

## 数学的な思考力を養うことのできる教材の開発とその実践

都築愛子<sup>1</sup>，菱川洋介<sup>2</sup>，山田雅博<sup>3</sup>

生徒が、事象への疑問を論理的な思考力を用いて解決し、その過程で数学の有用性を感じ、数学的な思考力を養うことのできる教材開発を試みた。題材として、身近に感じやすいと思われるゲームを取り上げた。この教材を通して、生徒が数学に興味・関心を持ち、自ら設定する課題に意欲的に取り組むことのできる姿を目指した。また、ゲームのルールを生徒が作ることで、論理を創造する力を養うこともねらいとした。本論文は、その教材の内容及び、高校生を対象として行った実践の結果と、それに対する考察をまとめたものである。

<キーワード> 数学的な思考力，数学の有用性，シンペイゲーム，ルール作り

### 1. はじめに

平成 11 年告示，平成 15 年度一部改正の新学習指導要領 [1] によると，高等学校の数学の目標に「事象を数学的に考察し処理する能力を高め」「数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活動する態度を育てる。」とある。そこで，今回，そのような目標の実現を目指した高校生を対象とする教材開発に取り組むことにした。この教材のねらいは，事象への疑問を論理的な思考力を用いて解決し，その過程で数学の有用性を感じ，数学的な思考力を養うことにある。この教材を通して，生徒が数学に興味・関心を持ち，自ら設定する課題に意欲的に取り組むことのできる姿を第一に考える。

本教材では，身近に感じやすいと思われるゲームを取り上げ，その最善手及び必勝法を考える。実践に 2 日間をあて，1 日目は最善手を論理的に説明する，あるいは必勝法を論理的かつ正確に場合わけをし，ものごとを捨象しながら数学的活動を行っていく。また，2 日目にはゲームのルールを生徒が作ることで，

論理を創造する力を養うこともねらいとした。本論文では，その教材の内容と実践結果について報告する。

### 2. 教材化にあたり

#### 2.1 教材の説明

本論文で扱う教材について説明する。4 × 4 マスを用いた 2 人対戦“シンペイ”ゲームを取り上げる。このゲームは，高橋晋平という人物がインターネット上で配信したことがきっかけで，今や株式会社バンダイでも販売されている。また，2006 年 GPCC（情報処理学会プログラミング・シンポジウムの分科会）の課題問題にも選ばれている。本教材においては，対象生徒が高校生であること，及び実践が 2 日間であることから，問題解決が複雑にならないようにルールを変更し，そのルールを以下に示す。

- ① 4 × 4 マスで対戦する。
- ② 自分のコマは 4 個である。
- ③ 自分のコマを 3 個並べて勝ちとする。た

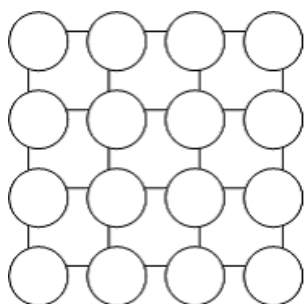
<sup>1</sup>岐阜大学大学院教育学研究科

<sup>2</sup>岐阜大学大学院工学研究科

<sup>3</sup>岐阜大学教育学部

だし，4個並んだ場合は，勝ちにならない。

- ④ 先手の第一手は(2,2)，(2,3)，(3,2)，(3,3)のいずれかに置く。
- ⑤ 相手のコマを1個はさんだら別の場所に飛ばさなければならない。(2個はさんだら飛ばせない。)
- ⑥ 相手のコマを飛ばして3個並べても相手の勝ちにはならない。
- ⑦ 互いにコマを4個置ききっても決着がつかなければ引き分けとする。



以上のルールで，上のゲーム盤を用いて2人で対戦する。④では，行列と同じように*i*行*j*列目のマスをも(*i, j*)で表している。以下，このように表記する。

本教材で扱うルールは，もとのルールと変更している点がある。その箇所及びそうした理由を次に述べる。

①について，もとのゲームは，4×4マス(上の世界)と，4つのマスで結ばれた最小の正方形の中心3×3マス(下の世界)で行われる。しかし，本実践では“上の世界”のみを扱うこととした。その理由は，次の2つである。

・本実践の日程が2日であるため，ゲームの難解さより個々が課題を設定して問題解決をする時間に重点を置きたいからである。

・1節にも取り上げたが，より効率的で有効な場合分けの考えを養わせるというねらい，及び対象が高校生であることから，場合分けが複雑にならないようにしたからである。

⑤について，もとのルールは，相手の2個のコマを挟んだら2個とも飛ばせた。しかし，本実践のルールでは，コマは1個しか飛ばせないこととした。その理由は，この条件によって，本来の“条件をつけて場合分けをする”ことに重点を置くことができるからである。

⑦について，もとのルールは互いに4コマ置ききったら，コマの上下左右の“異なる世界”に移動してゲームを続ける。例えば，上の世界のコマは下の世界へ，その逆も同様である。しかし，本実践のルールは，①のとおりである。理由は，4コマ置ききりまでの必勝法と4コマ置ききりからの必勝法は異なるためである。以下，4コマ置ききりまでのゲームと，4コマ置ききりからのゲームは別個にとらえることにする。

## 2.2 数学教育的位置づけ

以下，最善手とは，数手先まで考えた上で現時点で最善の結果を得るための一手のことを言い，必勝法とは，必ず勝てるコマの置き方のパターンのことを言うものとする。また，リーチとは，自分の次の一手によりコマが3個並ぶ可能性のある状態を言う。互いに最善手を打つとして，必勝法はあるのだろうか。これを調べるためには，次の数学的考えが必要である。

### (1) 論理的に場合分けをする

数学A「場合の数」[2]では場合分けの一つの例として，樹形図が扱われている。中学第2学年「確率」[3]でも，樹形図は扱われており，起こりうるすべての場合をもれも重複もないように，順序よく整理して数え上げることがを学習している。場合の数を数え上げるとき，基本的な方法として辞書式配列が用いられる。このうち，自明である場合を捨象しながら，樹形図を構想する。本教材では，この自明である場合を，正確かつ有効に捨象するための方法に着目して吟味する。

### (2) 思考力を養う

“シンペイ”ゲームは、楽しみながら思考力が身に付くと思われる。対戦ゲームであるので、勝つためには数手先まで予測する必要がある。対戦時には、相手の手法を知ることができるので、思考の幅は広がる。さらに、(1)に関連して、本教材の必勝法を見つけるためには、どのような条件のもとでどのような場合分けをするのかを考える。以上の理由から、本教材は思考力を養うためには有効であると思われる。

### (3) 論理を創造する力を養う

1日目のシンペイゲームのルールにおいて明らかとなった最善手と必勝法をもとに、2日目では4コマ置ききってからルールを生徒が考える。その際、ゲームが長く続くためのルール、先手あるいは後手に有利なルールなど、各生徒がテーマを決めてルールを考える場に置いて、整合性のあるルール設定が求められる。これらの活動により、論理を創造する力が養われるものと考えられる。

### (4) 点対称な図形、線対称な図形

点対称な図形、及び線対称な図形は、中学校第1学年「平面の図形」[4]で学習する。4×4のマスで繰り広げられる“シンペイ”ゲームの必勝法を場合分けによって見つける場面でこの考え方が有効となる。

## 3. 教材研究

互いに4コマ置ききりまでの段階において、成り立ついくつかの定理を次に述べる。

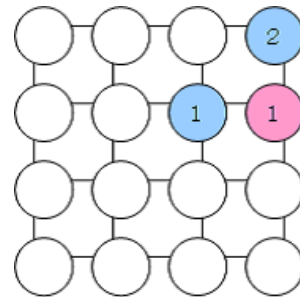
### (1) 定理 1

相手のリーチを防ぐには、はさんで飛ばすか、阻止するしかない。阻止の仕方は、リーチのかかった相手の3個目を自分で埋めるか、相手のコマを飛ばして埋めるかのいずれかである。

先手を青として、青の1手目を青1、赤の1手目を赤1、以下同様に表すとする。以下の例は、最善手を見つける過程で実際に起こる状態である。

### i) 青2手目、赤1手目を出し終えた状態

例えば、下図の状態にあるとする。このとき、赤は青2をはさめない。赤は、(2,2)に置いて青1をはさんで適切なところに飛ばすと、青のリーチを防ぐことができる。また、赤は、(3,2)に置くと、青のリーチを防ぐことができる。赤が上で示した以外のところに置くと、青は(3,2)に置いて勝つ。従って、赤は、青のリーチを防ぐには、青のコマをはさんで飛ばすか、青のリーチを阻止するかのいずれかしかない。



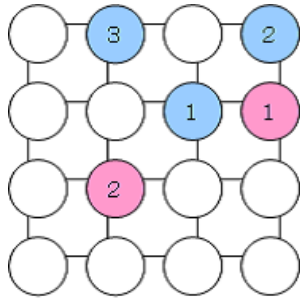
### (2) 定理 2

このゲームにおいては、ダブルリーチという状態が起こりえる。ダブルリーチとは、コマが3個並ぶ可能性のある場合が同時に2種類起こる状態を言う。相手のダブルリーチを防ぐ手は、相手の一つのコマ(ダブルリーチのかかっている両方に関係するコマ)をはさんで飛ばすか、リーチに関係するその他のコマをはさんで飛ばし3個目を埋めるかのいずれかしかない。

以下の例をもとに考えてみる。

### ii) 青3手目、赤2手目を出し終えた状態

例えば、下の図の状態にあるとする。このとき、青は、ダブルリーチの状態となる。すなわち、青は、(1,3)、(3,4)のいずれに置いても3個のコマが並ぶ。赤が、これらを同時に阻止するため、両方のリーチに関係するコマである(1,2)を適切なところに飛ばすことを考える。しかし、これは不可能である。よって、赤が(2,2)に自分のコマを置き、(2,3)の青のコマを(1,3)に飛ばすしかない。

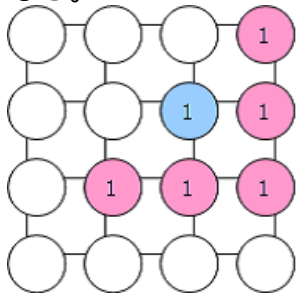


以下は、互いに最善手を打ったときの必勝法を見つけるための一つの方法である。まずは、互いの最善手を見つけるために、以下の条件のもとで場合分けをする。それによって、互いに最善手を打ったときの必勝法を見つけていく。対称性を考慮すると、場合分けの数が減ることに注意しておく。

先手を青とする。対称性から、青は、(2,3)に一手目を置くものとして一般性を失わない。すぐ解ることとして、赤1は、(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)のいずれかに置くと青はダブルリーチにより必ず勝つ。従って、赤1の最善手は、(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)の8通りが考えられる。赤1の置き方もまた、(1,4)と(4,1)を結ぶ直線を対称軸とすると4×4の図形は線対称な図形であり、赤1を以下のように場合分けをすればよいことが解る。

1. 赤1を(1,4)に置いたとき
2. 赤1を(2,4)に置いたとき
3. 赤1を(3,2)に置いたとき
4. 赤1を(3,3)に置いたとき
5. 赤1を(3,4)に置いたとき

すなわち、赤1を置く場合分けは、以下の図のようになる。



ただし、以下の条件をつける。

○先手の青の見方で勝敗を考える。青の見方とは、青の立場に立つことである。

○青2を置くことで、1パターンでも青が勝つ方法があれば赤1は死に手とする。死に手とは、あるマスに置くと負ける場合の置き方である。

○青2もしくは赤2でリーチをかけない場合は除外する。

すると、次の結果を得る。

1. 赤1を(1,4)に置いたときは、青が勝つ。
2. 赤1を(2,4)に置いたときは、青が勝つ
3. 赤1を(3,2)に置いたときは、引き分けになる。
4. 赤1を(3,3)に置いたときは、引き分けになる。
5. 赤1を(3,4)に置いたときは、引き分けになる。

以上から、赤1の最善手は、3, 4, 5の場合である。従って、互いが4コマ置ききるまでには、互いが最善手を打つとすると、結果は引き分けになる。つまり、このルールにおいてこの場合分けから、最善手はあるが、必勝法はないということが分かる。

以下に、最善手を見つける過程の一部である上記の1と2について紹介する。なお、3~5については、場合分けがかなり複雑になり、割愛する。実際にゲーム盤とコマを用いて、検証がてら楽しんでみるのも一興であろうかと思われる。

1. 赤1を(1,4)に置いたとき

**結論**

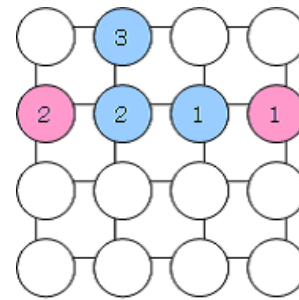
青1が(2,3)のとき、赤1は(1,4)に置くと青が勝つ。

青2は、(3,2)に置くと勝つ。(3,2)は、青2の最善手である。従って、赤1は、(1,4)に置くと負ける。(1,4)は、赤1の死に手である。

以下の表は、コマが移動する経緯を示している。また、以下の図は、結果が決まる最後

の手を打ったときの状態の図である。

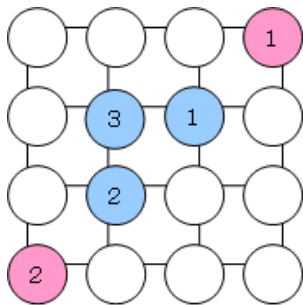
手数	先手		飛ばされた先		後手		飛ばされた先	
	行	列	行	列	行	列	行	列
青1	2	3						
赤1					1	4		
青2	3	2						
赤2					4	1		
青3	2	2						



(青3が(1,2)に置いたときの図)

∴ 青の勝ち

他の場合分けについては、複雑になるので、ここでは割愛する。シンペイゲームは、互いに最善手を打っていくと、結果は必ず引き分けになる。このルールでは互いに4コマ置ききるまでには勝敗はつかない。



∴ 青の勝ち

2. 赤1を(2,4)に置いたとき

**結論**  
青1が(2,3)のとき、赤1は(2,4)に置くと青が勝つ。

青2は(2,2)に置くと勝つ。(2,2)は、青2の最善手である。従って、赤1は(2,4)に置くと負ける。(2,4)は、赤1の死に手である。

手数	先手		飛ばされた先		後手		飛ばされた先	
	行	列	行	列	行	列	行	列
青1	2	3						
赤1					2	4		
青2	2	2						
赤2					2	1		
青3	1	2						
	1	3						
	3	2						
	3	3						

#### 4. 実践の計画

##### 4.1 実践について

平成19年12月15日(土),16日(日)の2日間にわたり、高校数学セミナーにおいて授業を実施する。講座名は「シンペイゲーム」である。会場は、岐阜県立図書館内にある施設を利用する。高校1年生~3年生を対象に実践を行う。

##### 4.2 実践の展開

###### 1日目

第2節で示したルールでシンペイゲームを行い、最善手および必勝法を考える。

###### 2日目

4×4のマス及び4コマ置ききるまでのルールは不変とし、4コマ置ききってからのコマの動かし方のルールを考える。各生徒が定めたルールでゲームを行い、その最善手及び必勝法を考える。(指導案は、文末の資料を参照。)

本実践のねらいを、第1,2節にもとづき、以下とする。

###### 本実践のねらい

1. 論理的かつ正確に場合分けをし、最善手及び必勝法について考察することができる。

2. 論理的に考え、整合性のあるルール設定をすることができる。

### 5. 実践の考察

2日間の実践を通して、ゲームの体験及び追究を行うため、生徒にはカラー磁石とゲーム盤、自由に書き込みのできるプリントを配布した。

1日目は、ゲームの体験から自由に課題設定及び追究を行った。生徒はゲームを重ねて行ううちに、どの時点で勝敗が決まっているかを予想し、場合分けによって追究していた。その中で、線対称や点对称であることを理由に、同一視できる場合分けを捨象したり、『リーチを止めなければ負ける』、『ダブルリーチは相手のコマを飛ばさないと止められない』など、最善手であることを理由として場合分けをしたり、ゲームの進行を棋譜と図の両方にまとめることで、順序よく正確に場合分けをしていた。以上の活動から、ねらいの1つ目は達成できたと考える。

2日目は全てのコマを置ききってからルール設定を行った。主な生徒は、勝敗がつきにくくなるように『置ききったあとは、盤上にあるコマを1つずつ動かしていくが、コマの動かし方を制限する』というルールを設定していた。その制限には、将棋のコマの動きや、コマを置いた順番通りにコマを動かすなど、勝敗がつきにくくなる様々な工夫が見られた。また、逆に勝敗がつきやすくなるように、ある一定の箇所に置かれたコマを持ち

コマとしてゲームを再開するルールを決める生徒もいた。さらに、考えた独自のルールで周りの仲間や指導者と対戦し、そのルールを改善していく姿も見られた。以上の活動から、ねらいの2つ目も達成できたと考える。

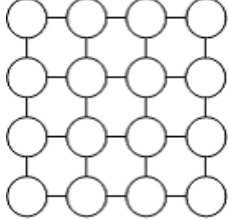
### 6. 今後の課題

今回は、4コマ置ききってからのルールを生徒が設定することで、教材を深めた。しかし、シンペイゲームは、例えばマスの個数を変更したり、4コマ置ききりまでのルールを変更したりなど、本実践以外にも幅広く深められるべき教材であると実感した。特に、一般に知られているシンペイゲームの必勝法は未だ発見されていなく、本実践での追究がシンペイゲーム攻略法への糸口となりうる可能性も秘めていると考える。また、今回の実践は高校生を対象に実施されたが、難易度の高い数学知識を要しないことから、中学生を対象とした教材としても扱えるのではないかと考える。

### 引用・参考文献

- [1] 文部省，高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編，平成11年12月。
- [2] 数研出版，高等学校教科書「数学A」，平成14年3月検定済。
- [3] 大日本図書，新版中学校数学教科書2年生用，平成17年2月検定済。
- [4] 大日本図書，新版中学校数学教科書1年生用，平成17年2月検定済。

## 指導案

学習活動	教師の指導・援助
<p>1 日目</p> <p>○ ゲームの特徴を知る。</p> <p>・ゲームには、定石（最善手）と必勝法がある。定石（最善手）と必勝法は、場合わけにより明らかになることがある。</p> <p>○ シンペイゲームを知る。</p> <p>課題</p> <p>シンペイゲームの定石と必勝法を考えよう。</p> <p>ルール</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>① 4 × 4 マスで対戦する。</p> <p>② 自分のコマは 4 個である。</p> <p>③ 自分のコマを 3 個並べて勝ちとする。ただし、4 個並んだ場合は、勝ちにならない。</p> <p>④ 先手の第一手は (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) のいずれかに置く。</p> <p>⑤ 相手のコマを 1 個はさんだら別の場所に飛ばさなければならない。( 2 個はさんだら飛ばせない。)</p> <p>⑥ 相手のコマを飛ばして 3 個並べても相手の勝ちにはならない。</p> <p>⑦ 互いにコマを 4 個置ききっても決着がつかなければ引き分けとする。</p> </div> <p>○ 2 人組になってゲームを行う。</p> <p>○ 4 コマ置ききりまでの定石について追求する。</p> <p>・相手のリーチを防ぐには、はさんで飛ばすか阻止するしかない。</p> <p>・相手のダブルリーチを防ぐには、はさんで飛ばすしかない。</p> <p>・相手のトリプルリーチを防ぐには、自分のコマで相手のコマを一つ挟んで、わざと 3 個一列に並べるように飛ばすしかない。</p> <p>○ 4 コマ置ききりまでの必勝法について追求する。</p> <p>・互いが最善の手を打つものとして、最善手を見つける。</p> <p>・条件をつけて場合わけにより必勝法を追求する。</p> <p>○ 分かったことをまとめる。</p> <p>○ 発表をする。</p> <p>・互いが最善手を打っていくと、先手も後手も負けなし。</p>	<p>教師の指導・援助</p> <p>● シンペイゲームのルールを説明する。</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>● ゲームに慣れる。</p> <p>● 場合分けの仕方や、考え方などについて個別に指導する。</p>

<p>2日目</p> <p>○ 上記に示した①～⑥のルールは変えないで，4コマ置ききってからのルールを考える。</p> <p>予想されるルール</p> <ul style="list-style-type: none"><li>・自分のコマが4個並んでいた状態から，端を1個ずらしても勝ちにはならない</li><li>・自分のコマの上下左右斜めの場所に動かせる。</li><li>・自分のコマの上下左右の場所のみに動かせる。</li><li>・コマにつけられた番号の順に動かす。</li></ul> <p>○ 4コマ置ききってからの定石について追求する。</p> <p>○ 4コマ置ききってからの必勝法について追求する。</p> <p>○ 分かったことをまとめる。</p> <p>○ 発表をする。</p>	
--	--