$ 回飛び越すのである。もちろん $(1_1), (1_2), \cdots, (1_{m-1})$ のような順列が盤面に生じるのではない。(1_1) と (1_{m-1}) との間における転倒数を比較する為に，仲介

として $(1_1),(1_2),\cdots,(1_{m-1})$ を用いるのである。性質 2.4 より，(1) から $(1_1),(1_1)$ から $(1_2),\cdots,(1_{m-2})$ から (1_{m-1}) へ $m-1$ 回移る毎に，順列の種類が変わる。

(i)m が奇数の場合

$m-1$ は偶数である。つまり，順列の偶奇の種類は偶数回変わる。従って，(1),(2) の配列から生じる順列の偶奇の種類は同じである。

以上より，1 つの駒を上の空所へずらしても順列の偶奇の種類は変わらない。

(ii)m が偶数の場合

$m-1$ は奇数である。つまり，順列の偶奇の種類は奇数回変わる。従って，(1),(2) の配列から生じる順列の偶奇の種類は変わる。

以上より，1 つの駒を上の空所へずらすとき順列の偶奇の種類は変わる。

１つの駒を下の空所へずらすときも同様である。 □

性質 2.7([6]) 空所を (n,m) の位置にしてゲームを始め，何回か駒を動かした後，再度 (n,m) の位置に空所をもってくる。このとき，配列から生じる順列の偶奇の種類は，始めたときと同じである。

（証明） 駒を何回か動かした後，再度 (n,m) の位置に空所をもってくるので，空所は上へ移った回数だけは，下に移ったことになる。空所が上下に移動する回数と駒が上下に移動した回数は同じであるので，m が奇数の場合は，性質 2.6 より，配列から生じる順列の偶奇の種類は同じである。m が偶数の場合は，性質 2.6 より，順列の種類は偶数回変わったことになる。よって，配列から生じる順列の偶奇の種類は同じである。

以上より，始めたときと順列は同種類であるといえる。 □

定理 2.1 配列から生じる順列が，偶順列ならば，基本配列にできるが，奇順列ならば，畸形配列にしかならない。

（証明） 性質 2.3 より，始めに駒がどのように配列されてあったとしても，それを基本配列あるいは畸形配列にすることができる。明らかに空所の位置は，(n,m) である。性質 2.7 より，始めの配列から生じる順列が偶順列ならば，偶順列である基本配列にすることができる。また，始めの配列から生じる順列が奇順列であるならば，奇順列である畸形配列にしかならない。 □

さらに，転倒数と，入れ換え数とでは，その偶奇が一致することを示す。

性質 2.8([8])

順列 $(p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_j,\cdots,p_n)$ が偶（奇）順列ならば，p_i と p_j を入れ換えた順列 $(p_1,\cdots,p_j,\cdots,p_i,\cdots,p_n)$ は奇（偶）順列である。

（証明） $i<j$ とする。はじめに，p_i と隣り合う数を入れ換えることを考える。p_i と p_{i+1} を入れ換えると，順列は $(p_1,\cdots,p_{i+1},p_i,p_{i+2},\cdots,p_j,\cdots,p_n)$ となる。次に p_i と p_{i+2} を入れ換えると，順列は $(p_1,\cdots,p_{i+1},p_{i+2},p_i,\cdots,p_j,\cdots,p_n)$ となる。

このように $j-i$ 回入れ換えると，順列は $(p_1,\cdots,p_{i+1},p_{i+2},\cdots,p_{j-1},p_j,p_i,\cdots,p_n)\cdots$ ①

となる。さらに，この順列において，p_j と左に隣り合う数を入れ換えることを考える。まず p_j と p_{j-1} を入れ換えると，順列は $(p_1,\cdots,p_{i+1},p_{i+2},\cdots,p_j,p_{j-1},p_i,\cdots,p_n)$ となる。次に p_j と p_{j-2} を入れ換えると，順列は $(p_1,\cdots,p_{i+1},p_{i+2},\cdots,p_j,p_{j-2},p_{j-1},p_i,\cdots,p_n)$ となる。

このように，①の状態から $(j-i-1)$ 回入れ換えると，順列は

$$(p_1,\cdots,p_j,p_{i+1},p_{i+2},\cdots,p_{j-i-1},p_i,\cdots,p_n)$$

となる。以上より，p_i と p_j を入れ換えた順列 $(p_1,\cdots,p_j,\cdots,p_i,\cdots,p_n)$ がえられた。隣り合う 2 つの数を入れ換えた回数は $(j-i)+$

$(j-i)-1 = 2(j-i)-1$ となり，奇数である。従って，性質 2.4 より，順列の偶奇が変わる。つまり，順列 $(p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_j, \cdots, p_n)$ が偶（奇）順列ならば，p_i と p_j を入れ換えた順列 $(p_1, \cdots, p_j, \cdots, p_i, \cdots, p_n)$ は奇（偶）順列である。□

定理 2.2　配列から生じる順列の入れ換え数が偶数ならば基本配列にすることができ，奇数ならばできない。

（証明）　性質 2.8 より，配列から生じる順列において入れ換え数が奇数回ならゲームの始めと終わりで順列の種類が変わり，偶数回ならば同じである。つまり，入れ換えの回数が偶数回ならば偶順列である基本配列に直すことができ，奇数回ならばできない。□

この定理 2.2 を用いて，授業では並べられた数を，入れ換え数に着目して考察するように指導した。

2.2　授業の概要

今回の授業実践では，15 ゲームを一回り小さくした 8 ゲーム $(m = n = 3)$ を取り上げる。ゲーム内容は，3×3 の四角い枠の中に 1 から 8 までの数字が書かれた駒と 1 箇所の空所があり，任意に並べられた状態から空所を利用してスライドさせ 1 から順になるように並び換えていくものである。15 ゲームと同様に図 12 のような配列を基本配列とよぶことにする。

1	2	3
4	5	6
7	8	／

図 12

授業では，スライドさせて基本配列にすることができたとき，ゲームの結果を○とした。先ほど述べたようにどんなにスライドさせても畸形配列にしかならない場合がある。そのような並び方をしたものを授業では×とした。この授業においては，駒を動かさずに最初の並び方から○か×か，を判断できるようになることを目標とした。そのために○や×の駒の並び方の規則性について考察していく。

今回大切にしたい考え方は，1 節でも述べた「単純化」，つまり「本質的条件を損なわないようにある条件を無視し，簡単な場合に置き直して考える」ということである。しかし，ほとんどの生徒が初めて体験するゲームなので，その形を簡単な形に置きなおすという発想に至ることは困難であると考えた。そこで，簡単な形として 2×3 の型を与え，その結果をまとめた表から規則を見つけることを授業の課題とした。簡単な形を 2×3 としたのは，2.1 節の証明でも用いたように最も基本的な形だからである。ここで，もう一回り小さくした 2×2 の型は，スライドさせても順送りにすることしかできない，つまり，順序の偶奇が変わらないので、本質的条件の 1 つを損なっている。2×3 の型は，並べ方は 120 通りあるが，その中から 20 通りを選び，授業者の意図で配列した表を学習プリントに載せた (資料 1)。さらに，このゲームは正方形でなくてもできることが分かるだけでも，生徒にとって多少の驚きになるのではないかと考えた。授業では，地元出身の高木貞治を紹介する意味も込めて，著書を提示して 2×3 の型で考えることを説明した。

生徒が見つける規則は，2 つの数字の入れ換えに着目したものである。並べられた状態から正しい並び方にするまで 2 つの数字の入れ換えが何回あるのかを数えると，○になる並び方と，×になる並び方とで，規則が見えてくる。今回の授業では，○になる並び方は入れ換えの回数が偶数回であるとまとめられる。次に，表から見つけた 2×3 の型に対する規則が 3×3 でも成り立つのかを確かめる。これは，簡単な場合で見つけた規則を拡張して利用するということである。2×3 のゲームではいえたことが 3×3 のゲームで本当に正

しいのか，実際に確かめてみないとわからないところに，楽しさがあると思う。また，何回か調べてどんな場合でもいえるのか，というように自分から調べようという気持ちになれるのではないか。このように自発的に調べた経験が，数学への興味を高めるきっかけになるのではないかと考えた。

そこで授業のねらいを以下の３つにした。

①2 × 3 の型でゲームを考えても本質的には同じであることを理解し，より簡単に考察を進められるように単純化することができる。

②規則がどんなときでも成り立つか自発的に調べることができる。

③表から見つけた 2 × 3 の型に対する規則を拡張して利用し，3 × 3 の型のゲーム結果を予言することができる。

3．授業実践について

3.1　授業内容

この教材を以下の要領で実践した。

題材名　「予言者になろう」

実施日　平成 18 年 12 月 14 日

場所　岐阜市立青山中学校

参加者　中学 3 年生（25 人）

授業は選択教科「数学」の時間をお借りして行った。授業の流れは以下の通りである。

●ゲームのルールを理解し，興味を持つことができる。

空所を用いて駒をスライドさせること，駒を取り出して入れ換えてはいけないなどのルールを大きめに作ったゲーム（写真１）で説明した。

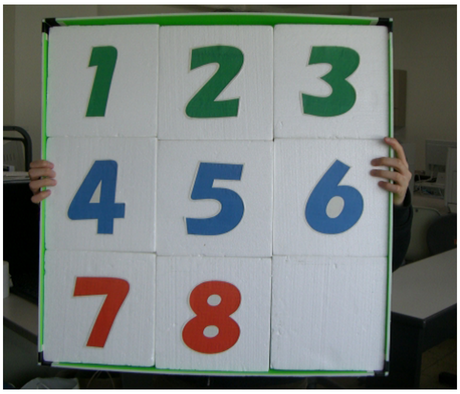


写真 1

●実際に以下の 2 つの配列に取り組むことで,「できる・できない」を体感することができる。また，ゲームの操作に慣れる。

7	4	1
2	3	6
5	8	

3	5	6
1	2	7
4	8	

●ゲームに規則性がありそうだとつかみ，結果を予言するための課題意識を持つことができる。

授業者が，生徒の出す問題の結果を予言し、このゲームには何か規則があるということをおさえる。そして，学習課題を「表から○になるときの規則を見つけよう」とする。

●3 × 3 の型では数が多くて考えにくいため，図 13 のような 2 × 3 の型で考えることを理解する。（高木貞治著の本「数学小景」[6] を提示する。）

1	2	3
4	5	

図 13

ここで，授業のねらいとする単純化の考え方を用いる。2 × 3 の型でゲームを考えても本質的には同じであることを理解し，多くの数を対象に難しく考えるのではなく，より簡単に考察を進められるように単純化する。

●ゲーム結果をまとめた表（表 2）から規則性を考察する。

〇になる並び方と×になる並び方を交互に比べ，2つの数の入れ換えに着目する。そこから，入れ換えの回数によって結果を予想することができると理解する。ここでは，表の色が白色になっているものが〇で黒色が×である。

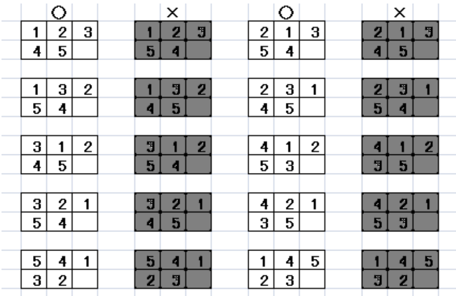


表2

●考察した規則性を3×3のゲームに用いて，結果を予想することができる。

3	5	1
6	2	4
8	7	

2	3	1
6	4	7
5	8	

3.2　授業実践にあたって

考察する表（表2）が通常の数学の授業では扱ったことのないような形態なので，表の見方や解き方の方針がたたない生徒がいることが予想されるので，考え方の視点を与えるヒントカードを用意した（資料2）。また，表にない配列からも考察したい生徒のために2×3の型の全ての配列とその結果が載った一覧表を用意した（資料3）。さらに予想を確かめる場面で，入れ換えた配列を書くことができるように，空の枠だけが載っているプリントを用意した（資料4）。これらは，生徒が必要に応じて使えるように教室の前に置き，机間指導の際に生徒にこれらを使っていいことを伝えるようにした。

4. 実践結果と考察

4.1　生徒の感想

以下，生徒の感想を紹介する。

- ちゃんと予言することができた。
- 規則性を見つけて，実際にオリジナルな問題をつくって自分でやってみたらできたので楽しかった。
- できるものと，できないものを比較して，規則性を見つけることが楽しかったです。
- 規則を見つけるまではとても難しかったけど，見つけたらとても簡単に思えてきて，規則を見つけることはとても必要ということがわかりました。
- 規則を見つけたら，どんなに難しそうに見えたものでも予想が当たっていたからうれしかった。
- 表をつかって，何回か調べてどんな場合でもできるか調べられたので良かったです。
- 今回のゲームは，以前にも何度かやったことがあったけど，できない方法とできる方法があるなんて知らなかったので，難しかったけどおもしろかったです。
- 規則を見つけて，それをためす所が楽しかった。

「今までに習ってきた数学のなかで，今回の授業にいかせたものはありますか？」という質問に対しての回答は以下の通りである。

- 規則を見つけるという関数的な考え方
- 他のものと比べること（できるものとできないもの）
- 偶数，奇数での違い（場合分け）
- 確率の問題と似ている
- ないと思った（今までは，かけたりたしたりするのが多かったけどいれかえる回数で考えるのははじめてだったから。）

- 図形や関数で，表やグラフ，図形をいろいろな見方をすることがいかせた。

4.2　生徒の様子から

はじめはゲームを難しく感じる生徒もいたが，粘り強く表の数字を調べて規則をみつけている姿が多く見られた。ヒントカードを用いて考える生徒もおり，規則を見つける過程で表の見方が難しかったと考えられる。数学の授業においては，なにか規則を見つけるときには，共通している点に注目し，他のものとの区別を考えることが多い。それと同じように今回の授業においても，○になる並び方をしたものをいくつか調べてみて共通点を見つけ，それと×になるものとを比較して規則を見つけていくという流れの方が生徒にとっては自然だったかもしれない。今回ヒントカードで示したような，○になるものと×になるものとを並べて比較することは難しく感じたようである。しかし，このように様々な視点から対象となるものを調べることも大切であり，必要だと考える。生徒には 3 × 3 の型のゲームしか配布していなかったので，写真 2 のようにして実際に結果を確かめている姿が多かった。このことから，2 × 3 の型でゲームを考えても本質的には同じであることを理解していると考えられる。よって，ねらい①は達成できたと考える。

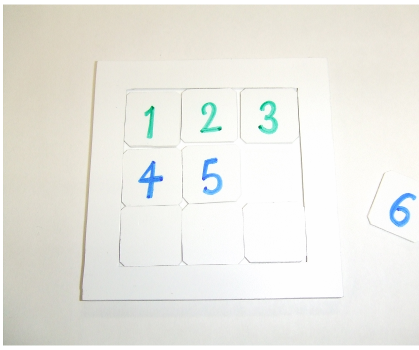


写真 2

また，自分で考えたオリジナルな問題や難しい問題を作って確かめる生徒がほとんどであった。このことから，自発的に調べることができたと考えられる。よって，ねらい②は達成できたと考える。さらに，多くの生徒が 2 × 3 の型で見つけた規則を利用して 3 × 3 の型のゲーム結果を予言することができたので，ねらい③ は達成できたと考えられる。

全体を通して，見つけた規則がどんなときでもいえるのか自発的に確かめている姿が多く見られ，具体的な例から推測することにより，共通に成り立つ一般的な性質を見つけ出そうとする帰納的な考え方が身についていることがわかる。さらに，アンケートの回答から，規則を見つけることのよさを味わうことができたり，有用性を感じたりできたといえる。さらに，確率の問題と似ていると感じた生徒が 2 名おり，高校で学習する，順列と確率の分野の導入にもなったのではないかと感じた。

5. 今後の課題

今回の授業実践は，1 時間分の授業時間 (45 分) で行うということもあり，問題の設定を授業者が与えることが多かった。特に，課題追究を行う場面では 2 × 3 の形に注目して考えていくことを提案し，単純化して考えたことのよさを味わうことに焦点をあてたが，本来であれば，この単純化の場面こそ生徒の意見を求めなければならない。そのためには，このゲームを事前に生徒が行い，形を変えても同じルールが成り立つことや，同じ規則があるのではないかというように導入に長い時間をかけなければ難しい。

また，順列や行列を学習した後であれば，このゲームの数の並び方に何か関連させるものがあるが，中学生には,「数を並べたもの」が配列された表を見るのに難しさがあったのかもしれない。大学生を対象に事前に実践したのだが，その際，大学生からは偶置換・奇置換の性質がよく理解できるなどの感想をえている。

今後は，空所を作る際に盤上から一つ駒をとるのではなく，図14のように，新たに一つスペースを作ってゲームを実施するなど，条件を変えて試行してみたい。子供の頃にやっていたゲームが大学で学習する数学に生きるとは思いもしなかった。このように，黒板やノートを使うだけでは難しい内容でも，手を動かしたり，視点を変えて思考したりすることで，理解できる教材はとても魅力的だと実感した。そんな教材づくりをしていきたいと思う。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

図 14

引用文献

[1] 文部省，1999，中学校学習指導要領（平成１０年１２月）解説ー数学編ー，大阪書籍株式会社

[2] 本田千春・内海淳・前田利江，2007，基調発表－中学校部会－基調発表の趣旨，日本数学教育学会研究部中学校部会，日本数学教育学会，５章

http://www.sme.or.jp/pdf/conp01_89kj5.pdf

[3] 国立教育政策研究所教育課程研究センター

http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h15/index.htm

[4] OECD 生徒の学習到達度調査　出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

http://ja.wikipedia.org/wiki/PISA

[5] 片桐重男，1995，数学的な考え方を育てるねらいと評価，明治図書.

[6] 高木貞治，1943，数学小景，岩波書店.

[7] 洲之内治男，1998，基礎　線形代数 [新訂版]，サイエンス社.

[8] 村上正康・佐藤恒雄・野沢宗平・稲葉尚志，1985，教養の線形代数　改訂版，培風館.

資料 1

予言者になろう!!　　　3年＿＿組＿＿＿＿＿＿＿＿

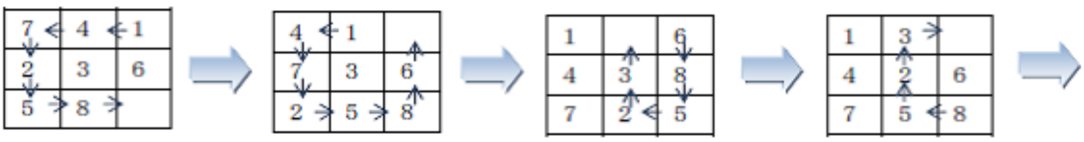
ルール

① 右下の駒を取って空白を作り、残りの８個の駒を上下・左右にスライドさせる。
② スライドさせて駒の場所を変えることはできるが、板から駒を取って入れ替えることはできない。
③ スライドさせて、下の図のような形になれば○

1	2	3
4	5	6
7	8	

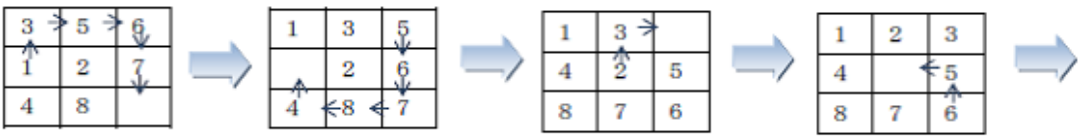
次のゲームをやってみよう。

例 1



1の駒から順番に並べるように
スライドさせるといいよ!

例 2



問題

1	2	3		1	2	3		2	1	3		2	1	3
4	5		⇔	5	4		⇔	5	4		⇔	4	5	
1	3	2		1	3	2		2	3	1		2	3	1
5	4			4	5			4	5			5	4	
3	1	2		3	1	2		4	1	2		4	1	2
4	5			5	4			5	3			3	5	
3	2	1		3	2	1		4	2	1		4	2	1
5	4			4	5			3	5			5	3	
5	4	1		5	4	1		1	4	5		1	4	5
3	2			2	3			2	3			3	2	

どんな違いがあるの
だろう

課題

次のゲーム結果を予想して、実際に確かめてみよう。

(1)

3	5	1
6	2	4
8	7	

予想 [ ]

(2)

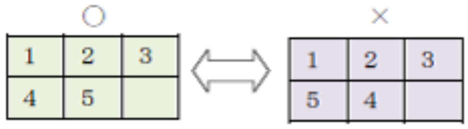
2	3	1
6	4	7
5	8	

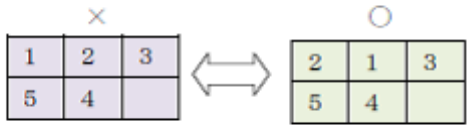
予想 [ ]

資料 2

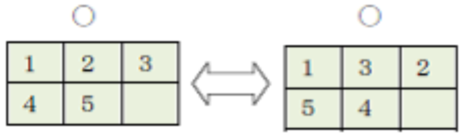
考え方のヒントカード

〇の並び方と×の並び方にどんな違いがあるだろうか？

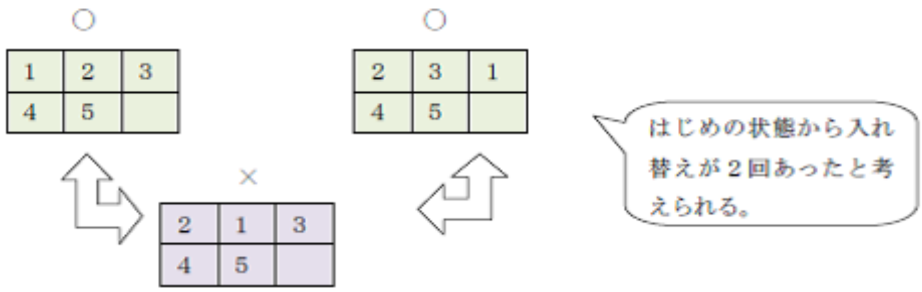




この場合は、どうだろうか？



発展

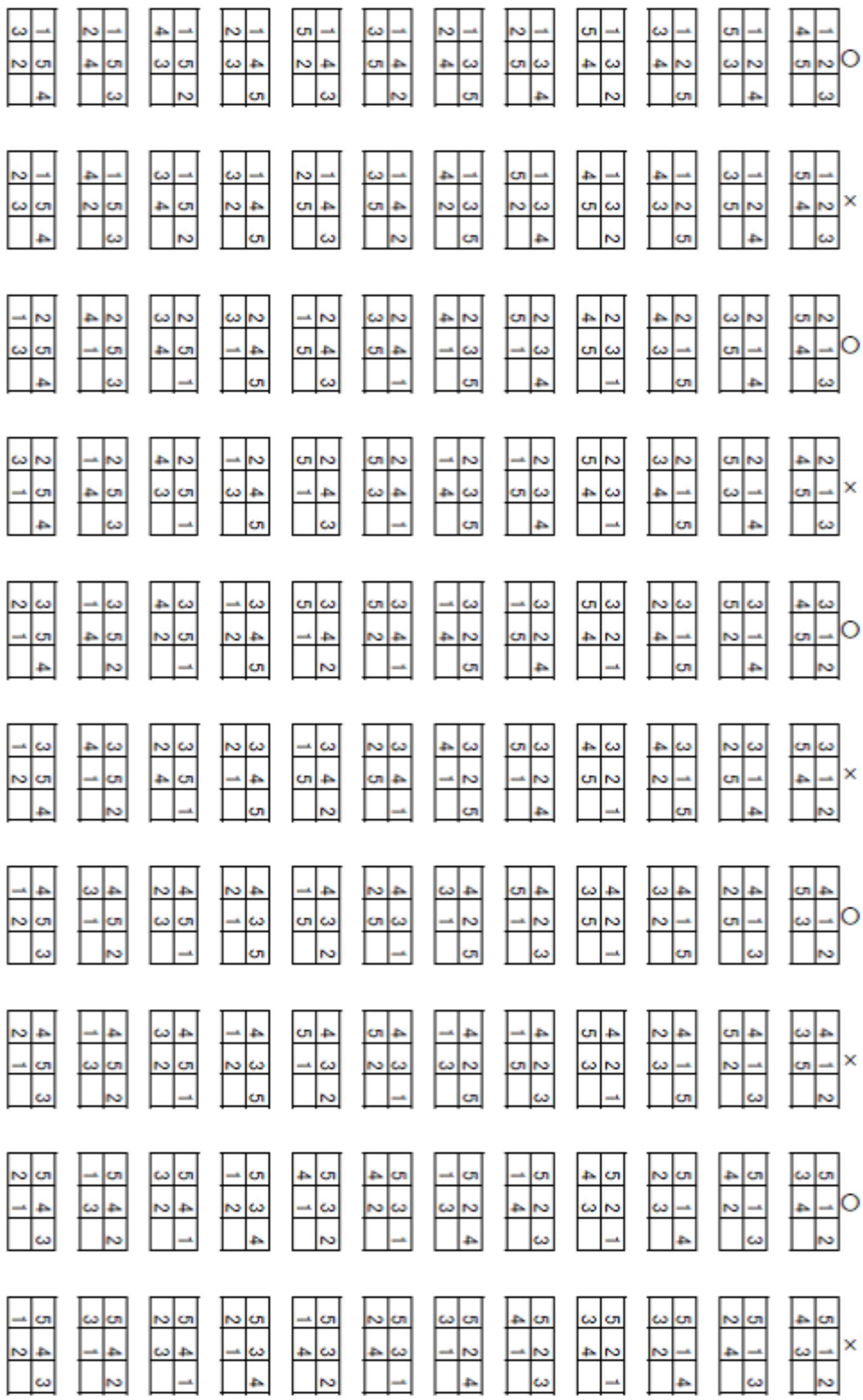


まず１と２が入れ替わると〇から×になり、次に１と３が入れ替わると×から〇になる。
つまり入れ替わりが２回あると〇から〇に戻る。

このように考えると

２つの数字を入れ替えた回数が　１回のとき結果は　＜ 〇・× ＞
２回のとき結果は　＜ 〇・× ＞
３回のとき結果は　＜ 〇・× ＞
４回のとき結果は　＜ 〇・× ＞

資料3



2×3のゲーム結果の一覧

資料 4

考え方を残そう！　　　　**3年　組**＿＿＿＿＿＿＿＿