岐阜数学教育研究
2007, Vol.6, 1-16

生徒の興味・関心を喚起させる外的な数学的活動を取り入れた授業実践

久保田滝敏[1]，愛木豊彦[2]

前回の学習指導要領の改訂で，高等学校数学科の目標に「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」という文言が追加された。そこで，外的な数学的活動を取り入れた1時間分の授業案を提案し，実践することとした。扱う内容は，単元「平面上のベクトル」に関するものであり，単元を学習した後の発展的内容として位置づけている。問題解決の過程で，式変形に意味をもたせるために，図をていねいにかき，その図について考察するという外的な数学的活動を取り入れ，生徒が理解しやすくなるよう工夫した。授業実践の結果からその外的な数学的活動が有効であったかを考察する。

＜キーワード＞数学的活動，平面上のベクトル,（広義の）作図

1. はじめに

平成11年3月29日に高等学校学習指導要領[1]の改訂が行われ，高等学校数学科の目標が「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる。」と示された。この目標で注目すべきは「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」という文言が追加された点である。数学科の目標の改善に当たっては，小学校，中学校及び高等学校での教育の一貫性を図るとともに，児童生徒の発達段階に応じた適切かつ効果的な学習が行われるよう配慮されている。小学校算数科と中学校数学科の目標はそれぞれ,「数量や図形についての算数的活動を通じて，基礎的な知識と技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに，活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活に生かそうとする態度を育てる。」,「数量，図形などに関する基本的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考える能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。」と示されている。この目標の中で,「（算数的）活動の楽しさ（に気付き）」,「数学的活動の楽しさ（を知り）」が高等学校数学科の目標の「数学的活動を通じて創造性の基礎を培う」に当たり，各学校段階における児童生徒の発達段階を踏まえた表現となっている。高等学校では，楽しさについての直接的表現はないが，数学的活動の楽しさを知り，その活動を通して創造性の基礎を培うことを目標としているのではないかと考える。

数学的活動については，観察，操作，実験・実習などの外的な活動と，直観，類推，帰納，演繹などの内的な活動が考えられ，小学校では，作業的･体験的な活動，中学校では，観察，操作，実験を通した考察などの活動が各々算数，数学的活動ととらえられている。高等学

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

校学習指導要領解説 [2] によると，高等学校ではさらに，次のような思考活動も数学的活動ととらえている。

〇身近な事象を取り上げそれを数学化し，数学的な課題を設定する活動

〇設定した数学的な課題を既習事項や公理・定義等を基にして数学的に考察・処理し，その過程で見いだしたいろいろな数学的性質を論理的に系統化し，数学の新しい理論・定理等を構成する活動

〇数学的知識を構成するに至るまでの思考過程を振り返ったり，構成したり，他の具体的な事象の考察などに数学的知識を活用したりする活動

小中学校では外的な活動が中心であるのに対し，高等学校における数学的活動は内的な活動が中心となる。しかし，数学化の場面や数学的考察・処理の過程などでは，観察，操作，実験などの外的な活動を取り上げることも可能である。そして，たとえ高校生であったとしても，外的な数学的活動を行う授業では，通常より目が輝き，主体的に取り組む場合が多い。このことは，生徒の興味・関心を喚起させ，教材の理解を高める効果や創造性の基礎を培うことに繋がると考えられる。

そこで本論文では，この外的な数学的活動に注目し，生徒の苦手意識が高いと感じられる単元の内容について，外的な数学的活動を取り入れた授業を開発･実践し，結果からその活動が有効であったかを考察することとした。

2. 単元について

本論文で扱う単元は「平面上のベクトル」である。この単元を学習した後の発展的内容として，外的な数学的活動を取り入れた１時間分の授業を開発する。単元「平面上のベクトル」を選んだのは次の４つの理由からである。

まず１つ目は，多くの高校生が履修しているからである。数学Ｂの学習内容に「平面上のベクトル」の単元があるが，この単元は，普通科高校では文系，理系問わず履修している。また，実業高校においても，ホームページに掲載してあるシラバスや生徒に配布しているシラバスなどから履修している高校があることがわかる。よって，多くの高校で実践することができるので，今後どのような学校に赴任しても扱える可能性の高い単元だからである。

２つ目は，筆者の過去の経験から生徒の苦手意識が高いと感じられる単元だからである。高校ではベクトルを幾何ベクトルとして扱っているが，方向と大きさで決まる量として定義しているため，位置が分からずイメージがしにくい。また，位置とは関係ない量としてベクトルを定義した後に，位置ベクトルを考える。これによってベクトルの概念に混乱が生じる。これは，導入時の有向線分とベクトルの関係が生徒の中で明確になっていないことが原因のような気がする。今回実践を行う岐阜県立長良高等学校（文系 42 人理系 35 人）の事前アンケート（小数第２位を四捨五入）では次のような結果が出ている。

「平面上のベクトルは難しかったですか？」

	文系	理系
易しかった	2.5 %	5.9 %
どちらかというと易しかった	7.5 %	5.9 %
ふつう	35.0 %	55.9 %
どちらかというと難しかった	22.5 %	26.5 %
難しかった	32.5 %	5.9 %

表１

「位置ベクトルを理解していますか？」

	文系	理系
理解している	17.5 %	14.7 %
理解していると思う	40.0 %	52.9 %
理解していないような気がする	17.5 %	23.5 %
理解していない	25.0 %	8.8 %

表２

「有向線分とベクトルの違いを理解していますか？」

	文系	理系
理解している	7.5 %	5.9 %
理解していると思う	10.0 %	14.7 %
理解していないような気がする	22.5 %	50.0 %
理解していない	60.0 %	29.4 %

表３

アンケートの結果によると，表１「平面上のベクトルは難しかったですか？」という質問に対して，易しかった，どちらかというと易しかったと回答した生徒は文系で約 10 %，理系で約 12 %と少なく，逆に難しかった，どちらかというと難しかったと回答した生徒は，文系で約 55 %，理系で約 32 %と多い。これは筆者の，生徒が単元「平面上のベクトル」に対して苦手意識をもっているという実感を裏付けている。また，表１の結果には，文系の生徒と理系の生徒の，単元「平面上のベクトル」に対する苦手意識の差が表われている。一方，表３の「有向線分とベクトルの違いを理解していますか？」という質問に対し，理系の生徒でも約 79 %の生徒が，理解していない，理解していないような気がすると回答していることからベクトルに対する理解は理系であっても十分ではない。表２の「位置ベクトルを理解していますか？」という質問に対しては，文系でも 58 %以上の生徒が，理解している，理解していると思うと回答しており，筆者の実感と少しずれを感じるが，表１，表３の結果をみる限り，わかっているような気になっているだけではないかと考えられる。そこで,「平面上のベクトル」で外的な数学的活動を取り入れた授業を行うことによって，少しでも生徒の興味・関心を喚起させ，ベクトルをより理解させることができないかと考えた。

３つ目は，外的な活動の一つである作図を授業に取り入れることができるからである。数学教育において，作図はコンパスと定規だけで図をかくことを意味することが多いが，ここでは，広く図を正確にかくことを（広義の）作図とよぶことにする。図をかくことは，高校入学から数学Ｂを学習するまでの期間において,「図形と計量」（数学 I）,「平面図形」（数学Ａ）,「図形と方程式」（数学 II）の単元や関数を扱う単元などで，問題を解くための補助的手段として用いられてきたが，方眼紙を使うような広義の作図はしていない。それは，作図に時間がかかること，作図が問題解決の本質的な役割を果たす場面が少ないことなどに起因する。しかし，作図は，高校数学においても問題解決のための有効な手段の一つである。単元「平面上のベクトル」では図形について考察するので，作図のよさを伝えることができる。従って，本単元における授業案を開発することにした。

４つ目は，教科書に紹介してある三角形の重心の公式の一般化を紹介したいからである。詳しくは第 3 節で述べるが，教科書において，平面上のベクトルを 3 つのベクトルで表すことは少なく，重心の公式のように表されることはまれである。そこで，重心の公式のような式の形について，もう少し触れることは出来ないかと考えていたからである。

三角形の重心

3 点 A($\overrightarrow{a}$)，B($\overrightarrow{b}$)，C($\overrightarrow{c}$) を頂点とする △ ABC の重心 G の位置ベクトルを $\overrightarrow{g}$ とすると

$$\overrightarrow{g} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}$$

3. 授業案

(1) 題材について

授業で扱うのは次の問題である。

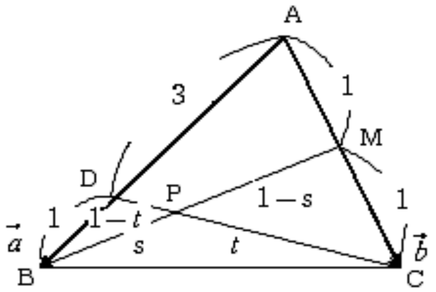
＜問題１ a＞

3 点 A(7,9), B(−1,1), C(11,−5) を頂点とする △ ABC において，辺 AB を 3:1 に内分する点を D，辺 AC の中点を M とし，線分 BM, CD の交点を P とする。このとき P の座標を求めよ。

まず，この問題を単元「図形と方程式」で学習した直線の方程式を利用して解く。そして，A，B，C の座標が一般的に与えられた場合の P の座標を求めることを，本時の課題とした。教科書等ではこの課題を次のように考える。

△ABC において，辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D，辺 AC の中点を M とし，線分 BM，CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ を用いて表わせ。

（解答）



BP：PM $=s:(1-s)$, CP：PD $=t:(1-t)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\&=(1-s)\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}s\overrightarrow{b}\cdots①\\\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=s\frac{3}{4}t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}\cdots②\end{aligned}$$

①，②から

$$(1-s)\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}s\overrightarrow{b}=\frac{3}{4}t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$$

ここで，$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0},\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$，かつ $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ は平行でないから

$$1-s=\frac{3}{4}t,\frac{1}{2}s=1-t$$

これを解いて　$s=\dfrac{2}{5},t=\dfrac{4}{5}$

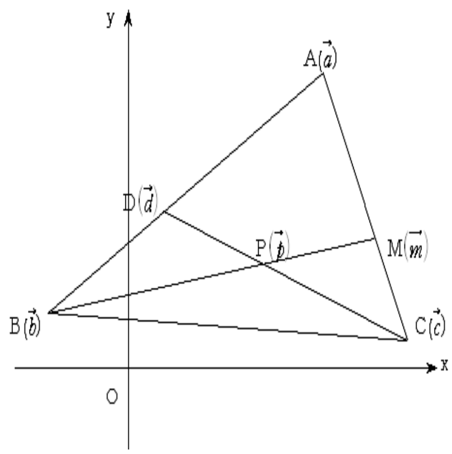
$s=\dfrac{2}{5}$ を①に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{a}+\frac{1}{5}\overrightarrow{b}$$

今回は，この問題を
「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{p},\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b},\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とするとき，$\overrightarrow{p}$ を $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ を用いて表わせ。」
と，原点を始点とする位置ベクトル（以下位置ベクトル）で扱い，発展的内容と位置づけた。問題文において三角形の 1 つの頂点を始点とするベクトルから，位置ベクトルに変更する理由は次の通りである。平面上の 1 次独立な 2 つのベクトルを用いることは，平面上の全てのベクトルがそれらの 1 次結合で表されるという性質を利用するきわめて有効な方法である。しかし，三角形の重心の公式のように座標を扱う場合には，3 つのベクトルを用いて表すことの方が便利な場合もある。従って，本教材では多様な見方を身につけさせたいというねらいと，三角形の重心の公式の一般化に結びつける契機にしたいという思いからこの方法を用いることにした。

(2) 授業展開の工夫

教科書には，単元の終わりに発展が載っている場合があるが，内容が難しく生徒が身構えてしまうことが多い。本教材では，次のような式変形が発展的な部分である。



D は辺 AB を 3 : 1 に内分する点だから

$$\overrightarrow{d}=\frac{\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}}{4}\cdots③$$

M は辺 AC の中点より

$$\overrightarrow{m}=\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}}{2}\cdots④$$

③，④から，$\overrightarrow{a}$ を消去する。

$$4\overrightarrow{d}-2\overrightarrow{m}=3\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$$

移項して

$$4\overrightarrow{d}+\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{m}$$

両辺に $\frac{1}{5}$ をかけて

$$\frac{4\vec{d}+\vec{c}}{5}=\frac{3\vec{b}+2\vec{m}}{5}$$

となる。ここで，$\frac{4\vec{d}+\vec{c}}{5}$ は線分CDを $4:1$ に内分する点の位置ベクトルである。つまり線分CD上のある点の位置ベクトルである。同様に $\frac{3\vec{b}+2\vec{m}}{5}$ は線分BMを $2:3$ に内分する点の位置ベクトルである。つまり線分BM上のある点の位置ベクトルを表す。従って，線分CDとBMの交点Pの位置ベクトルである。よって，

$$\vec{p}=\frac{4\vec{d}+\vec{c}}{5}=\frac{3\vec{b}+2\vec{m}}{5}$$

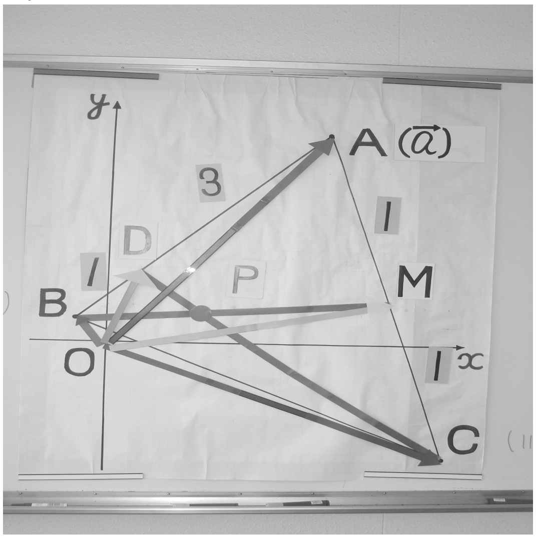
③または④を代入すると

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}}{5}$$

この過程で難しいと思われるのが,「③，④より，$\vec{a}$ を消去する」,「両辺に $\frac{1}{5}$ をかける」,「全体の流れの中で $4\vec{d}+\vec{c}=3\vec{b}+2\vec{m}$ がPとどう関わるのか見通しが立たない」ところである。特に「両辺に $\frac{1}{5}$ をかける」については，なぜ $\frac{1}{5}$ をかけるのかという理由の説明がつきにくい。そこで，それぞれについて次のような工夫をした。

(i)「③，④より，$\vec{a}$ を消去する」

三角形をかいた模造紙と磁石で作った矢印を用意し，＜問題１ａ＞を説明しながら，図１のように黒板に提示する。そして，$\vec{a}$ を消去する場面で,「最終的には，$\vec{p}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表わしますが，現時点では，線分BMとCDの交点のPを求めるので，Aの位置ベクトルは直接関係ないので一旦外します。」と言って図１から矢印の磁石を外し，次に「図からAの位置ベクトルを外したので，③，④の式からも $\vec{a}$ を消去します。」と言って，図と式変形を対比させながら③，④から，$\vec{a}$ を消去することにした。このように説明することによって，式変形に違和感が無くなると考えた。

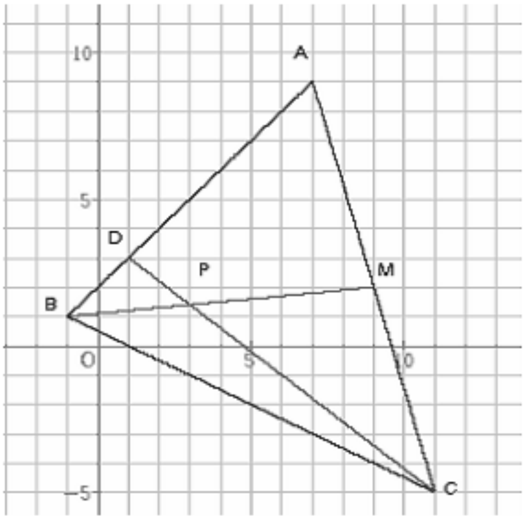


（図１）

(ii)「両辺に $\frac{1}{5}$ をかける」と「全体の流れの中で $4\vec{d}+\vec{c}=3\vec{b}+2\vec{m}$ がPとどう関わるのか見通しが立たない」

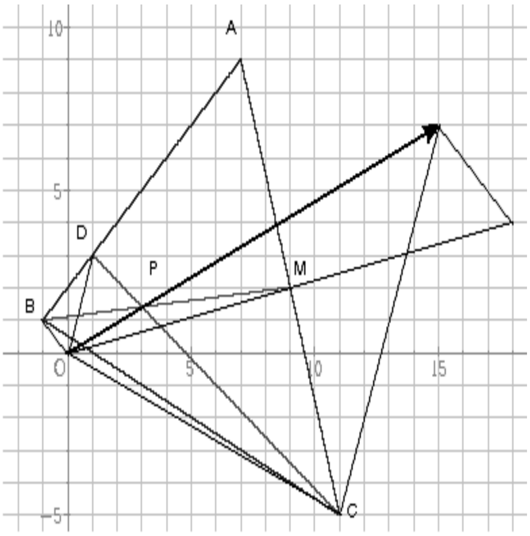
第１節で述べたが，外的な数学的活動を行うと，生徒は通常より目が輝き，主体的に取り組む場合が多い。このことで，生徒の興味・関心を喚起させ，教材の理解を高める効果や創造性の基礎を培うことに繋がると考えられる。そこで,「両辺に $\frac{1}{5}$ をかける理由」や「Pと $4\vec{d}+\vec{c}=3\vec{b}+2\vec{m}$ の関係」の説明が難しいこの場面で，生徒がその段階を理解しやすく，主体的に取り組めるように図２のようなグラフをかいたプリント（文末，資料１）を配布した。このプリントを用いて作図し考察することによって,「両辺に $\frac{1}{5}$ をかける理由」や「Pと $4\vec{d}+\vec{c}=3\vec{b}+2\vec{m}$ の関係」を考えるという外的な数学的活動の時間を設定した。作図とその考察に多くの時間をとることにより，生徒の興味・関心を喚起させ，式のみでは説明しにくい段階を主体的に考えさせ

る工夫をしたのである。



（図２）

作図すると図３のようになる。図から，$\overrightarrow{c}+4\overrightarrow{d}$, $2\overrightarrow{m}+3\overrightarrow{b}$ を表す原点を始点とする有向線分が，ともにPを通る同じ矢印で表されることがわかる。よって，式の中には直接表れていないPが作図を通して $4\overrightarrow{d}+\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{m}$ と関わりを持つ。また同じ矢印で表されることは，$4\overrightarrow{d}+\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{m}$ より当然の結果であるが，日頃，式でしか考えていない生徒にとっては，図から再確認できることはベクトルの幾何的見方を養う上で大きな意味があると考えられる。また，正確に図をかく作業からのみ得られる結果なので達成感もある。



（図３）

さらに，作図したベクトルの終点をEとすると，$4\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ であるからベクトルの性質を使って△PODと△PECが相似になることがわかる。

（相似の証明）

△PODと△PECにおいて

$4\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ より（直線OD）//（直線CE）よって，錯角が等しいから

$\angle \mathrm{PDO}=\angle \mathrm{PCE}$

$\angle \mathrm{POD}=\angle \mathrm{PEC}$

二角が等しいから　△POD∽△PEC

△PODと△PECが相似であることがわかれば，$4\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ よりベクトルの性質を使って相似比が1 : 4であることがわかる。このことから，$\mathrm{OP}=\frac{1}{5}\mathrm{OE}$ であることが導かれ，「$4\overrightarrow{d}+\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{m}$ の両辺に $\frac{1}{5}$ をかける」ことの理由が説明ができる。ここでは，相似や相似比を示すために，ベクトルの性質が使われたり，相似の性質からベクトルの式変形を導いたりする。中学校で学習した相似のような初等的な性質を用いることで，生徒の意欲も高まるであろうし，これも授業展開における工夫の一つである。

4. 授業のねらい

「外的な数学的活動を取り入れた授業」,「ベクトルの発展的な内容」という教材制作の目的から授業のねらいを次の4つに設定した。

(A) **ベクトルを自ら作図し考察する数学的活動を通して，式の意味を考えたり，式変形を予想したり理解することができる。**

(B) **「ベクトル」と単元「図形と方程式」とを比較することによってベクトルの有用性を感じることができる。**

(C) **1つの問題に対して，違った視点から考えられることを理解する。**

(D) **数学的活動の楽しさを知る。**

5. 授業実践

場所：岐阜県立長良高等学校

日　程	平成 19 年 1 月 23 日　2 限	平成 19 年 1 月 26 日　6 限
クラス	文系 41 人	理系 35 人

1 時間（50 分）分の授業を 2 クラスで行った。教材の主旨は同じであるが，1 回目（1 月 23 日に実践）の反省をふまえ，2 回目（1 月 26 日に実践）は多少内容を変更した。

(1) １回目（文系 41 人）

本文の最後に示す指導案（文末，資料２）をもとに授業を実践した。

(a) 今回用いた問題

＜問題１ａ＞は先に紹介

＜問題２ａ＞

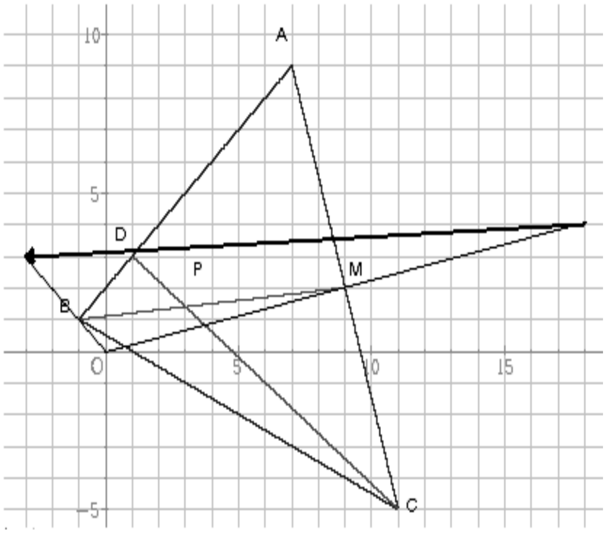
> 3 点 A($\overrightarrow{a}$), B($\overrightarrow{b}$), C($\overrightarrow{c}$) を頂点とする△ABC において，辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D($\overrightarrow{d}$)，辺 AC の中点を M($\overrightarrow{m}$) とし，線分 BM，CD の交点を P($\overrightarrow{p}$) とする。$\overrightarrow{p}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ を用いて表せ。

(b) 授業の流れ

＜問題１ａ＞を導入とし，それを一般化した＜問題２ａ＞を発展の問題とした。＜問題２ａ＞を解決する過程で図２をかいたプリント（資料１）を配り数学的活動の場面とした。特に，作図と作図の結果から気付くことに対する考察に時間をかけた。最後に，＜問題１ａ＞をベクトルを使って解き直し，まとめとした。

(c) 授業の様子

＜問題１ａ＞は，計算に予想以上の時間がかかり，これを考えているときは受動的な雰囲気であったが，＜問題２ａ＞を解決する過程で図２をかいたプリントを配り数学的活動に移ると，自ら作図することに興味をもったようで，生徒は主体的に活動するようになった。生徒の進度には個人差があり，矢印の平行移動ができなかったり，ベクトルの足し算を一つの矢印で表せなかったり，間違った作図（図４）をしたりする生徒もいたが，隣に相談したり，直接教員に質問したりと前向きであった。作図した矢印が重なったときに，素直に感動している生徒もいた。考察の場面では,「作図した矢印が一致する」,「作図した矢印がどちらもＰを通る」には気付いたようであったが，このように発見することに慣れていない感じで,「相似な三角形」に気付く生徒はわずかであった。「相似になっている」という意見が出た後は，多くの生徒が自ら作図した図を一斉に見直していた。生徒が主体的になったことで，最後のまとめまでクラスの集中力が持続していた。



（図４）

(2) ２回目（理系 35 人）

１回目の授業を終えたときの授業者の反省から２回目は＜問題１ａ＞など３点を変更した。

変更１

＜問題１ａ＞を解くのに予想よりも時間がかかったため，まとめの時間が不足した。その原因は，計算の過程に分数が多く現れたためだと考えた。

＜問題１ａの解答＞

D は辺 AB を 3 : 1 に内分する点だから

$$\frac{1\times 7+3\times(-1)}{3+1}=1$$

$$\frac{1\times9+3\times1}{3+1}=3,\ \mathrm{D}(1,3)$$

M は辺 AC の中点より

$$\frac{7+11}{2}=9$$

$$\frac{9+(-5)}{2}=2,\ \mathrm{M}(9,2)$$

直線 BM の方程式は

$$y=\frac{1}{10}x+\frac{11}{10}\ \cdots ⑤$$

直線 CD の方程式は

$$y=-\frac{4}{5}x+\frac{19}{5}\ \cdots ⑥$$

⑤，⑥ より交点の座標を求めると，$\mathrm{P}(3,\frac{7}{5})$

そこで，２回目は計算の過程に分数が現れないように<問題１ｂ>に変更した。

<問題１ｂ>

3 点 A(1,13), B(−3,1), C(3,−1) を頂点とする△ABC において，辺 AB を 3:1 に内分する点を D，辺 AC の中点を M とし，線分 BM，CD の交点を P とする。このとき P の座標を求めよ。

<問題１ｂの解答>

D は辺 AB を 3 : 1 に内分する点だから

$$\frac{1\times1+3\times(-3)}{3+1}=-2$$

$$\frac{1\times13+3\times1}{3+1}=4,\ \mathrm{D}(-2,4)$$

M は辺 AC の中点より

$$\frac{1+3}{2}=2$$

$$\frac{13+(-1)}{2}=6,\quad \mathrm{M}(2,6)$$

直線 BM の方程式は

$$y=x+4\ \cdots ⑦$$

直線 CD の方程式は

$$y=-x+2\ \cdots ⑧$$

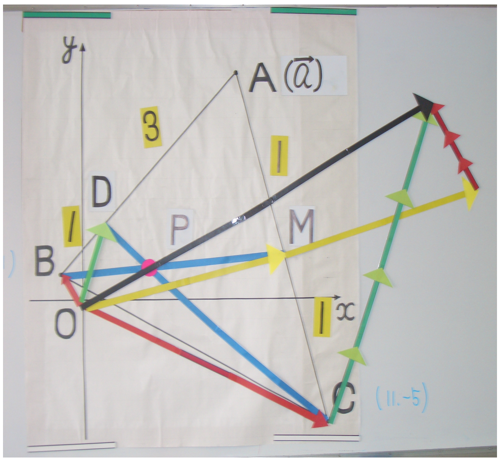
⑦，⑧より交点の座標を求めると，$\mathrm{P}(-1,3)$

変更２

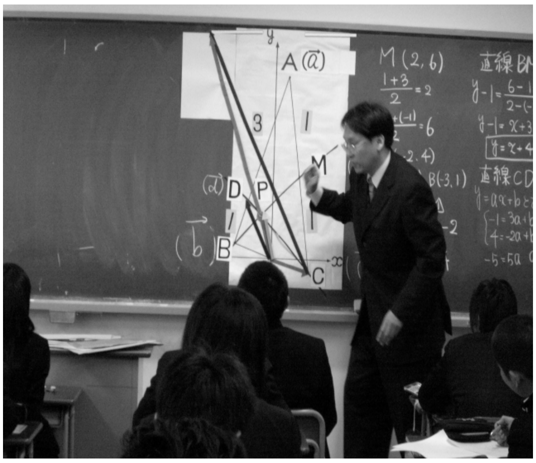
１回目は図の考察で，相似な三角形に気付く生徒が少なかった。その原因を，作図したときに矢印が多く見づらい点だと考えた。そこで次の２点を変更することにした。

１つ目は，生徒に配る図２のプリント（資料１）の配色である。プリントでは，△ABC に黒，線分 BM と CD に赤を使った。そのため，赤が目立ちすぎて相似な三角形が見えにくくなっているのではと考えた。そこで今回は色を黒に統一した。

２つ目は，黒板に提示する図である。１回目の授業では生徒が作図した通り，黒板に磁石で作った矢印を貼った（図５）。そこで今回は，黒板に貼る磁石で作った矢印を精選し，原点を始点とした $\vec{c}+4\vec{d}$ の表す１本の矢印が強調されるようにした（図６）。



（図５）



（図６）

変更３

<問題２ａ>は,「$\vec{p}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表すこと」と「交点の座標の一般化」を求める

問題である。そこで小問に分けた方が，それぞれをより強調できると考え，＜問題２ｂ＞のように問題を変更した。

＜問題２ｂ＞

3 点 A($\overrightarrow{a}$)，B($\overrightarrow{b}$)，C($\overrightarrow{c}$) を頂点とする△ABC において，辺 AB を 3:1 に内分する点を D($\overrightarrow{d}$)，辺 AC の中点を M($\overrightarrow{m}$) とし，線分 BM，CD の交点を P($\overrightarrow{p}$) とする。

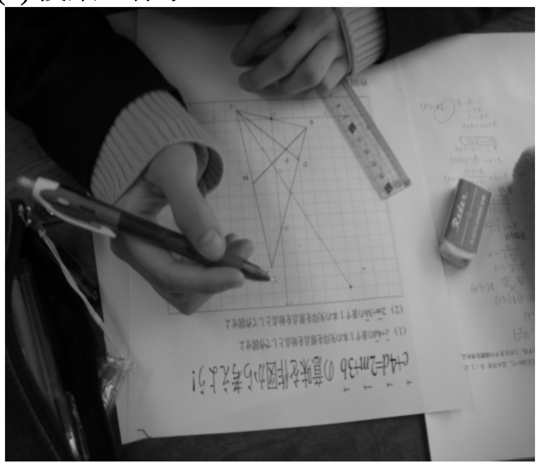
(1)$\overrightarrow{p}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$,$\overrightarrow{c}$を用いて表せ。

(2)(1) を用いて＜問題１ｂ＞を解け。

(b) 授業の流れ

授業の流れは１回目と同じである。

(c) 授業の様子



（図７）

＜問題１ｂ＞に対しては，予想通り１回目の実践より時間がかからなかった。しかし，授業に対する生徒の姿勢は１回目と同様に受動的であった。＜問題２ｂ＞を解決する過程で（図２）をかいたプリントを配り数学的活動に移ると，１回目と同様，自ら作図することに興味をもったようで，主体的になった。理系のクラスであったが，矢印の平行移動ができなかったり，ベクトルの足し算を一つの矢印で表せなかったり，間違った作図をする生徒が文系と同じぐらいの割合で見受けられた。日頃，文系と理系で計算処理能力の違いを感じていたが，作図については文系と理系の差を感じなかった。ただ，理系では作図するとき最終的な矢印のみをかく（図７）生徒が多数みられ，このことが相似な三角形を発見する妨げになっていた。

このように，図から考察することに慣れていないことから，授業を１回目よりも工夫したにも関わらず「相似な三角形」に気付く生徒は文系とあまり変わらず少なかった。ただ，相似であることがわかると，とても興味を持ったようであった。今回も生徒が主体的になったことで，最後のまとめまでクラスの集中力が持続していた。

6. アンケート結果と考察

(1) アンケート結果

授業後に選択式の問いと記述式の感想の混じったアンケートを行った。記述式の回答は全て挙げることができないので考察で主なものだけを紹介する。ここでは，まず選択式の問いの結果を示す。今回の回収数は，文系 36 人，理系 29 人である。尚，百分率の数値は小数第 2 位を四捨五入してある。

（Q1）授業の内容は理解できましたか？

	文系	理系	合計
できた	44.4 %	34.5 %	40.0 %
だいたいできた	55.6 %	58.6 %	56.9 %
あまりできなかった	0.0 %	6.9 %	3.1 %
まったくできなかった	0.0 %	0.0 %	0.0 %

（Q2）考える時間は十分でしたか？

	文系	理系	合計
多い	5.6 %	13.8 %	9.2 %
少し多い	11.1 %	13.8 %	12.3 %
ちょうど良い	66.7 %	62.1 %	64.6 %
少し少ない	16.7 %	10.3 %	13.8 %
少ない	0.0 %	0.0 %	0.0 %

（Q3）「図形と方程式」の内容と「ベクトル」の内容を比較した授業はどうでしたか？

	文系	理系	合計
おもしろかった（楽しかった）	41.7 %	24.1 %	33.8 %
どちらかというとおもしろかった	30.6 %	31.0 %	30.8 %
ふつう	27.8 %	37.9 %	32.3 %
どちらかというとおもしろくなかった	0.0 %	3.4 %	1.5 %
おもしろくなかった	0.0 %	3.4 %	1.5 %

（Q4）授業でベクトルの有用性を感じることができましたか？

	文系	理系	合計
できた	11.1 %	17.2 %	13.8 %
できた気がする	66.7 %	51.7 %	60.0 %
できなかったような気がする	5.6 %	20.7 %	12.3 %
できなかった	5.6 %	0.0 %	3.1 %
どちらともいえない	11.1 %	10.3 %	10.8 %

（Q5）式変形が理解できましたか？

	文系	理系	合計
できた	27.8 %	34.5 %	30.8 %
できた気がする	66.7 %	48.3 %	58.5 %
できなかったような気がする	2.8 %	10.3 %	6.2 %
できなかった	0.0 %	3.4 %	1.5 %
どちらともいえない	2.8 %	3.4 %	3.1 %

(2) 考察

数学的活動を取り入れることによって授業は活発になったが，授業のねらいの達成にはどう結びついたのか，アンケート結果をもとに考察する。

（a） **授業のねらい（A）について**

(Q5)「式変形が理解できましたか？」という質問に対して，全体で約 89 %の生徒ができた，できた気がすると回答した。

またアンケートに

・自分で図を書いたので分かりやすかった。
・予想することはいいことだと思う。想像力が養えるので，この授業はためになったと思う。
・式１つ１つのもつ意味まで分かって感動でした。
・ベクトルの勉強は，決まっている型にはめるだけで，答えまでの計算の意味を全く理解せずに解いていた。今日の授業は式１つ１つのもつ意味までわかって感動でした。
・図から式を求めると，式が正しいことに確信がもてた。
・式の意味を作図から考えるのは初めてだったと思うけど，作図によって疑問が解消されてよかったです。

などのように作図を肯定的にとらえている感想が多かった。これらのことから，このねらいは達成されたと考える。

（b） **授業のねらい（B）について**

（Q4）「ベクトルの有用性を感じることができましたか？」という質問に対して，全体で約 14 %の生徒ができたと答え，できた気がするを合わせると約 74 %になる。また,（Q3）「図形と方程式の内容とベクトルの内容を比較した授業はどうでしたか？」という質問に対して，全体で約 34 %の生徒がおもしろかった（楽しかった）と答え，どちらかというとおもしろかった（楽しかった）を合わせると約 65 %になる。アンケート結果からこのねらいは概ね達成できたと考えられる。

しかし，クラスごとにみると明らかな差がある。（Q4）の結果では，できた，できた気がすると回答した生徒が文系で約 78 %なのに対し理系で約 69 %,（Q3）の結果では，おもしろかった（楽しかった），どちらかというとおもしろかった（楽しかった）と回答した生徒が文系で約 72 %なのに対し理系で約 55 %であった。第 4 節で述べたように，1 回目の授業の反省からいくつかの修正を行って 2 回目にのぞんだ。そのこともあり，2 回目の方が数学的活動の時間が十分とれ，授業全体に余裕を持てた。当然授業者としては，2 回目に行った理系の授業の方が満足度が高かった。それにも関わらず，文系のクラスの方が授業を肯定的に受けとめているというアンケート結果には驚きがある。考えられることは，導入に用いた＜課題１＞を 2 回目の授業で簡単にした点である。そのため，既習の考え方で苦労しなかった分，ベクトルの有用性が感じられなかったのかもしれない。

（c） **授業のねらい（C）について**

アンケートの

・違う観点から問題を見つめることができ，よかったと思えます。

・違う方向からの考え方で問題が解けておもしろかった。
・工夫した解き方なので，考えが養われると思った。
・普段の授業ではそのようなことを考えないのでおもしろかった。
・いろいろな考え方があるのだと分かった。
・普段こういうことはあまりやらないため，慣れておらず少し戸惑いました。でも，新しい考え方が分かり面白かったです。

というような感想から，このねらいは達成されたと考える。

（d） **授業のねらい（D）について**

作図や作図したものを考察する数学的活動の場面になった途端，積極的に取り組み，とても活動的で明るい雰囲気になった。また，アンケートでは

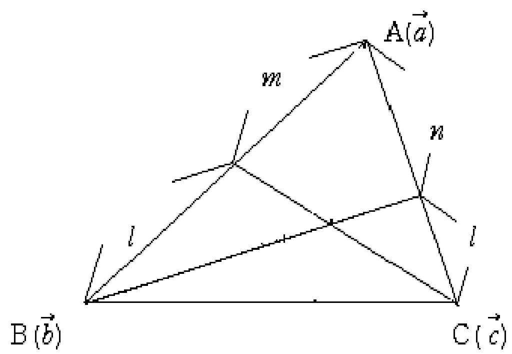
・わかりやすかったし面白かったです。
・数学は苦手であまり楽しいと思わないけどとても楽しい授業でした。
・自分で式変形を予想するなど，自分で考え出して出来ると嬉しいし，考え出して解くことがすきなので楽しかったです。
・たくさん色々なことを考えて大変だったけど楽しくできました。わかったときはかなり嬉しかったです。

などの楽しい授業だったという感想が多かった。これは，数学的活動に多くの時間を割いたことと，授業が理解できたからだと考えられる（Q1）。これらのことから，このねらいについては達成されたと考える。

7. 今後の課題

この授業を通して，発展的な内容であっても外的な数学的活動を取り入れるなど工夫することによって，興味･関心を喚起させる理解しやすい授業として展開できることがわかった。感想にも「毎時間こんな授業だったら絶対数学が楽しくなると思いました。」とかいた生徒がいる。また今回の活動を通して，生徒が早急に答えのみを求めるため，答えを導き出す過程の中に見え隠れする大切な情報を見過ごしがちになっていることもわかった。よって，考察する力を養うためにもこのような授業を今後も行っていく必要性を感じる。しかし，１年間授業を行う上で毎時間今回のような外的な数学的活動を取り入れることはできないことから，外的な数学的活動を取り入れる時期を考える必要がある。そこで今後は，外的な数学的活動を取り入れた新たなる教材の開発と，導入する時期について研究していきたい。

また，本時は1時間しかなかったため，比を固定したが，比も文字で表わすことによって，さらに一般化することができる。比を文字で表し一般化するには次のように考えればよい。



3 点 A($\overrightarrow{a}$)，B($\overrightarrow{b}$)，C($\overrightarrow{c}$) を頂点とする△ABC において，辺 AB を $m:l$ に内分する点を D，辺 AC を $n:l$ に内分する点を E，線分 BE，CD の交点を P とする。このとき D，E，P の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{d},\overrightarrow{e},\overrightarrow{p}$ とすれば，

$$\overrightarrow{d}=\frac{l\overrightarrow{a}+m\overrightarrow{b}}{m+l}\cdots⑨$$

$$\overrightarrow{e}=\frac{l\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{c}}{n+l}\cdots⑩$$

⑨から，$(m+l)\overrightarrow{d}=l\overrightarrow{a}+m\overrightarrow{b}$
⑩から，$(n+l)\overrightarrow{e}=l\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{c}$

両辺をひいて

$$(m+l)\overrightarrow{d}-(n+l)\overrightarrow{e}=m\overrightarrow{b}-n\overrightarrow{c}$$

変形して

$$(m+l)\overrightarrow{d}+n\overrightarrow{c}=(n+l)\overrightarrow{e}+m\overrightarrow{b}$$

両辺を $l+m+n$ で割って

$$\frac{(m+l)\overrightarrow{d}+n\overrightarrow{c}}{l+m+n}=\frac{(n+l)\overrightarrow{e}+m\overrightarrow{b}}{l+m+n}$$

この左辺，右辺のベクトルは，それぞれ直線 CD，BE 上の点の位置ベクトルで，これらが等しいから，交点 P の位置ベクトルである。よって

$$\overrightarrow{p}=\frac{(m+l)\overrightarrow{d}+n\overrightarrow{c}}{l+m+n}=\frac{(n+l)\overrightarrow{e}+m\overrightarrow{b}}{l+m+n}$$

⑨または⑩ を代入すると

$$\overrightarrow{p}=\frac{l\overrightarrow{a}+m\overrightarrow{b}+n\overrightarrow{c}}{l+m+n}\quad\cdots\text{⑪}$$

ここで求めた⑪の式が，第 2 節で述べたように三角形の重心の公式に繋がる。三角形の重心は,「三角形の 1 つの頂点とそれに対する辺の中点とを結ぶ線分を中線といい，三角形の 3 つの中線の交点を，その三角形の重心という。」と中学３年の教科書 [3] の発展に紹介してある。よって，$l:m:n=1:1:1$ を⑪に代入すると

$$\overrightarrow{p}=\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{3}$$

となる。

さらに，A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2) とおくことにより，$\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$, $\overrightarrow{c}=(c_1, c_2)$ と成分表示して⑪に代入すれば,

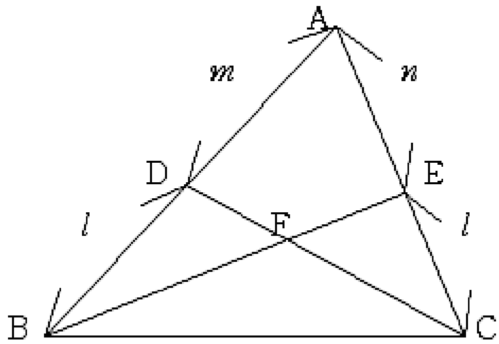
$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}&=\frac{l(a_1, a_2)+m(b_1, b_2)+n(c_1, c_2)}{l+m+n}\\&=\left(\frac{la_1+mb_1+nc_1}{l+m+n},\frac{la_2+mb_2+nc_2}{l+m+n}\right)\end{aligned}$$

となり，P の座標が

$$\left(\frac{la_1+mb_1+nc_1}{l+m+n},\frac{la_2+mb_2+nc_2}{l+m+n}\right)$$

と一般化でき,「図形と方程式」で学習する重心の座標や，Menelaus の定理を用いて求める方法（以下に示す）と比較するなどの発展性がある。Menelaus の定理は，改訂前の「平面幾何」（数学Ａ）[4] の内容にあったが，現在は高等学校の指導内容には入っていない。しかし，紹介してある高校生向けの問題集も多いので取り扱い可能だと考えられる。

Menelaus の定理を用いて求める方法



$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1$$

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{l}{l+n}\cdot\frac{m}{l}=1$$

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}}=\frac{l+n}{m}$$

よって，BF:FE $=l+n:m$

E は線分 AC を $n:l$ に内分する点だから

E$\left(\frac{la_1+nc_1}{n+l},\frac{la_2+nc_2}{n+l}\right)$

F は線分 BE を $l+n:m$ に内分する点だから

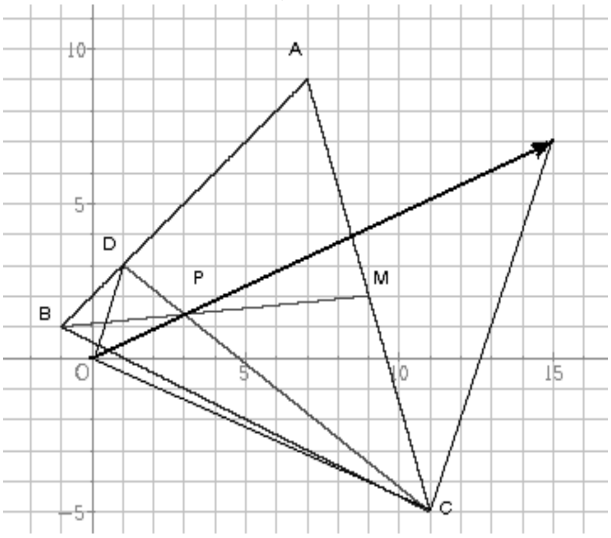
$$\frac{mb_1+(l+n)\times\frac{la_1+nc_1}{n+l}}{(l+n)+m}=\frac{la_1+mb_1+nc_1}{l+m+n}$$

$$\frac{mb_2+(l+n)\times\frac{la_2+nc_2}{n+l}}{(l+n)+m}=\frac{la_2+mb_2+nc_2}{l+m+n}$$

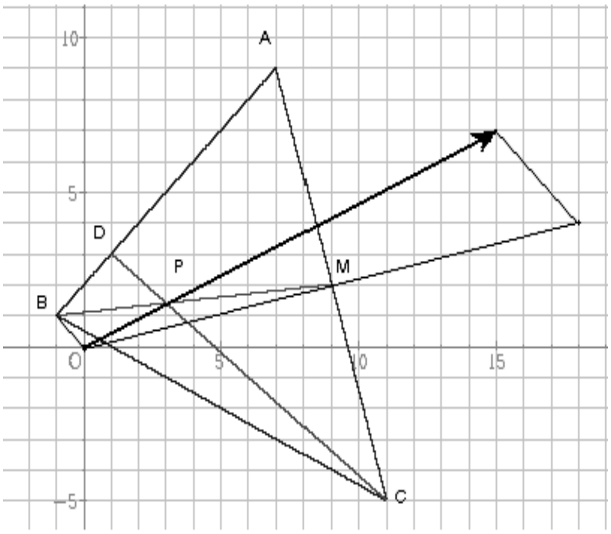
よって，F$\left(\frac{la_1+mb_1+nc_1}{l+m+n},\ \frac{la_2+mb_2+nc_2}{l+m+n}\right)$

しかし，現在の高等学校のカリキュラムではこの段階まで普段の授業で時間を割くことが難しい。今後は今回の実践をもとに，どのような教材を開発すれば生徒にそこまでの関心を抱かせることが出来るのか研究していきたい。

さらに，第３節で述べた作図の結果として現れる相似な三角形について，次の点が疑問となっている。それは，図２に $\vec{c}+4\vec{d}$ の表す１本の矢印を原点を始点としてかいたとき（図８）には相似な三角形が現れるが，$2\vec{m}+3\vec{b}$ をかいた場合（図９）には相似な三角形がみつからなかった。最初の△ABC の形によって決まるものだと思うが，今後この点についても考察していきたい。



(図８)



(図９)

参考文献

[1] 文部科学省，1999，高等学校学習指導要領.

[2] 文部科学省，2005，高等学校学習指導要領解説―数学編理数編―，実教出版株式会社.

[3] 吉田 稔 ほか 17 名，2005，新版 中学校数学３，大日本図書.

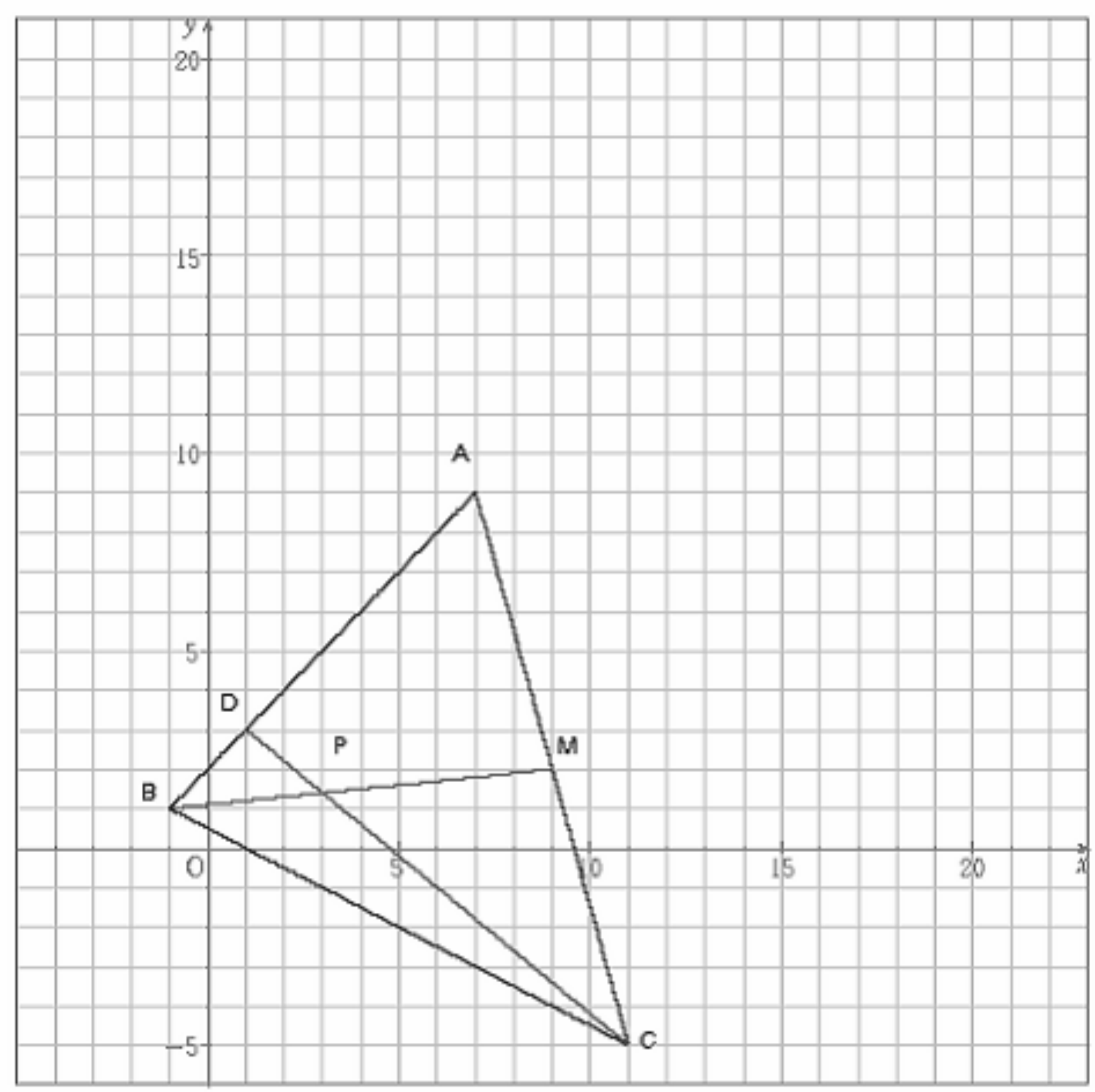
[4] 長尾 汎 ほか９名，2000，改訂版 高等学校 数学Ａ，数研出版.

資料１

$2\overrightarrow{m}+3\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}+4\overrightarrow{d}$ の意味を作図から考えよう！

(1)$2\overrightarrow{m}+3\overrightarrow{b}$ の表す１本の矢印を原点を始点として作図せよ。

(2)$\overrightarrow{c}+4\overrightarrow{d}$ の表す１本の矢印を原点を始点として作図せよ。



作図から気付くこと！

資料２

指導案

指導対象学年	２年（文系４１人）
場　　所	教室
科目名・単元名	数学Ｂ・ベクトル
単元の目標	位置ベクトルによって，平面図形の性質を調べ，ベクトルが問題を解決するための有効な手段の１つになることを理解させる。
学習目標	２直線の交点の座標を求めることを通して，位置ベクトルの有用性を理解する。
評価規準	・「図形と方程式」の内容や,「位置ベクトル」の内容を理解している。 （知識・理解） ・作図に積極的に取り組む。（関心・意欲・態度） ・作図の考察を通して式変形の意味を理解することができる。 （数学的な見方や考え方） ・問題を解くことができる。（表現・処理）

授業に使った問題と宿題

＜問題１ａ＞

３点Ａ (7,9), Ｂ (−1,1), Ｃ (11,−5) を頂点とする△ＡＢＣにおいて，辺ＡＢを 3:1 に内分する点をＤ，辺ＡＣの中点をＭとし，線分ＢM，ＣＤの交点をＰとする。このときＰの座標を求めよ。

＜問題２ａ＞

３点Ａ ($\overrightarrow{a}$), Ｂ ($\overrightarrow{b}$), Ｃ ($\overrightarrow{c}$) を頂点とする△ＡＢＣにおいて，辺ＡＢを 3:1 に内分する点をＤ ($\overrightarrow{d}$)，辺ＡＣの中点をＭ ($\overrightarrow{m}$) とし，線分ＢM，ＣＤの交点をＰ ($\overrightarrow{p}$) とする。$\overrightarrow{p}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ を用いて表し，その結果を用いて＜問題１ａ＞を解け。

＜宿題＞

３点Ａ (2,4), Ｂ (1,5), Ｃ (8,7) を頂点とする△ＡＢＣにおいて，辺ＡＢを 2:1 に内分する点をＤ，辺ＡＣを 1:2 に内分する点をＥとし，線分ＢＥ，ＣＤの交点をＰとする。

（１）Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｐの位置ベクトルを $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{p}$ とするとき, $\overrightarrow{p}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ を用いて表せ。

（２）Ｐの座標を求めよ。

本　時　の　展　開

過程	学習項目 （指導のねらい）	学　習　活　動 （□：指示・説明, ○：発問・活動）	指導上の留意点・観点別評価 （⟹：評価方法）

導入	既習事項を用い問題を解くことができる。	○**＜問題１ａ＞** ○各自問題を解く。 □生徒に発表させる。	・積極的に問題に取り組む。 ⟹ 机間指導で確認。 （関心・意欲・態度） ・前時までの知識で解くことができる。 ⟹ 机間指導・発表で確認。 （知識・理解）
展開	ベクトルを用いて一般化し，交点の座標を求めることができる。 数学的活動の場面	□座標が変化しても対応できるように，位置ベクトルを用いて一般化することを伝える。 ○**＜問題２ａ＞** □位置ベクトルを説明する。 ○内分点の位置ベクトルを説明 □ベクトルの演算を説明する。 □プリントを配布し作図し考察するように指示する。 ○各自作図し考察する。 ○作図から気付くことはないか質問する。 □交点の位置ベクトルを説明する。 □座標と位置ベクトルの成分が一致することを確認する。 ○Ｐの座標を求める。	・内分点の位置ベクトルの公式が使える。 ⟹ 発表で確認。 （表現・処理） ・積極的に作業に取り組む。 ⟹ 机間指導で確認。 （関心・意欲・態度） ・作図を考察することにより式変形の意味を理解することができる。 ⟹ 発表で確認。 （数学的な見方や考え方） ・座標を求めることができる。 ⟹ 発表で確認。 （表現・処理）
まとめ	今日の学習を振り返る。	□位置ベクトルの有用性を確認 □**＜宿題＞**	・宿題に取り組むことにより内容の定着を図る。 ⟹ 宿題を提出させ評価する。 （知識・理解）