岐阜数学教育研究
2006, Vol.5, 49-59

選択数学における授業方法の研究

松野利香[1]，愛木豊彦[2]

算数・数学が好きな児童・生徒の育成をめざし，研究を進めている。そこで，身近なものの中から数学をより楽しく学ぶことはできないだろうかと思い教材開発を行った。今回「鉛筆」に着目し，鉛筆の芯は筆記に全体のうちどれだけ使われているかということをテーマに教材開発を行った。本論文はその教材の内容及び，中学校３年生を対象として行った授業実践についての報告である。

＜キーワード＞鉛筆，円柱，円錐，合同，相似

1. はじめに

IEA 国際数学・理科教育動向調査（TIMSS）[1] によると,「算数・数学の勉強は楽しいか」という質問に対して，強くそう思う，または，そう思うと答える子どもの割合は，小学校４年生で 65 %，中学校２年生で 39 %である。算数・数学の楽しさはどこにあるのだろうか。子どもたちが知っている以上に算数・数学の楽しさは日常生活の様々なところにある。このことを知ってもらいたいと思い，我々は，身近なものを教材化することに目を向けた。その理由は，学校で学習する数学の内容は日常の生活とかけ離れて考えられていることが多く，日常の生活の中で活用されるところまで至っていないと考えられるからである。

そのことを踏まえ，ここで提案する授業は，生徒が今までに慣れ親しんでいると考えられる「鉛筆」をテーマにしたものである。このテーマを決定する際に [2] を参考にした。鉛筆は，シャープペンシルと並ぶ代表的な筆記具である。なにげなく使っているが，鉛筆とシャープペンシルとでは，どちらが得かという問題を考えたことはあるだろうか。「得」というのは，同じ量を書くために使う芯の量について考える必要がある。すると，どちらが安くて済むかという値段の面から見た損得が考えられるだろうし，どちらが無駄にする部分が少ないかという資源の面から見た損得も考えられる。今回は，無駄を後者の意味でとらえた授業の展開について検討した。

このように身近なことに関する疑問を数学を用いて解決することで，数学の実生活への有用性を感じることができ，数学への興味・関心を高めることができたり，自ら考え自ら問題を解決しようとする能力を育てることができたりすると考えた。

2. 教材について

2.1. 教材の説明

本論文で紹介する教材は，鉛筆の芯が実際に筆記のためにどれほど使用されているかを，割合を用いて考察するものである。

このような教材を設定した理由を次に述べる。

- 生活していく中で身近なものの１つである。
- 芯の先は削る動作を何回か行うことで円柱や円錐といった同じ形が繰り返し

[1]岐阜大学教育学部
[2]岐阜大学教育学部，科学研究費（特定領域研究），課題番号　17011034

現れる。

- 身近なものであるがゆえに，どのようなタイミングで削るか，どのくらいの長さになったら捨てるかなど，様々な条件を考えることができる。

２，３番目に示した理由について，具体的に図を用いながら説明する。

鉛筆というのはどのように削られていくのだろうか。この問題を考えるにはいくつかの条件を設定しなければならない。まず，鉛筆を削った直後の芯の形は円錐であり，使い始めて次に削ろうとするときの芯の形は円錐台であるとする（図１）。次に，図１において，いくつかの長さを次のように設定する。

①最初の芯の長さ ℓ mm
②芯の半径 r mm
③削った後に見えている芯全体の長さ a mm
④使う分の芯の長さ b mm

これ以後，特別な表記がない限り長さの単位を mm とする。

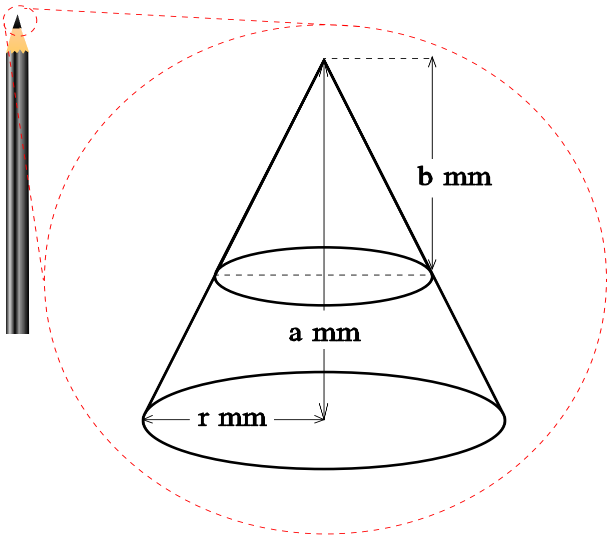


図１

ここで，どれだけ筆記に使われているかを，芯全体に対する割合で表す。芯全体の体積を V，使用した分の体積を V' とする。

まず，芯全体の体積 V について考える。芯全体の形は半径 r，高さ ℓ の円柱であるので，

$$V = \pi \times r^2 \times \ell = \pi r^2 \ell$$

次に使用した分の体積 V' について考える。目に見えている芯の形を図１のような半径 r，高さ a の円錐としている。この円錐の上部分から b の高さ分を使い，そこからまた削り，使うという動作を繰り返すと考える。すると，芯の断面図は次のようにかける（図２）。黒く塗った部分が使用する部分であり，それ以外のところは削られる部分である。

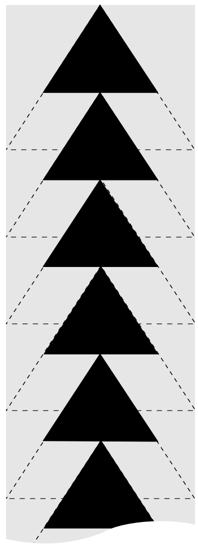


図２

１回で使用する分の形は半径 $\frac{b}{a}r$，高さ b の円錐であり，これが n 個（n 回削れるものとする）あるとする。つまり，n は，

$$bn + a \geqq \ell$$

となる最小の自然数である。このとき，

$$V' = \pi \times (\frac{b}{a}r)^2 \times b \times \frac{1}{3} \times n = \frac{\pi r^2 b^3 n}{3a^2}$$

よって求める割合は，

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{\pi r^2 b^3 n}{3a^2}}{\pi r^2 \ell} = \frac{b^3 n}{3a^2 \ell}$$

例えば，$a = 6, b = 4, \ell = 175$ とすれば $n = 43$ となり，上の式に代入すると，

$$\frac{V'}{V} = \frac{344}{4725}$$

である。

違う条件についても考えることができる。使用する部分にのみ着目し，高さ b の円錐が n 個あるとする。つまり，n は，

$$bn \geqq \ell$$

となる最小の自然数である。このとき，求める割合の式は同じであるが，n の値が異なってくる。例えば，$a = 6, b = 3, \ell = 174$ とすれば，図３のような断面図ができ，$n = 58$ となる。これらを上の式に代入すると，

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{12}$$

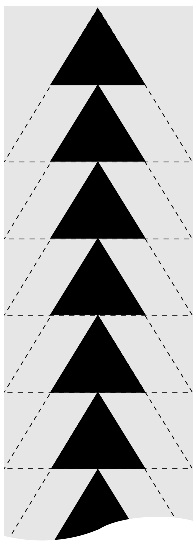


図３

一方，シャープペンシルは，器具から抜けてしまう長さがおおよそ一定である。実際に抜けてしまう芯を集めてみたところ，9mm 〜14mm であることが分かった。芯の長さは 60mm であるため，使用している芯の体積の割合は $\frac{46}{60}$〜$\frac{51}{60}$ となり，圧倒的にシャープペンシルの芯の使用割合の方が高いことがわかる。

次に，１回で使用する部分の円錐の半径が $\frac{b}{a}r$ になることについて述べる。ここでは，授業で用いる「$a = 2b$ ならば１回で使用する円錐の半径が $\frac{1}{2}r$ になる」ことを証明する。

まず，芯の断面図（図４）における仮定は次の通りである。芯の断面は，AB を対称軸とする線対称な図形であり，四角形 ABCD は長方形である。AB の中点を E とし，E を通る AD に平行な直線をひき，AC，CD との交点をそれぞれ F，G とする。このとき，「AE=BE ならば EF=$\frac{1}{2}$BC」を示せばよい。以下の証明の記述の仕方は [3,4,5] を参考にした。

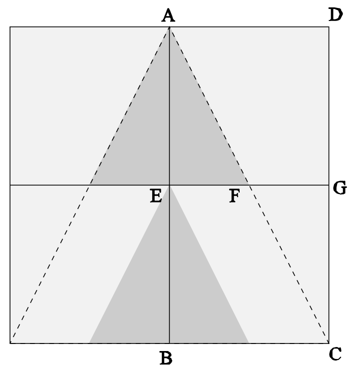


図４

三角形の合同条件を用いた証明

「AE=BE ならば△ AEF ≡△ CGF」を示す。

△ AEF と△ CGF において，

仮定（AE=BE=CD）より，AB=CD…①

また，AB//CD より，

錯角だから，∠ AEF=∠ CGF…②

∠ EAF=∠ GCF…③

よって，①，②，③から，

１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

△ ABC ≡△ CGF

従って，EF=GF なので，EF=$\frac{1}{2}$GE

BC=GE より，EF=$\frac{1}{2}$BC

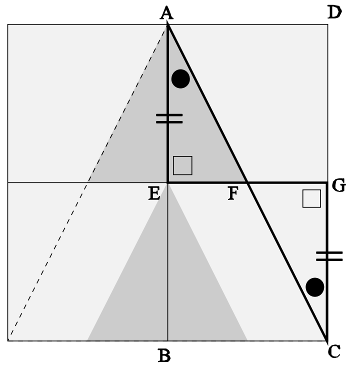


図５

三角形の相似条件を用いた証明

「AE=BE ならば△ AEF ∽△ ABC」を示す。

△ AEF と△ ABC において，

共通な角だから，∠ EAF=∠ BAC…①

同位角だから，∠ AEF=∠ ABC…②

よって，①，②から，

２組の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$$

従って，2AE=AB より，EF:BC=1:2 となり，

$$EF=\frac{1}{2}BC$$

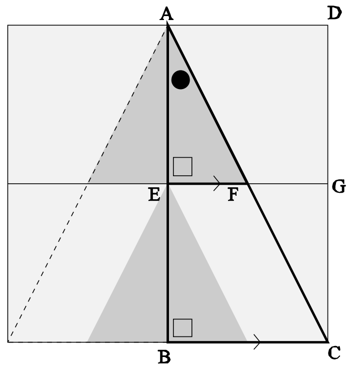


図６

中点連結定理を用いた証明

「AE=BE ならば $EF=\frac{1}{2}BC$」を示す。

AE=EB かつ，EF//BC なので，中点連結定理の逆から，AF=FC となる。よって，F は AC の中点である。さらに，△ ABC において E, F はそれぞれ, AB，AC の中点であり，EF//BC なので，

$$EF=\frac{1}{2}BC$$

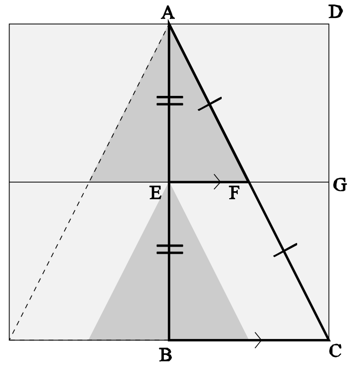


図７

このように，様々な証明を考えることができる。

また，現実的な問題を考えると，芯を末端まで使うことはできない。最後まで使うには短くなりすぎて不可能だからである。使っている途中に芯が折れて削りなおすという場合も考えられるし，形も円錐台とは限らない。人によってもどのようなタイミングで削るか，どのくらいの長さになったら捨てるかなど使い方が異なっているため，設定する条件も異なってくる。こういった様々な条件をふまえながら問題を解いたり，自分で条件を見つけたりする活動を通して，解決したことをもとに，新たな問題を見つける能力が育成できると考えた。

2.2 教材のねらい

第１節，第2.2節で述べたことをふまえ，本教材のねらいを以下の３点とした。

(1) 自ら考え，自ら問題を解決しようとする態度を育てる。
(2) 解決したことをもとに，新たな問題を見つけることができる。
(3) 数学の実生活への有用性を感じることができ，数学への興味・関心を高めることができる。

3. 実践の概要

講座名：「鉛筆の実態」
場　所：岐阜県岐阜市立青山中学校
実地日：平成 18 年 12 月 22 日第２校時
対　象：３年選択数学受講者５名

3.1 授業の流れ

授業の計画は，指導案（資料１）で示している。

問題提示

「鉛筆の芯はどれだけ使っているのか」という問題を提示し，鉛筆１本では，芯全体の体積のうち筆記にどれだけの体積を使用しているかということを考える。このとき，実際にどれくらいになるかを予想させる。

課題設定

問題で提示した内容を数学を用いて解決ができるよう，鉛筆の芯の体積に注目し，筆記に使用する体積の割合を求めるため,「鉛筆の芯の使う体積の割合を求めよう」という課題を設定する。このとき，鉛筆の条件を５つ提示する。それぞれの数値は [6] を参考にしている。条件は次のとおりである。

①芯の長さ　174mm
②芯の半径　1mm
③削った後に見えている芯全体の長さ 6mm
④使う分の芯の長さ　3mm
⑤芯は最後まで使いきる

以上の条件から，鉛筆の断面図は次のようにかける（図８）。

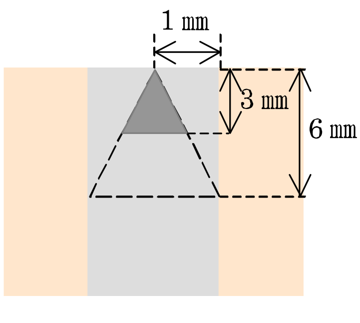


図８

個人追究

学習プリント（資料２参照）を活用しながら個人追究を行う。この際，実際に使用している部分の形は円錐であることは容易に気づくことができる。しかし，その円錐の底面の半径が $\frac{1}{2}$ mm である（図９）ことを，直感的にしか結論づけることができない生徒が多いと考えられる。そこで，どうしてそうなるのかということを既習事項から明らかにさせるような発問を意識的にしていく。今回実践する中学校では,「相似と比」の単元における「三角形の相似条件」の内容をすでに学習していたので，２年生で学習する「三角形の合同条件」だけでなく,「三角形の相似条件」も既習事項とみなし，半径を求めるときの根拠の１つとした。

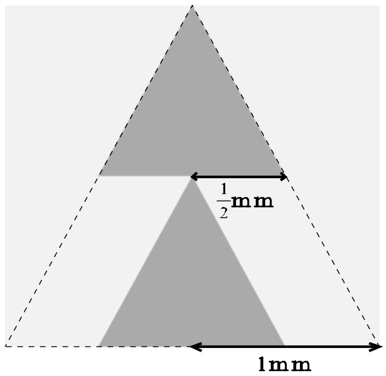


図９

意見交流・まとめ

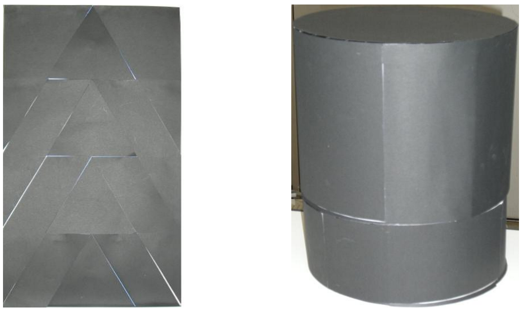
個人追究したことを全体で交流しあう。

生徒が交流したことを納得できたかどうかを確認し，課題に対する本時の内容をまとめる。本時では,「鉛筆の芯の使う体積の割合を求めよう」が課題であったので，鉛筆の使う芯の体積の割合は，三角形の合同条件や相似比を使って必要な長さを求めたり，円錐の体積を求める公式を用いたりすることで，$\frac{1}{12}$ しか使っていないことがわかるということをまとめる。

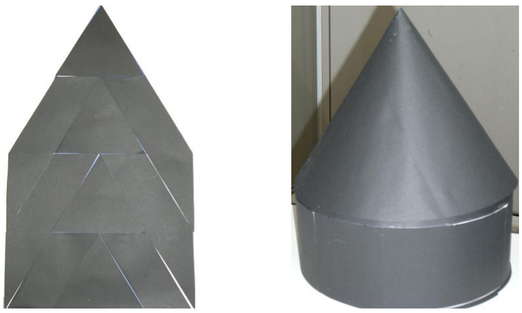
3.2 活動の様子

問題提示～課題設定

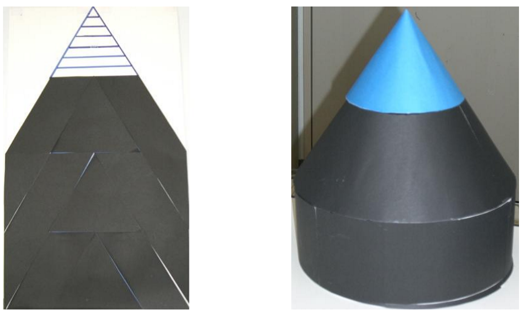
鉛筆の削れて行く様子がイメージしやすいように，断面図と立体模型の両方を用いて下記の流れで示した。



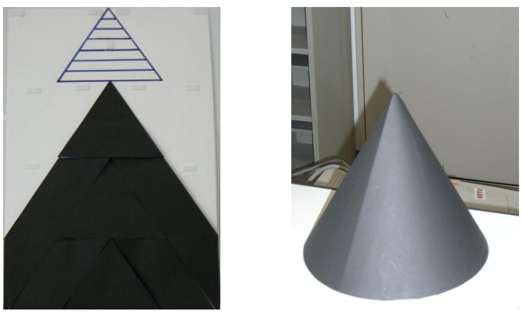
① 最初の状態



② 削る



③ 半分まで使う（灰色：使用部分）



④ 削る

個人追究

生徒たちはまず，学習プリントを活用しながら，鉛筆の芯をどのように使っていくかを断面図として描いていた。図から，同じ形が繰り返して続く（②→③→④＝②→③→…）ので，まず１回目に使う分の体積を求めていた。次に，それが何回繰り返すことができるかを計算し，使う分の体積の合計を求めていた。そして，芯全体の体積を求め，鉛筆の芯の使う体積の割合を求めていた。

意見交流・まとめ

全体の場で，課題となっている鉛筆の芯の使う体積の割合をどのように求めていったかを交流した（写真１）。

ここで１回分の使う芯（円錐）の半径を求める際の生徒の考えを紹介する。

生徒Ａ…三角形の相似条件を用いながら，下の図（図 10）のような相似な三角形があることを見つけて円錐の半径を求めた。

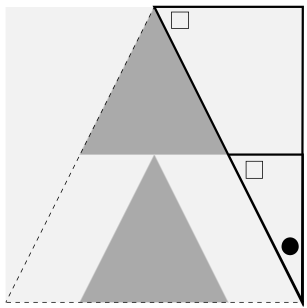


図 10

生徒Ｂ…具体的に数が与えられているので，数と座標を対応させてグラフを描くことで結論づけた。（図 11）しかし，図を用いれば，より正確にいえることに気づき，生徒Ａとは異なる相似な図形を見つけて円錐の半径を求めた。

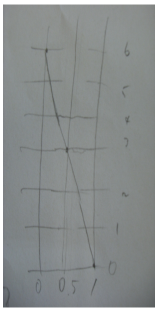


図 11

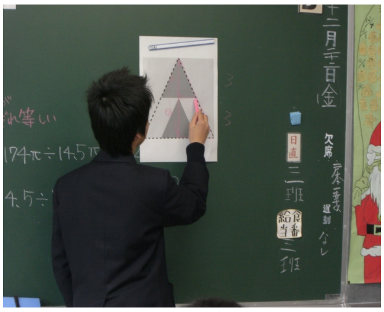


写真 1

4. 授業に対する考察

授業後にアンケートを実地した。その回答を紹介する。ただし，回収したのは，５名中４名分である。

生徒の感想

- 今日の授業では芯が $\frac{1}{12}$ しか使っていないというのに驚いた。こういう所で数学があるのはおもしろいと思った。また，計算の途中の段階で，〜そうだからというのではなく，しっかり何故かと考えなければならないと分かった。
- 分からないことがたくさんあったけど，教え導かれて気づき，いろいろと分かったので，おもしろかったです。これからは，自分も身の回りにあることに興味を持ち，それを数学と関係させていきたいです。できればまた来てほしいなぁと思った。
- また数学の奥深さを知れました。割合は，頭でなんとなく出し方を考えれそうだったので，一つ一つやっていったら，ちゃんと出てきたので良かったし，面白かったです。また相似（中点連結定理）から，0.5mm とか求めることができたのもまた面白かったので良かったです。
- 僕は鉛筆が体積のときに，削っているところを求めて，少しずつ考えました。考えて分かることができたので良かったです。求めるのは大変だったけど，簡単だったので，いいと思いました。また学習するようにします。

アンケート結果

① 本教材に対する興味・関心

本教材が生徒にとって興味・関心を持てるものであったかどうかを調査した。

質問：今日の授業はどうでしたか？
結果：楽しかった　　４人
　　　普通　　　　　０人
　　　楽しくなかった　０人

② 本教材の難易度

本教材の難易度が生徒にとって難しかったかどうかを調査した。

質問：難易度はどうでしたか？
結果：難しかった　　１人
　　　ちょうどよかった　３人
　　　簡単だった　　０人

③ ねらいの達成度

今回の実践において，教材のねらいの１つである「解決したことをもとに，新たな問題を見つけることができる。」が達成されたかどうかを調査した。

質問：鉛筆の芯の使う体積の割合を求める際，加えたり変えたりしてみたい条件はありますか？
結果：ある　２人
　　　ない　２人
質問：「ある」と答えた人のみ。それはどんな条件ですか？
結果：書けなくなるまで使った時などどこまで使うかというのを変えてやってみたい。
　　　幅広くする。長くする。圧力を加える。

先に述べた３つのねらいが達成できたかどうかについて考察する。

(1) 自ら考え，自ら問題を解決しようとする態度を育てる。

教材が鉛筆という，生徒にとって身近なものであったため，生徒はすぐにこの教材に興

味を持った。また，個人追究において，図形を用いて半径を求めるなど自ら問題を解決しようとする姿勢が多く見られた。

(2) 解決したことをもとに，新たな問題を見つけることができる。

授業後に行ったアンケートから，半数の生徒しか今回の授業で学んだことをもとに，新たな問題を見つけることができなかった。このような結果となった原因は，問題を解くことに集中し，生徒の視野を広げることができるような発問ができなかったためと考えられる。このことから，授業中に提示した問題を解決するだけでなく，様々な面から見た教材の面白さなどについても，生徒に話す機会を持つ工夫が必要であったのではないかと考える。

(3) 数学の実生活への有用性を感じることができ，数学への興味・関心を高めることができる。

授業後の生徒の感想から,「こういう所で数学があるのはおもしろいと思った。」という言葉や,「これからは，自分も身の回りにあることに興味を持ち，それを数学と関係させていきたいです。」という言葉から，実生活と数学とが結びついているということを，多くの生徒が実感し，数学への興味・関心を高めることができたと考えられる。

5. 今後の課題

今後の課題は，本教材の見直しである。今回実践した内容は自分が開発している内容の一部分である。他にも条件を加えたり，変えたりしながら考えることや，無駄を違う意味でとらえた比較の仕方や，シャープペンシルなどのほかの筆記具と比較するといった，実践した中にはない教材の面白さもいくつかある。従って，今回実践した教材を見直すことで，違う見方をし，新たな面白さを発見していきたいと考えている。そして，新たな教材開発である。より多くの子どもたちに算数・数学の楽しさを感じて欲しいと強く思い，算数・数学を楽しむことのできる新たな教材を開発していこうと考えている。

引用文献

[1] 国際数学・理科教育動向調査の 2003 年調査（TIMSS2003）. http://www.nier.go.jp/kiso/timss/2003/top.htm

[2] 上野富美夫，1999，日常の数学事典，東京堂出版.

[3] 吉田稔ほか 17 名，2006，新版中学校数学１，大日本図書株式会社.

[4] 吉田稔ほか 17 名，2006，新版中学校数学２，大日本図書株式会社.

[5] 吉田稔ほか 17 名，2006，新版中学校数学３，大日本図書株式会社.

[6] 株式会社トンボ鉛筆. http://www.tombow.com/support/faq/pencil/question.shtml

資料１

過程	学習活動と予想される生徒の姿	指導の工夫
導入	○問題を把握し、課題づくりをする。 〈問題〉 鉛筆の芯はでどれだけ使っているのか。 ●どれだけ使っているかを考える。 ・半分。削る部分がある。使わない部分がある。 ●条件を決める。 芯の長さ 174 mm 芯の半径 1 mm 削ったときの長さ 6 mm 使う分の長さ 3 mm	・問題を提示する。 ・鉛筆の条件を伝える。その際，イメージをつかみやすいように空間図形と平面図形の両方で説明をする。 ・鉛筆は最後まで使うという条件も加えて説明をする。
展開	○課題を設定する。 〈課題〉 鉛筆の使う芯の体積の割合を求めよう。 ○課題解決に向けて、自分の考えを持つ。 空間図形で… 最初の形は円柱。削ると円錐になる。 平面図形で… ・大きい三角形の中に小さい三角形がちょうど２つ縦に並ぶ。同じ図形が最後までできる。 ・58 回使える（小さい円錐が 58 個できる）。 使う芯の体積 ・合同条件より，使う芯の円錐の半径は $\frac{1}{2}$ ・相似比より，高さの比が３：６なので半径の比も同じだから，$3 : 6 = x : 1$ よって $x = \frac{1}{2}$ 使う芯の体積は，$\pi \times (\frac{1}{2})^2 \times 3 \times \frac{1}{3} \times 58 = \frac{29}{2}\pi$ 割合 割合を求めるには，(使う芯の体積) ÷ (全体の芯の体積)。 全体の体積は，$\pi \times 1^2 \times 174 = 174\pi$ なので， 求める割合は $\frac{1}{12}$ ○自分の考えを仲間と交流し，考えを深めていく。	・鉛筆を削ることで円柱から円錐になることに気づかせる発問をする。 ・まず，図がどんなふうに描けるかを全体で確認する。 ・使う芯の半径を求める際，平行線や合同な三角形を見つけさせ，合同条件が成り立つことが理解できるよう助言する。
まとめ	○まとめ ・鉛筆の使う芯の体積の割合は，三角形の合同条件や相似比を使って必要な長さを求めたり，円錐の体積の公式を用いたりすることで，$\frac{1}{12}$ しか使っていないことがわかる。 ○振り返り・アンケートを記入する。	・時間があれば，条件を変えた時に使う芯の割合はどうなるかという話をする。

資料２

鉛筆の実態

名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

課題：鉛筆の芯の使う体積の割合を求めよう！