岐阜数学教育研究
2005,Vol.4, 57-73

数学の有用性を感じることのできる教材の開発とその実践 ～ゲームから学ぶ確率における発展的学習を通して～

片桐かおる[1]，山田雅博[1]

高校数学において生徒が数学の楽しさや面白さを感じることができ，さらに自ら課題を見つけ追究する活動が体験できるような教材の開発を目指した。題材は，単純なカードゲームであり，それを考察する中から，確率に関する数理を追究する。具体的な事象から始め，それらから生じる疑問をもとに自ら課題を見つけ結果を予想し一般化をはかる。ゲームを問題としたことで，生徒の関心を引き付けた。そしてこれらの課題の追究には，高校３学年程度の既習事項を用いて問題解決することができ，机上で学んだ数学を身近な問題と結び付けられるように授業を構成した。その追究過程において数学における，具体・予想・抽象の手順を大切にして，教材開発を進めた。

＜キーワード＞数学の有用性，ゲーム，確率，期待値

1．はじめに

日本では理数科離れが叫ばれ，実際にOECD(経済協力開発機構) による調査の結果によっても日本の数学のレベルは低下してきている。2003 年度に調査されたPISA(生徒の学習到達度調査) の数学的リテラシーでは，今回初めて調査した，数 (量領域)，統計や確率 (不確実性領域) において，２位グループであり，他の領域に比べて得点が低いことが分かった。ここで，著者は日本の高校生の数学のレベルを上げたいと考えた。しかし，どのようにしたらそのレベルを上げることができるのであろうか。そこで，生徒が問題に親近感を持ち，興味・関心を自然と持てるようにゲームという教材を用いようと考え，確率に関する教材開発に取り組むことにした。なぜならば，確率という硬い言葉では生徒が難しいという先入観を持つのではないかと考え，ゲームという生徒にとって身近な表現を用いることにした。そして，この教材のねらいは，身近な問題で取り上げ，論理的に思考し，問題解決することにより数学の有用性を感じ，数学への興味・関心を高めることである。詳しくは，第２節 (2) で述べる。

さらに，実践当日に大雪にみまわれたため，セミナーが中止となった。そこで，生徒の数学を学ぶ機会が減ってしまうのは惜しいと考え授業風景をビデオカメラで撮り，生徒が個々で授業を受けられるようにした。このことに関しても，様々なメリットやデメリットを感じた。本論文では，確率に関する教材の研究とその実践結果について報告する。

2．教材について

(1) 教材の説明

以下に今回取り扱う問題を示す。

問題

「1 と書かれたカードが３枚，２と書かれたカードが２枚，３と書かれたカードが１枚，合わせて６枚のカードがありました。ここで，カードを２枚ひいて，そのカードに書かれた数字によって賞金がもらえるゲームをしました。

このとき，１枚目のカードを戻して２枚目のカードをひくのと，２枚続けてカードをひ

[1]岐阜大学教育学部

くのとどちらが得なのだろう ??

そして，2 枚のカードの数字をたすのとかけるのでは，どちらが得なのだろう ??

例）カードに書かれた数字が 1 と 2 のとき

たす …. $1+2=3$

3 万円の賞金がもらえる。

かける … $1\times2=2$

2 万円の賞金がもらえる。

さて，一番多くの賞金を手にするためにはどのルールを選択すれば良いのだろう ?? 」

以上の問題のすべてを提示すると長くなってしまうことが分かったので，生徒に提示する問題は端的に，簡潔に示したいと考えた。よって，生徒に提示するのは，問題の最初の 6 行だけにした。提示しない部分は，実物のカードを用い授業者が口頭で説明として付け加た。

この問題で考えるルールは，

a. 1 枚目を戻して 2 枚目をひく，2 つの数字をたす
b. 1 枚目を戻して 2 枚目をひく，2 つの数字をかける
c. 1 枚目を戻さないで 2 枚目をひく，2 つの数字をたす
d. 1 枚目を戻さないで 2 枚目をひく，2 つの数字をかける

の 4 つである。

一番多くの賞金を貰えることができるであろうルールを選ぶためには，それぞれのルールにおける賞金の期待値を求めなければならない。従って，生徒達は期待値を求めるために確率を算出する。そこで，用いられるのが２次元確率分布表である。これは高校数学からみれば発展的な学習となる。

さらに，問題の答えを出す過程や結果から出てきた疑問から自由に課題を見つけ，それを具体的な場合に計算し，結果を予想し，一般的に表すという手順で課題の追究を図る。

これらの活動から生徒が得られるであろう力を次に述べる。

(2) 教材のねらい

この教材を実践するに当たって，論理的に思考するために，具体 → 予想 → 抽象という思考の順序を大切にして授業を進めていきたいと考えた。従って，与えられた問題を解くことによって生まれた疑問から自ら課題を設定し，それを解決していくという活動を行うこととした。これらのことから以下の力が生徒に身に付くのではないかと考えた。したがって，これらをこの教材のねらいとする。

1. 実生活への有用性を感じることができ，数学への興味・関心を高めることができる。
2. 数学の基本的な追究の過程 (具体 → 予想 → 抽象) を身に付けることができる。
3. 問題を自ら見つけ，考え，解決する力を身に付けることができる。

3. 教材の研究

カードの種類と枚数を共に変化させる。カードにかかれる数字は，連続する 3 つの自然数とする。そして枚数は，各種類 1 枚以上とする。このとき，賞金の期待値はどのように変化するのだろうか。

まず，連続する 3 つの自然数の一番小さい数を k とおく。すると，連続する 3 つの自然数は，$k, k+1, k+2$ とかける。そして，それぞれのカードの枚数を，数の小さい方から a 枚, b 枚,c 枚とする。

STEP1 2次元確率分布表 〈1枚目をもどすとき〉

1枚目の数字/2枚目の数字	k	$k+1$	$k+2$	計
k	$\frac{a^2}{(a+b+c)^2}$	$\frac{ab}{(a+b+c)^2}$	$\frac{ac}{(a+b+c)^2}$	$\frac{a(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$
$k+1$	$\frac{ab}{(a+b+c)^2}$	$\frac{b^2}{(a+b+c)^2}$	$\frac{bc}{(a+b+c)^2}$	$\frac{b(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$
$k+2$	$\frac{ac}{(a+b+c)^2}$	$\frac{bc}{(a+b+c)^2}$	$\frac{c^2}{(a+b+c)^2}$	$\frac{c(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$
計	$\frac{a(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$	$\frac{b(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$	$\frac{c(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$	1

STEP2 期待値を求める。

〈1枚目を戻して，2枚目を引く＆2つの数をたす〉

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{(a+b+c)^2}\{(k+k)\,a^2+(k+k+1)\,ab\times 2 \\
& +(k+k+2)\,ac\times 2+(k+1+k+1)\,b^2+(k+1+k+2)\,bc\times 2+(k+2+k+2)\,c^2\} \\
= & \frac{1}{(a+b+c)^2}\{2ka^2+(2k+1)\,2ab+(2k+2)\,2ac+(2k+2)\,b^2+(2k+3)\,2bc+(2k+4)\,c^2\} \\
= & \frac{1}{(a+b+c)^2}\{2ka^2+4kab+2ab+4kac+4ac+2kb^2+2b^2+4kbc+6bc+2kc^2+4c^2\} \\
= & \frac{1}{(a+b+c)^2}\{2\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)k+2ab+4ac+2b^2+6bc+4c^2\} \\
= & \frac{2\,(a+b+c)^2\,k+2\,(a+b+c)\,(b+2c)}{(a+b+c)^2} \\
= & \frac{2\,(a+b+c)\,k+2\,(b+2c)}{a+b+c} \\
= & 2\left\{\frac{(a+b+c)\,k+b+2c}{a+b+c}\right\}
\end{aligned}
$$

〈1枚目を戻して，2枚目を引く＆2つの数をかける〉

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{(a+b+c)^2}\{(k\times k)\,a^2+k\,(k+1)\,ab\times 2+k\,(k+2)\,ac\times 2 \\
& +(k+1)\,(k+1)\,b^2+(k+1)\,(k+2)\,bc\times 2+(k+2)\,(k+2)\,c^2\} \\
= & \frac{1}{(a+b+c)^2}\{k^2a^2+\left(k^2+k\right)2ab+\left(k^2+2k\right)2ac+\left(k^2+2k+1\right)b^2 \\
& +\left(k^2+3k+2\right)2bc+\left(k^2+4k+4\right)c^2\} \\
= & \frac{1}{(a+b+c)^2}\{k^2a^2+2k^2ab+2kab+2k^2ac+4kac
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+k^2b^2+2kb^2+b^2+2k^2bc+6kbc+4bc+k^2c^2+4kc^2+4c^2\}\\
=\ &\frac{1}{(a+b+c)^2}\{\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)k^2\\
&+\left(2ab+4ac+2b^2+6bc+4c^2\right)k+b^2+4bc+4c^2\}\\
=\ &\frac{(a+b+c)^2k^2+2(a+b+c)(b+2c)k+(b+2c)^2}{(a+b+c)^2}\\
=\ &\frac{\{(a+b+c)k+(b+2c)\}^2}{(a+b+c)^2}\\
=\ &\left\{\frac{(a+b+c)k+b+2c}{a+b+c}\right\}^2
\end{aligned}
$$

STEP1 ２次元確率分布表

〈1 枚目を戻さないとき〉

1 枚目の数字/2 枚目の数字	k	$k+1$	$k+2$	計
k	$\frac{a(a-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{ab}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{ac}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{a(a+b+c-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$
$k+1$	$\frac{ab}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{b(b-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{bc}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{b(a+b+c-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$
$k+2$	$\frac{ac}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{bc}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{c(c-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{c(a+b+c-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$
計	$\frac{a(a+b+c-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{b(a+b+c-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	$\frac{c(a+b+c-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$	1

STEP2 期待値を求める。

〈1 枚目を戻さないで，2 枚目を引く & 2 つの数をたす〉

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(a+b+c)(a+b+c-1)}\{(k+k)a(a-1)+(k+k+1)ab\times 2\\
&+(k+k+2)ac\times 2+(k+1+k+1)b(b-1)\\
&+(k+1+k+2)bc\times 2+(k+2+k+2)c(c-1)\}\\
=\ &\frac{1}{(a+b+c)(a+b+c-1)}\{2ka(a-1)+(2k+1)2ab\\
&+(2k+2)2ac+(2k+2)b(b-1)+(2k+3)2bc+(2k+4)c(c-1)\}\\
=\ &\frac{1}{(a+b+c)(a+b+c-1)}(2ka^2-2ka+4kab+2ab+4kac+4ac+2kb^2-2kb+2b^2-2b\\
&+4kbc+6bc+2kc^2-2kc+4c^2-4c)\\
=\ &\frac{1}{(a+b+c)(a+b+c-1)}\{(2a^2-2a+4ab+4ac+2b^2-2b+4bc+2c^2-2c)k\\
&+2ab+4ac+2b^2-2b+6bc+4c^2-4c\}\\
=\ &\frac{1}{(a+b+c)(a+b+c-1)}\{2(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-a-b-c)k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2\left(ab+2ac+3bc+b^2-b+2c^2-c\right)\} \\
=\ & \frac{2\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-1\right)k+2\left(a+b+c-1\right)\left(b+2c\right)}{\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-1\right)} \\
=\ & \frac{2\left(a+b+c\right)k+2\left(b+2c\right)}{a+b+c} \\
=\ & 2\left\{\frac{\left(a+b+c\right)k+b+2c}{a+b+c}\right\}
\end{aligned}
$$

〈1 枚目を戻さないで，2 枚目を引く＆2 つの数字をかける〉

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-1\right)}\{\left(k\times k\right)a\left(a-1\right)+k\left(k+1\right)ab\times 2+k\left(k+2\right)ac\times 2 \\
& +\left(k+1\right)\left(k+1\right)b\left(b-1\right)+\left(k+1\right)\left(k+2\right)bc\times 2+\left(k+2\right)\left(k+2\right)c\left(c-1\right)\} \\
=\ & \frac{1}{\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-1\right)}\{k^2\left(a^2-a\right)+\left(k^2+k\right)2ab+\left(k^2+k\right)2ac \\
& +\left(k^2+2k+1\right)\left(b^2-b\right)+\left(k^2+3k+2\right)2bc+\left(k^2+4k+4\right)\left(c^2-c\right)\} \\
=\ & \frac{1}{\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-1\right)}\{(a^2-a+2ab+2ac+b^2-b+2bc+c^2-c)k^2 \\
& +\left(2ab+2ac+2b^2-2b+6bc+4c^2-4c\right)k+b^2-b+4bc+4c^2-4c\} \\
=\ & \frac{1}{\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-1\right)}\{\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-1\right)k^2+\left(a+b+c-1\right)\left(b+2c\right)k \\
& +\left(b+2c\right)^2-b-4c\} \\
=\ & k^2+2\frac{b+2c}{a+b+c}k+\frac{\left(b+2c\right)^2-b-4c}{\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-1\right)}
\end{aligned}
$$

《結果》

引き方＼計算方法	たす	かける
1 枚目を戻して， 2 枚目を引く	$2\left(k+\frac{b+2c}{a+b+c}\right)$	$\left(k+\frac{b+2c}{a+b+c}\right)^2$
1 枚目を戻さないで， 2 枚目を引く	$2\left(k+\frac{b+2c}{a+b+c}\right)$	$k^2+2\frac{b+2c}{a+b+c}k+\frac{\left(b+2c\right)^2-b-4c}{\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-1\right)}$

たすルールの場合は 1 枚目を戻す，戻さないに関わらず，期待値は等しい。以上の結果を利用して，それぞれのルールの期待値の大小関係についての条件を調べる。

ここで，$k+\frac{b+2c}{a+b+c}=X$ とおく。

明らかに $X>0$ である。

(i) たすルールの期待値と戻す＆かけるルールの期待値について調べる。

$$
\begin{aligned}
& \text{(戻す＆かけるルールの期待値)} \\
& \qquad -\text{(たすルールの期待値)} \\
=\ & X^2-2X \\
=\ & X\left(X-2\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$X(X-2)>0 \Rightarrow X>2$
つまり，$k \geq 2$ または ($k=1$ かつ $c>a$)
$X(X-2)<0 \Rightarrow 0<X<2$
つまり，$k=1$ かつ $c<a$
$X(X-2)=0 \Rightarrow X=0,2$
$X>1$ より $X=2$
つまり，$k=1$ かつ $c=a$
となる。

つまり，$k \geq 2$ または ($k=1$ かつ $c>a$) のとき
(戻す＆かけるルールの期待値)
$>$ (たすルールの期待値)

$k=1$ かつ $c<a$ のとき
(たすルールの期待値)
$>$ (戻す＆かけるルールの期待値)

$k=1$ かつ $c=a$ のとき
(たすルールの期待値)
$=$ (戻す＆かけるルールの期待値)

(ii) 戻す＆かけるルールの期待値と戻さない＆かけるルールの期待値について調べる。

(戻さない＆かけるルールの期待値)

$$\begin{aligned}
&= X^2-\left(\frac{b+2c}{a+b+c}\right)^2+\frac{(b+2c)^2-b-4c}{(a+b+c)(a+b+c-1)}\\
&= X^2+\frac{(b+2c)^2(a+b+c-a-b-c+1)}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}-\frac{(b+4c)(a+b+c)}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}\\
&= X^2+\frac{(b+2c)^2-(b+4c)(a+b+c)}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}
\end{aligned}$$

と書くことができる。

(戻さない＆かけるルールの期待値)
－(戻す＆かけるルールの期待値)

$$\begin{aligned}
&= X^2+\frac{(b+2c)^2-(b+4c)(a+b+c)}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}-X^2\\
&= \frac{b^2+4bc+4c^2}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}-\frac{(ab+b^2+5bc+4ac+4c^2)}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}\\
&= \frac{-ab-bc-4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}<0
\end{aligned}$$

よって，k,a,b,c の値に関わらず，期待値の大小関係は，

(戻す＆かけるルールの期待値) ＞ (戻さない＆かけるルールの期待値) となる。

(iii) たすルールの期待値と戻さない＆かけるルールの期待値について考える。

まず，$k=1$ かつ $a<c$ のときを考える。$k=1$ より，カードの種類が 1,2,3 のときを考えればよい。それぞれの期待値に $k=1$ を代入する。

(たすルールの期待値)

$$\begin{aligned}
&= 2\left(1+\frac{b+2c}{a+b+c}\right)\\
&= \frac{2(a+2b+3c)}{a+b+c}
\end{aligned}$$

(戻さない＆かけるルールの期待値)

$$\begin{aligned}
&= 1+\frac{2b+4c}{a+b+c}+\frac{(b+2c)^2-b-4c}{(a+b+c)(a+b+c-1)}\\
&= \frac{(a+2b+3c)^2-a-4b-9c}{(a+b+c)(a+b+c-1)}
\end{aligned}$$

よって，

(たすルールの期待値)
－(戻さない＆かけるルールの期待値)

$$= \frac{2(a+2b+3c)}{a+b+c}-$$

$$\frac{(a+2b+3c)^2-a-4b-9c}{(a+b+c)(a+b+c-1)}$$
$$= \frac{a^2+(2b+2c-1)a+c(3-2b-3c)}{(a+b+c)(a+b+c-1)}(\diamond)$$

$a,b,c \in \mathbf{N}$ より，$(\diamond)$ の分母は正なので，以下，分子に注目する。（これ以降，$\mathbf{N}$ で自然数全体の集合を表す)。

（$\diamond$ の分子) >0 のとき，
$a^2+(2b+2c-1)\,a+c\,(3-2b-3c)>0$
$a^2+(2b+2c-1)\,a+c\,(3-2b-3c)=0$ を解くと，
$a=\frac{-2b-2c+1\pm\sqrt{(2b+2c-1)^2-4c(3-2b-3c)}}{2}$
$a=\frac{-2b-2c+1\pm\sqrt{4b^2+16c^2+16bc-4b-16c+1}}{2}$
$a=\frac{-2b-2c+1\pm\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c}}{2}$
$a\in\mathbf{N}$ より，
$a=\frac{-2b-2c+1+\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c}}{2}$
$(\diamond)>0$ のとき，上より
$a>\frac{-2b-2c+1+\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c}}{2}$

ここで，上式の根号の中が正であることを示す。
b は自然数なので，$2b\geq 2$, よって，
$(2b+4c-1)^2\geq(4c+1)^2$
従って，

$$(2b+4c-1)^2\geq 16c^2+8c+1$$
$$(2b+4c-1)^2-8c\geq 16c^2+1>0$$

ゆえに，$(2b+4c-1)^2-8c>0$ よって，根号の中が正であることを示した。

次に，$a<c$ より，
$\frac{-2b-2c+1+\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c}}{2}<a<c$
となる a が存在すると仮定する。a は自然数なので，
$c-\frac{-2b-2c+1+\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c}}{2}>1$
ここで，

$$\begin{aligned}&c-\tfrac{-2b-2c+1+\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c}}{2}-1\\
=\ &\tfrac{1}{2}(2c+2b+2c-1\\
&\quad-\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c}-2)\\
=\ &\tfrac{1}{2}(4c+2b-3\\
&\quad-\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c})\cdots(\star)\end{aligned}$$

$(\star)>0$ より，
$\frac{1}{2}\left(4c+2b-3-\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c}\right)>0$
$4c+2b-3-\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c}>0$
$(2b+4c-1)^2-8c<(4c+2b-3)^2$
$4b^2+16c^2+16bc-4b-8c+1-8c$
$\quad<16c^2+4b^2+16bc-24c-12b+9$
$-4b-16c+1<-24c-12b+9$
$8b<-8c+8$
$b<-c+1$
c は自然数なので，$-c+1<0$ となり, $b<0$ となるので矛盾。従って，
$\frac{-2b-2c+1+\sqrt{(2b+4c-1)^2-8c}}{2}<a<c$
となる自然数 a は存在しない。

つまり，$k=1$ かつ $a<c$ のとき，
（たすルールの期待値)
$<$ （戻さない&かけるルールの期待値)
となる。

次に，$k\geq 2$ のときを考える。

$$\begin{aligned}&\text{（戻さない\&かけるルールの期待値）}\\
&=\left(k+\frac{b+2c}{a+b+c}\right)^2-\left(\frac{b+2c}{a+b+c}\right)^2\\
&\quad+\frac{(b+2c)^2-b-4c}{(a+b+c)(a+b+c-1)}\\
&= X^2-\frac{(b+2c)^2(a+b+c-1)}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}\\
&\quad-\frac{(b+2c)^2(a+b+c)+(b+4c)(a+b+c)}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}\\
&= X^2-\frac{(b+2c)^2(a+b+c-1-a-b-c)}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}\\
&\quad+\frac{(b+4c)(a+b+c)}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}\end{aligned}$$

$$= X^2 - \frac{(b+4c)(a+b+c)-(b+2c)^2}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}$$
$$= X^2 - \frac{ab+b^2+4ac+5bc+4c^2}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}$$
$$-\frac{b^2+4bc+4c^2}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}$$
$$= X^2 - \frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}$$

と書ける。

（戻さない＆かけるルールの期待値）
ー(たすルールの期待値)

$$= X^2 - 2X - \frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}$$
$$= (X-1)^2$$
$$-\frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)} - 1$$
$$= (X-1)^2 -$$
$$\left\{\frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)} + 1\right\} \cdots (*)$$

ここで，$a, b, c \in \mathbf{N}$ より，

$(a+b+c-1)(a+b+c)^2 \geq 2(a+b+c)^2$

$\frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)} \leq \frac{ab+bc+4ac}{2(a+b+c)^2}$

$\frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)} \leq \frac{1}{2}\frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2}$

さらに，

$$(a+b+c)^2 - (ab+bc+4ac)$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$
$$-ab-bc-4ac$$
$$= a^2+b^2+c^2+ab+bc-2ac$$
$$= (a-c)^2+b^2+c^2+ab+bc > 0$$

ゆえに，

$\frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2} < 1,\ \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}$

したがって，

$\frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}$

$\frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)} + 1 < \frac{3}{2}$

よって，$(*)$ より，$(X-1)^2 \geq \frac{3}{2}$ ならば，

$X^2 - 2X - \frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)} > 0$

となる。

$(X-1)^2 \geq \frac{3}{2}$

$X - 1 \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ ($X-1>0$ より)

$X \geq 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} = 2.222\cdots$

$X = k + \frac{b+2c}{a+b+c}b$ より，$k \geq 3$ のとき，

$X^2 - 2X - \frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)} > 0$

が成り立つ。

次に，$k=2$ のときを調べる。

$$(*) = \left(k + \frac{b+2c}{a+b+c} - 1\right)^2$$
$$-\left\{\frac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)} + 1\right\}$$

$k=2$ を代入する。

$$(*)$$
$$= \left(1 + \frac{b+2c}{a+b+c}\right)^2$$
$$- \frac{(a+b+c)^2(a+b+c-1)+ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}$$
$$= \left(\frac{a+2b+3c}{a+b+c}\right)^2$$
$$- \frac{(a+b+c)^2(a+b+c-1)+ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)}$$
$$= \frac{1}{(a+b+c)^2(a+b+c-1)} \cdot$$
$$\{(a+2b+3c)^2(a+b+c-1)$$
$$-(a+b+c)^2(a+b+c-1)$$
$$-ab-bc-4ac\} \cdots (\clubsuit)$$

ここで，($\clubsuit$ の分母) > 0 より，($\clubsuit$) の分子の正負を調べる。

($\clubsuit$の分子)

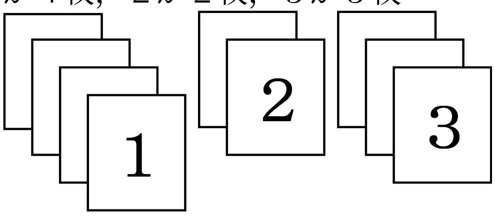
$$
\begin{aligned}
= \;& (a+b+c-1)\,(a^2+4b^2+9c^2+4ab \\
& +12bc+6ac-a^2-b^2-c^2 \\
& -2ab-2bc-2ac) \\
& -ab-bc-4ac \\
= \;& (a+b+c-1)(3b^2+8c^2+2ab \\
& +10bc+4ac)-ab-bc-4ac>0
\end{aligned}
$$

なぜならば,

$$
\begin{aligned}
& (a+b+c-1)(3b^2+8c^2+2ab \\
& +10bc+4ac) \\
\geq \;& 2(3b^2+8c^2+2ab+10bc+4ac) \\
> \;& ab+bc+4ac)
\end{aligned}
$$

従って,(♣) >0。つまり,$k=2$ のとき,
$X^2-2X-\dfrac{ab+bc+4ac}{(a+b+c)^2\,(a+b+c-1)}>0$
が成り立つ。つまり,
(戻さない&かけるルールの期待値) $<$ (たすルールの期待値)
となる。

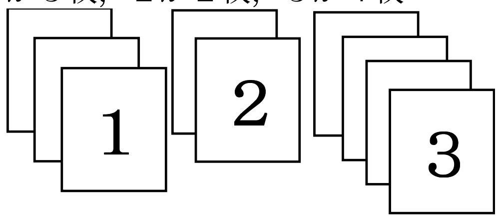
《期待値の大小関係の例》
1が4枚, 2が2枚, 3が3枚



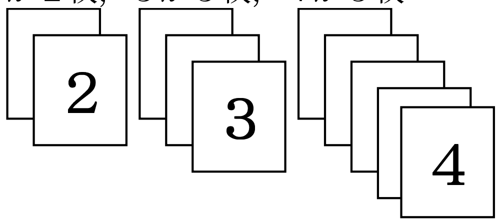
このとき,

(たすルールの期待値)
$\vee$
(1枚目を戻して2枚目を引く
&かけるルールの期待値)
$\vee$
(1枚目を戻さないで2枚目を引く
&かけるルールの期待値)

1が3枚, 2が2枚, 3が4枚



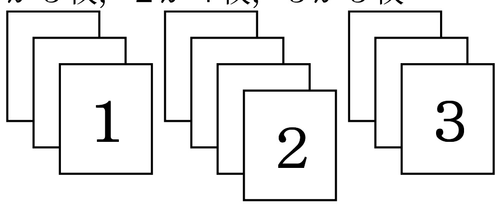
2が2枚, 3が3枚, 4が5枚



このとき,

(1枚目を戻して2枚目を引く
&かけるルールの期待値)
$\vee$
(1枚目を戻さないで2枚目を引く
&かけるルールの期待値)
$\vee$
(たすルールの期待値)

1が3枚, 2が4枚, 3が3枚



このとき,

(たすルールの期待値)
$\|$
(1枚目を戻して2枚目を引く
&かけるルールの期待値)
$\vee$
(1枚目を戻さないで2枚目を引く
&かけるルールの期待値)

4. 授業について

平成17年12月23日・24日の2日間にわたり高校数学セミナーにおいて授業をする予定

であった。しかし，当日大雪にみまわれ中止を余儀なくされた。しかし，ビデオに撮って生徒に配るという提案を頂き実行に移すことにした。

また，ビデオ撮影は，平成 18 年 1 月 12 日午後 1 時〜4 時に実施した。

小学 5 年生 2 名，中学 1 年生 1 名，中学 2 年生 2 名，高校 1 年生 6 名，高校 1 年生 12 名の計 23 名を対象として実践を行った。

(1) 授業のねらい

本時のねらいを「2 次元の事象についての確率について考え，問題を追究し，解決することを通して，確率についての知識を深めると共に，数学の有用性を感じることができる。」とした。第 2 節 (2) で述べたこの教材のねらいの中でも，1. を特にねらいとしたかったので本時のねらいとした。数学の有用性を感じることで，数学を楽しいと感じ，興味・関心を高めることが授業者の一番の願いである。

(2) ビデオによる授業について

急遽ビデオで撮影することになったため，特にビデオ撮影用に用意したことは無い。しかし，上で述べたように今回は小学 5 年生から高校 2 年生と年齢の幅が広い。そこで，取り扱う内容が高校生レベルのものであることを考慮し，確率や期待値に初めてふれる小学生にも分かりやすいように，計算の例を示しつつ，授業を進めた。そして，高校生にとっては，既習の内容を復習できる機会となるようにした。ビデオで授業を配信することに関しては，授業者にとって初めての試みであり，様々なメリットやデメリットがあると気付かされた。以下は，その考察である。

《メリット》

- 遠隔地でも授業が受けられる。
- 生徒は時間に縛られずに考えることができる。
- 分からないところは，もう一度説明を見ることができる。

《デメリット》

- 児童生徒の反応がダイレクトに感じられない
- 困ったとき，分からないときにすぐに援助をしてあげられない
- 生徒間の交流を持つことができない。
- 生徒の自主性に頼る授業となる。
- 授業をして，生徒のプリントが返ってくるまで時間がかかる。

以上のような，メリットやデメリットを感じた。

授業を計画した当初は，通常のセミナーを予定していたため，ビデオでの授業にはメリットよりデメリットを多く感じる結果となった。しかし，通信技術が発達した現在，ネットワークを用いて遠隔地での授業も可能となっている。このことから，授業者が感じられデメリットの一部を解消できるのではないかと考えている。

また，当初の計画通りこの授業を通常の形式で実践したいと考えている。

(3) 本時の展開

１日目

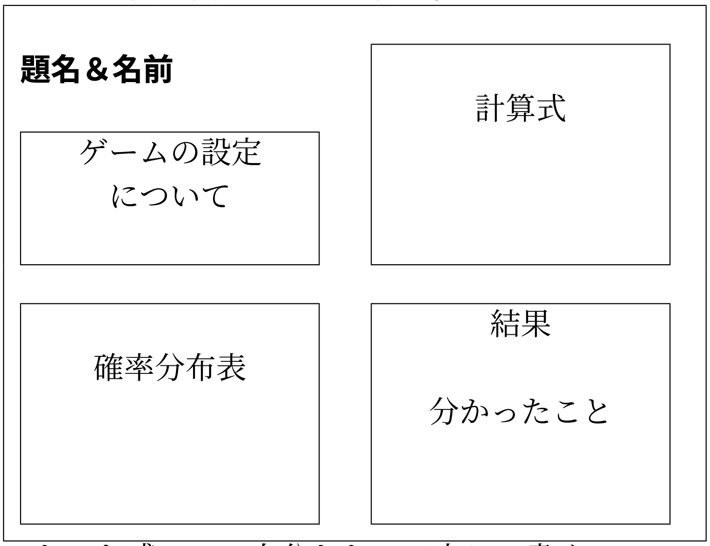
<table>
<tr><th>過程</th><th>学 習 活 動</th><th>指導・援助</th></tr>
<tr><td>導入</td><td>問題の提示
１，２，３と書かれたカードがそれぞれ 3 枚，2 枚，1 枚ある。カードを２回ひいて，出た数字によって賞金がもらえる。
どのようなルールでゲームを行うと 1 番得をするのか??
ルール１：1 回目にひいたカードは，2 回目をひく前に戻すか，戻さないか。
ルール２：1 回目にひいた数字と 2 回目にひいた数字をたすか，かけるか。(この数字によって賞金が決まる。)
・確率を考えて期待値を考えればよさそう。
・それぞれのルールを組み合わせると 4 つのルールが考えられる。</td><td>・1 次元の確率や期待値の求め方を確認する。
・2 次元の確率の求め方，確率分布表の書き方などを一部示し，確率分布表作成の手がかりとする。</td></tr>
<tr><td>展 開
1</td><td>◯ 課題を設定する
1 番儲けられるのは，どのルールか考えよう。
◯ 課題解決に向けて，自分の考えを持つ
1. 予想を立てる。
・たす方が得しそう！
・戻さない方が得しそう！ etc.
2. 2 次元確率分布表を作成する。
(1 枚目を戻す)<table><tr><th>1 枚目の数字＼2 枚目の数字</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>計</th></tr><tr><td>1</td><td>9/36</td><td>6/36</td><td>3/36</td><td>18/36</td></tr><tr><td>2</td><td>6/36</td><td>4/36</td><td>2/36</td><td>12/36</td></tr><tr><td>3</td><td>3/36</td><td>2/36</td><td>1/36</td><td>6/36</td></tr><tr><td>計</td><td>18/36</td><td>12/36</td><td>6/36</td><td>1</td></tr></table>(1 枚目を戻さない) についても作成する。
3. 期待値を求める。
(1 枚目を戻す)
たす ：{(1+1)×9+(1+2)×6×2+(1+3)×3×2+(2+2)×4 + (2+3)×2×2+(3+3)×1} /36
=10/3≒3.33
かける： 25/9≒2.77
(1 枚目を戻さない)
たす：10/3≒3.33
かける： 8/3≒2.66</td><td>・必ず予想を立ててから考えるように働きかける。

・確率の計算の仕方や，確率分布表の書き方などが理解できているか確認しながら，生徒の計算の補助をする。

・期待値の求め方が間違っていないか確認する。</td></tr>
</table>

	◯ **全体交流** ・1枚目を戻すときに2つの数字をたすルールと1枚目を戻さないときに2つの数をかけるルールでやるのが1番儲けられる!! ・２つの数をたすときは1枚目を戻すときと戻さないときの期待値が一緒になった。 ◯ **自分なりの疑問を持つ** ・枚数を変えたらどうなるんだろう?? ・数字を変えるとどうなるんだろう?? 1日目終了	・期待値の計算が終わってしまい結果がでた生徒には，計算をしてみて次にはどんなことを調べたいか?やどんな疑問を持ったか考えるように働きかける。

２日目

過程	学 習 活 動	指導・援助
導入	○ **課題を設定する** それぞれが，考えた課題 ○ **課題解決に向けて，自分の考えを持つ** $*$ それぞれの疑問によって個々で考える。 予想される疑問 ・枚数を変化させる。 ・カードの数字を変化させる。 ・０カードを入れてみる。 ・たす・かける以外の計算方法をしてみる。	・疑問が持てていない子や，何をしていいのか分からない子には，どんなことを感じたのかな，話を聞きながら方向付けをして援助する。 ・疑問によっては，計算が複雑になったりするので，カードの数字，枚数の両方を変化はさせない。
展 開 2	1. 予想を立てる。 ・またたすルールは期待値が同じになりそう。 etc. 2. ２次元確率分布表を作成する。 3. 期待値を求める。 ・たすルールの期待値がまた同じになった！ ・昨日の期待値とは大小関係が違う。	計算や考え方の補助
まとめ	○ **結果や分かったことをまとめる。** それぞれ模造紙にまとめを書く。  みたいな感じで，自分たちで工夫して書く。 ○ **全体交流** ・他の子の考えたルールでも期待値が同じになってる。 ・期待値の大小関係が決まるには，必要な条件があるんだあ。 ○ **振り返り** アンケートを配布する。	・基本的に自由に書かせる。 ・見づらいところがあったりしたら助言したり，表現に困っているところは援助する。 ・まとめに関しては，結果のみに終わらないように，分かったことや気付いたことなどを書かせるようにする。 ・この時間に，どのように発表するかも決めるように促す。 ・計算したときの工夫や，まとめの工夫，発表の工夫したところなどを価値付ける。

5. 生徒の活動と考察

(1) 生徒の追究結果

生徒に配ったプリントから，生徒がどのような課題を設定し，追究を図ったのかを紹介する。

例１）小学５年生

課題：1が5枚，5が3枚，10が1枚のときはどのルールが一番得するのか。

追究：2次元確率分布表 (1枚目を戻す)

1枚目の数字/2枚目の数字	1	5	10	計
1	$\frac{25}{81}$	$\frac{15}{81}$	$\frac{5}{81}$	$\frac{45}{81}$
5	$\frac{15}{81}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{3}{81}$	$\frac{27}{81}$
10	$\frac{5}{81}$	$\frac{3}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{9}{81}$
計	$\frac{45}{81}$	$\frac{27}{81}$	$\frac{9}{81}$	1

期待値

① 1 枚目もどす＆2 枚の数字をたす

$$\frac{1}{81}(25\times 2+15\times 6+5\times 11+15\times 6+9\times 10$$
$$+3\times 15+11\times 5+15\times 3+20\times 1)$$
$$=\frac{515}{81}$$
$$=6.3580246\cdots$$

期待値　約 6.35802

② 1枚目もどす＆2枚の数字をかける

$$\frac{1}{81}(25\times 1+15\times 5+5\times 10+15\times 5+9\times 25$$
$$+3\times 50+10\times 5+50\times 3+100\times 1)$$
$$=\frac{905}{81}$$
$$=11.172839\cdots$$

期待値　約 1.17284

2次元確率分布表 (1枚目を戻さない)

1枚目の数字/2枚目の数字	1	5	10	計
1	$\frac{20}{72}$	$\frac{15}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{40}{72}$
5	$\frac{15}{72}$	$\frac{6}{72}$	$\frac{3}{72}$	$\frac{24}{72}$
10	$\frac{5}{72}$	$\frac{3}{72}$	$\frac{0}{72}$	$\frac{8}{72}$
計	$\frac{40}{72}$	$\frac{24}{72}$	$\frac{8}{72}$	1

期待値

③ 1枚目もどさない＆2枚の数字をたす

$$\frac{1}{72}(2\times 20+6\times 15+11\times 5+6\times 15+10\times 6$$
$$+15\times 3+11\times 5+15\times 3+20\times 1)$$
$$=\frac{500}{72}$$
$$=6.944444\cdots$$

期待値　約 6.94444

④ 1枚目もどさない＆2つの数字をかける

$$\frac{1}{72}(20\times 1+15\times 5+5\times 10+5\times 15+25\times 6$$
$$+50\times 3+5\times 10+3\times 50+100\times 0)$$
$$=\frac{665}{72}$$
$$=9.236111\cdots$$

期待値　約 9.23611

つまり...②>④>③>① になる。

例２) 中学２年生

課題：赤色の紙が4枚，青色の紙が3枚，黄色の紙が2枚あります。2枚引き，色によって賞金がもらえるゲームをします。

赤 →20円，青 →50円，黄 →100円

予想：2枚目を引く前に1枚目を戻すともどさないのでは戻すほうが得。

追究：

1 枚目の数字/2 枚目の数字	赤	青	黄	計
赤	$\frac{16}{81}$	$\frac{12}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{36}{81}$
青	$\frac{12}{81}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{27}{81}$
黄	$\frac{8}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{18}{81}$
計	$\frac{36}{81}$	$\frac{27}{81}$	$\frac{18}{81}$	1

期待値

$$
\begin{aligned}
&40 \times \tfrac{16}{81} + 70 \times \tfrac{12}{81} + 120 \times \tfrac{8}{81} + 70 \times \tfrac{12}{81} \\
&+100 \times \tfrac{9}{81} + 150 \times \tfrac{6}{81} + 120 \times \tfrac{8}{81} \\
&+150 \times \tfrac{6}{81} + 200 \times \tfrac{4}{81} \\
&= \tfrac{640}{81} + \tfrac{840}{81} + \tfrac{960}{81} + \tfrac{840}{81} \\
&+ \tfrac{900}{81} + \tfrac{900}{81} + \tfrac{960}{81} + \tfrac{900}{81} + \tfrac{800}{81} \\
&= \tfrac{7740}{81} \\
&= 95.55\cdots
\end{aligned}
$$

(戻さない)

1 枚目の数字/2 枚目の数字	赤	青	黄	計
赤	$\frac{12}{72}$	$\frac{12}{72}$	$\frac{8}{72}$	$\frac{32}{72}$
青	$\frac{12}{72}$	$\frac{6}{72}$	$\frac{6}{72}$	$\frac{24}{72}$
黄	$\frac{8}{72}$	$\frac{6}{72}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{16}{72}$
計	$\frac{32}{72}$	$\frac{24}{72}$	$\frac{16}{72}$	1

期待値

$$
\begin{aligned}
&40 \times \tfrac{12}{72} + 70 \times \tfrac{12}{72} + 120 \times \tfrac{8}{72} + 70 \times \tfrac{12}{72} + 100 \times \tfrac{6}{72} \\
&+150 \times \tfrac{6}{72} + 120 \times \tfrac{8}{72} + 150 \times \tfrac{6}{72} + 200 \times \tfrac{2}{72} \\
&= \tfrac{480}{72} + \tfrac{840}{72} + \tfrac{960}{72} + \tfrac{840}{72} + \tfrac{600}{72} \\
&+ \tfrac{900}{72} + \tfrac{960}{72} + \tfrac{900}{72} + \tfrac{400}{72} \\
&= \tfrac{6880}{72} \\
&= 95.55\cdots
\end{aligned}
$$

結果：2 枚目をひく前に 1 枚目を戻しても戻さなくても期待値は同じ。

例 3) 高校 2 年生

課題：例題で，①と③が同じ期待値となったが，どのような時に同じ期待値となるだろうか。

追究：

数字を，a, b, c とおく。ただし，$0 < a < b < c$ である。又，a が 3 枚，b が 2 枚，c が 1 枚である。

まず，カードを戻すときと，戻さないとき２次元確率分布表をかくと，

(カードを戻すとき)

1 枚目の数字/2 枚目の数字	a	b	c	計
a	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{18}{36}$
b	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{12}{36}$
c	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
計	$\frac{18}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	1

(カードを戻さないとき)

1 枚目の数字/2 枚目の数字	a	b	c	計
a	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{15}{30}$
b	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{10}{30}$
c	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{0}{30}$	$\frac{5}{30}$
計	$\frac{15}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{5}{30}$	1

① カードを戻し，たすとき

$$
\begin{aligned}
& 2a \times \frac{9}{36} + 2b \times \frac{4}{36} + 2c \times \frac{1}{36} \\
& + (a+b) \times \frac{12}{36} + (a+c) \times \frac{6}{36} \\
& + (b+c) \times \frac{4}{36} \\
= {} & \frac{1}{36}\{18a + 8b + 2c \\
& +12(a+b) + 6(a+c) + 4(b+c)\} \\
= {} & \frac{36a + 24b + 12c}{36}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{3a+2b+c}{3} \cdots ①'$$

② カードを戻し，かけたとき

$$a^2 \times \frac{9}{36} + b^2 \times \frac{4}{36} + c^2 \times \frac{1}{36}$$
$$+ab \times \frac{12}{36} + bc \times \frac{4}{36} + ca \times \frac{6}{36}$$
$$= \frac{9a^2+4b^2+c^2+12ab+4bc+6ca}{36} \cdots ②'$$

③ カードを戻さず，たすとき

$$2a \times \frac{6}{30} + 2b \times \frac{2}{30} + 2c \times \frac{0}{30}$$
$$+(a+b) \times \frac{12}{30} + (b+c) \times \frac{4}{30}$$
$$+(c+a) \times \frac{6}{30}$$
$$= \frac{12a+4b+12(a+b)+4(b+c)+6(c+a)}{30}$$
$$= \frac{30a+20b+10c}{30}$$
$$= \frac{3a+2b+c}{3} \cdots ③'$$

④ カードを戻さず，かけたとき

$$a^2 \times \frac{6}{30} + b^2 \times \frac{2}{30} + c^2 \times \frac{0}{30}$$
$$+ab \times \frac{12}{30} + bc \times \frac{4}{30} + ca \times \frac{6}{30}$$
$$= \frac{6a^2+2b^2+12ab+4bc+6ca}{30}$$
$$= \frac{3a^2+b^2+6ab+2bc+3ca}{30} \cdots ④'$$

①’，②’，③’，④’ により

①’ ＝③’ であるから，数の小さい方から，3 枚，2 枚，1 枚となるときは，少なくともカードを戻し，たしたときとカードを戻さず，たしたときの期待値は等しくなる。

疑問：

$$②' \times 180$$
$$= 5\left(9a^2+4b^2+c^2+12ab+4bc+6ca\right)$$
$$= 45a^2+20b^2+5c^2+60ab$$
$$+20bc+30ca \cdots A$$

$$④' \times 180$$
$$= 12\left(3a^2+b^2+6ab+2bc+3ca\right)$$
$$= 36a^2+12b^2+72ab+24bc+36ca \cdots B$$

ここで，A －B より，

$$A-B = 9a^2+8b^2+5c^2-12ab-4bc-6ca$$

ここで，

$$9a^2+8b^2+5c^2 > 12ab+4bc+6ca$$

であることを証明するにはどのようにすればよいのかが分からない。

(2) アンケート結果

Q. セミナーを受ける前と後では，確率に対する意識にどのような変化がありましたか。

- 身の回りのゲームやくじなどを求めてみようと思った。
- 確率は少し苦手だったけど，少し得意になった。
- こんな単純な問題にさえ，条件を少し変えることで自分で問題をつくったり，関係性を考えることができ確率の問題の面白さを知ったと共に，確率の問題は奥深いと思った。

Q. セミナー全体を通して思ったことを書いてください。

- 自分で関係性を見つけた時は，楽しかった。
- 一般化すると，とたんに難しくなるけど，それが解けたときはとてもうれしかった。
- 予想と結果が違ったことが難しかった。

(3) 考察

(1) の生徒のプリントや (2) のアンケート結果から本教材のねらいに対する考察を行う。

教材のねらい 1. について

生徒の活動の例２のように，より実生活に近づけ，問題を自分で作り問題に取り組む姿がプリントから読み取れた。これは，実生活への有用性を感じられているのではないかと考えた。そして，アンケート結果からは身の回りのくじやゲームを調べようと思ったなどの回答から，数学の有用性が感じられていると考えた。また，解けたときはとてもうれしかったという回答からは，解けたときのうれしさは数学の醍醐味だと考えるので，数学の楽しさを感じられたのではないかと考えた。このことから，数学の興味・関心も高まったのではないかと考えた。

教材のねらい 2. について

生徒の活動例２・例３のように自分なりの予想を立てて追究を行っている姿がプリントから感じられた。例として紹介していないが，まず具体的な数字を用いて計算してみてから予想を立て，一般化を図るという手順で追究を行っている生徒もいた。これらから数学の追究の思考の過程が身に付いたのではないかと考えた。

また，予想と結果が違ったことが難しかったというアンケート結果があるが，これはある意味数学の面白いところで，数学の追究の面白さを感じられたのではないか。

教材のねらい 3. について

生徒から返ってきたプリントに書かれていた課題は多種多様で同じものがひとつと無かった。これは，生徒が離れ離れで授業を受けたことと関係しているかもしれない。しかし，このことは生徒が個々で考えた課題であることを示している。よって，それぞれ，自分の課題に対して追究を行えたと考えている。そして，ねらい 1. の考察でも述べたように，問題を解決する喜びを知った生徒もいるようである。

6. 今後の課題

今回は，予定通りの実践とはいかず急遽ビデオを通しての実践となったので，まず第一に子ども達と直に接しながらの通常の授業やセミナーといった形で，この教材を実践したいと考えている。

そして，この教材の研究についても，カードに書かれた数字を連続する３つの自然数という条件を変えて，単に自然数の中から無作為にとった３つの数であったりと，条件を変えて試行を行ったときに期待値はどうなるか，またその大小関係はどうなるのかなど，教材の研究はより幅広く行えると考えている。よって，本教材の研究を更に行っていきたいと考えている。

引用・参考文献

[1] 文部科学省，PISA(OECD) 生徒の学習到達度調査 2003 年調査，http://www.mext.go.jp/b_menu/toukei/001/04120101.htm#top

[2] 文部科学省，PISA 調査・TIMSS 調査の結果分析 (中間まとめ)，http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/gakuryoku/siryo/05020801/024.htm

[3] 文部科学省，高等学校学習指導要領解説数学編・理科編，平成１７年２月２０日 一部補訂，実教出版株式会社