岐阜数学教育研究
2005, Vol.4, 7-11

「面積の定義」を素材とした教材開発 ～定義の作成～

岩島慶尚[1]，石渡哲哉[2]

本論文は,「面積の定義」を教材とした高校生対象の授業実践の報告書である。実践内容は，これまで学習してきた図形の面積の定義をもとに，一般の図形の面積の定義を考察するものである。ここでは，生徒達の授業における様子を報告し，ねらいの達成度などについて考察する。
＜キーワード＞面積，ジョルダン可測，身近な題材，公共性，論理的思考

1. はじめに

学校で学習する数学に表れる用語や記号のほとんどには定義がある。しかし、どのようにして用語や記号を定義するのかという学習活動はあまり行われていない。そこで，自分たちで定義を吟味することは，高校生が数学をより深く知るために有効であると考え,「定義をする」活動を行うこととした。

本報告書は，2004 年 10 月 23 日，24 日に岐阜駅構内ハートフルスクエアで開講された高校数学セミナーの第 1 日目に行った実践をまとめたものである。クラスの編成は，中学生 3 名，高校生 9 名の全 12 名であった。

2. 教材設定の理由

「面積の定義」を選んだ理由は 2 つある。1 つ目は，円や三角形などの図形について，面積を求める公式を知っているので興味を引きやすいと考えたからである。特に小学校の教科書に載っている円の面積を求める方法と同様に定義できるので，それを参考にしながら行うことができる。2 つ目は，図を利用し補助線や紙を埋め込むなど作業的な活動を伴った実践ができるからである。

文献 [1] によると，三角形，四角形，そして円などの面積は，小学校で学習し，その値を求める公式も知っている。小学校 5 年生の教科書 [2] によると，円の面積を求める公式を作成するときに，次の 2 つの方法を扱っている。1 つ目は，円弧を半径で細かく分割する方法である。円弧を半径で分割し，さらに，その分割の幅を細かくすることで，円弧の半分と円の半径を辺とする長方形と円の面積が等しくなると予想する。そのことを利用するものである。2 つ目は，方眼紙を利用する方法である。初めに，方眼紙を置き，円の中にある方眼紙の面積を求める。次に円の上にさきほどより升目の細かい方眼紙を置き，円の中に入っている方眼紙の面積を求めていく。どちらも極限については触れず，近づいていく様子を示している。一般の図形の面積の定義は小・中学校では扱われないが，これと同様の方法で定義することができる。

今回は極限については触れず，どうしたら厳密に面積が求められそうかを考察する。

以上から，定義をすることの大変さや数学の定義がいかに厳密なのかを知ることができる。

3. 教材開発

古代のエジプトでは，一般の図形の面積を求めるために，面積の分かる図形を埋め込ん

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

でいきその値を利用した。[1]このことを踏まえ，以下では，高校生で学習するリーマン積分のもととなっているジョルダン測度の考えを述べる。

初めに，図形Aの中に1辺aの正方形を敷き詰め，色々な敷き詰め方を考える。そのとき，敷き詰めた正方形の面積の和の最大値（実際には上限）を求める。次に，正方形の1辺の長さを半分の$a/2$にして，同じ図に敷き詰める。このときも敷き詰め方は色々あるが，そのときの敷き詰められた正方形の面積の和の最大値を求める。この値は，先に求めた面積より大きい値になる。さらに正方形の1辺を半分にして$a/2^2$で敷き詰める。この操作を繰り返す。n回目の内側に敷き詰められた正方形の面積の和の最大値を$\overline{A_n}$とする。この値はnを大きくしていくとある値$\overline{A}$に近づいていく。この値を内測度という。ただし，図形全体が正方形で敷き詰められているという保証はない。

今度は1辺aの正方形で覆い尽くす。このとき，重なっていてもかまわない。このときの覆っている正方形からなる図形の面積の最小値（下限）を求める。先ほどと同様に，正方形の1辺を半分にして$a/2$の正方形で覆い尽くし，このときの覆う図形の面積の最小値を求める。このときは，1辺aの正方形で覆った時よりも小さい値になる。さらに，1辺を半分にした$a/2^2$の正方形で覆い，そのときの面積の最小値を求める。この操作を繰り返し，正方形の1辺をどんどん小さくしていく。ここでn回目の覆っている図形の面積の合計を$\underline{A_n}$とする。$n \to \infty$のときの$\underline{A_n}$の極限値$\underline{A}$を外測度という。常に$\overline{A_n} < \underline{A_n}$という関係がある。さらに，$n \to \infty$に対して$\overline{A} = \underline{A}$が成立するとき面積が確定するといい，その値を図形$A$の面積とする。

4. 実践における教材の扱い

[1]詳しくは文献 [4],[5] を参照

実践授業において，一般の図形に対する面積の定義を考察する。辞書では，面積を「広さを表す値」と表現している。しかし，広さを辞書で引いてみると「面積」に戻ってしまう。このことを導入とし，一般の図形に対する面積の定義を考察する。

図1が描かれているプリントを配布する。

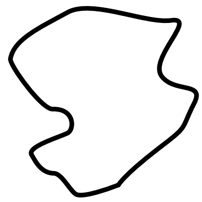

図1

生徒に，円の面積を考察している小学校の教科書のページを提示し、どのように円の面積を定義したのかを振り返る。そのことを踏まえ，予想される活動は次の2つである。1つは，正方形を中に描き，さらに，図形の中に正方形の約半分が入っているものを正方形の面積の1/2と計算し，近似値を求める方法である。2つ目として，面積が求められる図形を中に描き求めていく方法が考えられる。その方法の補助教材として，正方形の紙を用意し中に埋め込めるようにする。

さらに正方形で埋め尽くす方法について考察する。1辺が元の正方形の半分の正方形を用いると前より多く埋め尽くすことができる。この操作を繰り返すと，面積がより正確に求められることがわかる。しかし，高等学校1年生では極限の考えは扱っていないため，近づいていく様子を説明することにとどめる。

上の方法は，ジョルダン内測度の考えである。これだけでは埋め尽くせているのかわからないことを踏まえ，外測度の考えを紹介する。さらに，その定義でも面積が確定しない図形があることを示し，どのように定義が拡張されたのかを紹介することによって，定義に対する見方を変えることができると考える。

このことを通して数学における定義の重要性を実感し，公共性のある定義を作成することがいかに大変かを実感できる。

5．実践のねらい一般の図形の面積の定義を作成することを通して数学の体系における定義がいかに厳密なのかを理解する。

6．授業展開

学習活動	ねらい	指導援助
[問題] 一般の図形の面積を求めてみよう。 ・基本的な図形の面積を確認する。 ・面積が曖昧に定義されていることを知る ・円の面積の求め方を振り返る。	・問題の意図を理解することができる。 ・これまで学習した図形の面積を基に一般の図形の面積を考えることができる。	・基本的な図形の面積の定義を紹介する。 ・辞書を用意して曖昧さを実感させる。
一般の図形の面積をどのように定義したらいいのか考え求めよう。 □個人追究 ・図形の中に同じ四角形を書き面積を定義する。 ・似た形の図形で近似して面積を定義する。 ・計算出来る図形を計算して面積を求める。 ・図形の中に切った折り紙を貼り合計の面積を求める。 ・残った折り紙の面積を求め折り紙の面積から引いて求める。	・一般的な図形を区分求積や似た形の図形を利用して定義出来る。 ・定義した図形の面積の近似値を求めることができる。	・区分求積を利用しやすいように折り紙を用意する。 ・近似の仕方によって面積は一定になるのかを質問する。 ・内側からだけで近似している場合測り尽くせるかを質問する。
□発表 ・考えをまとめて発表する。	・考えをわかりやすく説明できる。	・発表した後，感想や気づいたことを発表させる。
□まとめ ・面積は内側から四角形で近似しその四角形の大きさをどんどん小さくして面積を求める。 ・内側からでは測り尽くしているか分からないので外側からも覆っていく。 ・上で求めた 2 つの面積が一致したとき面積が確定できる。	・定義をするのに外側から覆うことも必要なことに気づく。 ・面積の定義を理解することが出来る。	・極限を利用しているがそのことには強調せずに図から説明する。
□発展的な内容 ・ジョルダン可測の話を交え面積がどのように定義されてきたのかを紹介する。 ・今まで考えてきた方法でも定義出来ない図形があることを紹介する。	・定義することの大変さを実感できる。 ・面積の定義（ジョルダン可測）を理解できる。 ・数学の発展に興味・関心を持つことが出来る	・さらに興味がもてるように人々と面積の歴史や現在の数学では面積をどのように扱っているかなどの話をする。

7. 実践に対する考察

7.1. 生徒の活動

今まで学校で学習してきた図形の面積の求め方を紹介し，図１を提示して「この図形の面積はどのように求めたらいいでしょう。」と問いかけをした。ある程度時間を取った後に，面積が国語辞典では，どのように書かれているのか述べ，面積という言葉が日常では，曖昧に定義されていることを紹介した。

生徒は，一般的な図形の面積について考えたことも無く，数学でよく使う言葉なのに定義が曖昧なことに驚いていた。そのことを踏まえ「一般的な図形の面積の定義を明確にしよう」という動機付けができたので，これを課題とした。

今までの学習では，与えられた定義を利用して問題を解くことや定理を証明することが多かったせいなのか，何をしていいのか分からない様子であった。しかしある生徒は１辺が 1cm の正方形を中に書き，その正方形の面積を計算して求めた。さらに考察し，半分くらいが中に入っている正方形を 1/2 と換算し，より近い値を求めたが，それで，できたと終わってしまった。しかしそれでも埋め尽くせていない部分が多くあり，机間指導の中で「もっと正確な値は求めるためにはどうしたらいいだろう。」と問いかけをしたことにより活動を再開したがそれ以上何をしていいのかわからず考えていた。

何をしていいのか分からない生徒のために用意していた正方形の紙を配布した。生徒は，その紙を計算できそうな形に切り，図にはめ込んでいった。そして、はめ込んでいった図形の面積を求め，その合計を求めようとしていた。また，ある生徒は，初めに１枚の正方形の紙の面積を求め，色々な形に切って，図形に貼り，残った正方形の紙の面積を求めれば面積が求まると考えた。しかし曲線でできている図形であり貼り尽くすことが難しく，残った図形も歪な形になり求めることができなかった。

ほとんどの生徒が考えたのは内側から埋め尽くしていく方法であった。これは内測度の考え方である。しかし，ある生徒は，図形の周りを長方形で囲い余分な部分の面積を求め，最後に引く方法を考えていた。これは，外測度の考え方である。

最終的には，多くの生徒が，正方形の紙を使ったり，定規で線を描き入れるなどして，1 辺が 1cm の正方形を利用して，面積の近似値を求めることができた。この値は，生徒によって，かなりの誤差があり一致しなかった。

最後にどのように面積を求めたのかを２人の生徒に説明してもらった。先に発表した生徒は内側に 1cm の正方形を埋め尽くしていき，図形の半分（三角形や長方形にした時も可）のものは 1/2cm^2 と換算して計算したこと説明した。もう１人の生徒は，外側を四角で囲い余分な部分の面積を引くことで面積を求めたことを説明した。その後，面積の定義をジョルダン測度をもとに説明し，最後に，それでも面積の求められない図形があることに簡単に触れた。

7.2. 達成できたこと

・今まで習ってきた図形の面積を紹介しさらに辞書の曖昧な表現を紹介することで明確な定義をしようとする動機付けができた。

・補助教材として算数の教科書と折り紙を用意し生徒にあった対応ができた。

・生徒の中から内測度と外測度の考えが自然にでるような授業展開ができた。

・定義に対しての認識は変わりましたかというアンケートの質問に対して，全ての生徒が変わった，大変変わったと回答していた。

7.3. 反省

より多くの時間を使い，適切な援助ができれば，さらに深い追究ができたと考える。たとえば，面積が一致しなかったとき「この値

が一致するためにはどのような工夫が必要だろう。」のような助言ができると良かった。また，最後の説明の要点がまとめっていなかった。ルベーグ測度は，生徒に是非伝えたい内容であったが，今回のねらいを踏まえると，定義できることをしっかり押さえることを優先するべきであった。また一般の図形を岐阜県の地図とし，どんどん正確な面積が求められているなどを実感しやすい展開にした方がより興味が持てたのではと考える。

引用・参考文献

[1] 文部省，1999，小学校学習指導要領解説ー算数編ー，東洋館出版社.

[2] 岩田恵司他，たのしい算数 5 下，2002，大日本図書.

[3] 文部省，1999，高等学校学習指導要領解説ー理系編ー東山書房.

[4] 新井仁之，2003，ルベーグ積分講義，日本評論社.

[5] T.L. ヒース，平田寛・菊池・大沼［訳］，1959，ギリシア数学史，共立出版.