一般化ロジスティック方程式のウラム安定性とその応用について

鬼塚 政一 (岡山理科大学 理学部)

1940 年に Ulam によって提唱された関数方程式の安定性の概念は，1990 年代になり，常微分方程式へと導入された．大雑把には，任意の ε-近似解に対して，ある真の解が存在し，それらの差が有限にとどまるとき，ウラム安定と呼ばれる．この安定性は，いわゆる摂動問題の一種として据えることができるが，摂動のサイズが十分小さいとまでは仮定しない．さて，常微分方程式のウラム安定性の研究は，線形微分方程式に対するものが多く，非線形微分方程式に対する研究は進展していないのが実情である．不動点定理やリプシッツ条件などを使用した結果もみられるが，それらの多くは，独立変数の区間が限定されていたり，近似解と真の解の差が不明瞭であったり，都合の良い条件が課されるなど大雑把なものであった．そこで，2018 年に Popa 等 [7] がロジスティック方程式に対して，非線形特有の解の挙動に対応する条件付きウラム安定性という新たな概念を提唱し，非線形微分方程式に対する詳細なウラム安定性解析を行った．本研究では，Popa 等の手法を精査・整理し，丁寧に解析することで，一般化ロジスティック方程式に対する条件付きウラム安定性の結果を得たので紹介する．加えて，リミットサイクルをもつ２次元非線形微分方程式系の近似解と真の解の関係にも触れ，リミットサイクルの近似について紹介したい．

１．一般化ロジスティック方程式のウラム安定性

生物学，人口統計学，経済学を含む幅広い応用による要求から，ロジスティックモデル

$$\dot{C} = rC\left(1 - \frac{C}{K}\right)$$

について，さまざまな調査がなされてきた（[1, 2] を参照）．ここで，$\dot{} = \frac{d}{d\tau}$ であり，C は人口規模，$r > 0$ と $K > 0$ は，それぞれ成長率と環境収容力を意味する．このロジスティックモデルの一般化の一つとして，リチャードモデル

$$\dot{C} = rC\left(1 - \frac{C^\alpha}{K}\right)$$

が知られている．ただし，$\alpha > 0$ である．リチャードモデルは，感染症のダイナミクスを説明することも知られており，Nishiura, Tsuzuki, Yuan, Yamaguchi and Asai [3] によると，C, r, K および α はそれぞれ，感染症の累積発症数，成長率，最終的な累積発症数および流行曲線の変曲点を表すパラメータとされている．加えて，リチャードモデルの指数項が SIR モデルの基本再生産数に 1 対 1 の対応をもつことも Wang, Wu and Yang [4] によって証明されている．最近では，COVID-19 の流行に関係する研究もなされており，その適用範囲ははかり知れない（[5, 6] を参照せよ）．

---

e-mail: onitsuka@ous.ac.jp; URL: `https://www.xmath.ous.ac.jp/~onitsuka/`;
本研究は JSPS 科研費 JP20K03668 の助成を受けたものである; 岐阜数理科学セミナー 2022 年 9 月 1 日

リチャードモデルに変数変換 $t := r\tau$, $y := K^{-\frac{1}{\alpha}}C$ を施せば，非線形常微分方程式

$$y' = y\,(1 - y^{\alpha}) \tag{1-1}$$

を得る．ただし，$' = \frac{d}{dt}$ (t が独立変数) である．（今回は，前半と後半に分けて講演するため，前半のスライドで (1) と表したものは，このアブストラクトでは，(1-1) と書き，後半のスライドで (1) と表したものは，(2-1) と書くことにする）近年，Popa, Raşa and Viorel [7] によって，ロジスティック方程式の摂動問題の一種であるウラム安定性の研究が開始された．彼らは，非線形常微分方程式

$$y' = y(1 - y) \tag{1-2}$$

に対して，**条件付きウラム安定性 (conditional Ulam stability)** と呼ばれる新たな概念を提案している．大雑把には，方程式の真の解とその近似解（摂動方程式の解）の差が高々有界であるとき，ウラム安定と呼ばれる．以後，ウラム安定性について定義し，さらに，条件付きウラム安定性の定義を与えることにする: いま，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．方程式

$$y' = F(t, y) \tag{1-3}$$

が，I 上で**ウラム安定**であるとは，ある $L > 0$ が存在し，任意の $\varepsilon > 0$ と

$$\sup_{t \in I} |\eta' - F(t, \eta)| \le \varepsilon$$

を満たす任意の η に対して，方程式 (1-3) の解 y が存在し，

$$\sup_{t \in I} |\eta(t) - y(t)| \le L\varepsilon$$

を満たすときを言う．ここで，L を方程式 (1-3) に対するウラム定数と呼ぶ．この定義から，ウラム定数は方程式 (1-3) の解とその近似解との間の誤差の振れ幅を意味することが分かる．例えば，$I = \mathbb{R}$ であって，$F(t, y) = \lambda y$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ のとき，線形微分方程式 $y' = \lambda y$ がウラム安定であるための必要十分条件は，$\lambda \ne 0$ であることが知られている．加えて，$L = \frac{1}{|\lambda|}$ が最小のウラム定数であることも判明している（[8, 9] を見よ）．この線形の場合におけるウラム安定性は次のように言い換えることができる:

> 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の点（初期点）$\eta_0 \in \mathbb{R}$ を通る近似解 $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ に対して，ある真の解 $y \in C^1(\mathbb{R})$ が存在し，$\mathbb{R}$ 上で $|\eta(t) - y(t)| \le \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ を満たす．

ここで，もし，$F(t, y) = \lambda y$ ならば，任意の ε と η_0 に対して，不等式 $|\eta(t) - y(t)| \le \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ が成立していることに注意しよう．では，一般に $F(t, y)$ が非線形の場合でもこのような事実は成り立つのか？その答えは,「否」であり，ε と η_0 はどんな値でもよい訳ではなく，制約を課す必要があることが分かっている．実際，2018 年に Popa 等 [7] によって，条件 $0 < \varepsilon \le \frac{1}{4}$ および $\eta_0 \ge \frac{1}{2}$ の下で方程式 (1-2) がウラム安定であることが示されており，特に，$\varepsilon > \frac{1}{4}$ ならば，不安定となるため，$\varepsilon = \frac{1}{4}$ は閾値であることも示されている．端的に言えば，このような制約の下で方程式の真の解とその近似解の差が高々有界であるとき，

条件付きウラム安定と呼ばれる．以下に厳密な定義を与える: いま，$A \subseteq (0,\infty)$, $B \subseteq \mathbb{R}$ とする．族 $\mathcal{C}_B$ を

$$\mathcal{C}_B := \left\{x \in C^1[0,T_x) : x(0) \in B, T_x > 0 \text{ with } T_x = \infty \text{ or } |x(t)| \to \infty \text{ as } t \nearrow T_x\right\}$$

と定義する．ここで，$[0,T_x)$ は x の最大存在区間を意味する．方程式 (1-3) が，A と族 $\mathcal{C}_B$ に関して**条件付きウラム安定**であるとは，ある $L>0$ が存在し，任意の $\varepsilon \in A$ と

$$\sup_{t\in[0,T_\eta)} |\eta' - F(t,\eta)| \le \varepsilon$$

を満たす任意の $\eta \in \mathcal{C}_B$ に対して，方程式 (1-3) の解 $y \in \mathcal{C}_B$ が存在し，

$$\sup_{t\in[0,\min\{T_y,T_\eta\})} |\eta(t) - y(t)| \le L\varepsilon$$

を満たすときを言う．もし，$A=(0,\infty)$ かつ $B=\mathbb{R}$ ならば，通常のウラム安定である．以下に，Popa 等 [7] の先行結果を紹介する．

定理 A. 集合 $A = \left(0,\frac{1}{4}\right]$, $B = \left[\frac{1}{2},\infty\right)$ とするとき，方程式 (1-2) は，A と族 $\mathcal{C}_B$ に関して条件付きウラム安定であり，ウラム定数は，$L=2$ である．

この研究に触発され，演者 [10–12] も条件付きウラム安定性に関連する研究を行ってきた．ただし，これらの研究で主として扱った方程式は，それぞれ $y' = y(y-1)$, $y' = y^{\frac{2}{3}} - y$ および $y - xy' - (y')^2 = 0$ であり，何れも方程式 (1-1) に含まれないこと，そして，現時点において，変数変換を用いて，方程式 (1-1) の問題に帰着できないことに注意しておく．また，離散型ロジスティックモデルに対する条件付きウラム安定性の研究も進展している．2017 年に Jung and Nam [13] によって，Pielou 型ロジスティック差分方程式の条件付きウラム安定性が考察され，その後，Nam [14–16] がメビウス型差分方程式の条件付きウラム安定性を考察した．ただし，これらの研究では上記のような定義はなされていなかった．さて，本研究は，文献 [10] で得た解析法を基軸に，一般化ロジスティック方程式である方程式 (1-1) に適用可能な定理の確立を目的として取り組んだ．比較原理や α に関係する繊細な不等式を導入することにより，以下の結果を得たので紹介する．

定理 1. 集合

$$A = \left(0, \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}\right], \quad B = \left[\frac{1}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}}, \infty\right)$$

とするとき，方程式 (1-1) は，A と族 $\mathcal{C}_B$ に関して条件付きウラム安定であり，ウラム定数は，$L = \max\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha}, \frac{\alpha+1}{\alpha^2}\right\}$ である．

本研究では，この結果をさらに発展し，リチャードモデルや非自励系リチャードモデル

$$\dot{C} = r(\tau)C\left(1 - \frac{C^\alpha}{K}\right)$$

に対する件付きウラム安定性の定理を確立したので，その報告も行いたい．また，例と数値シミュレーションも紹介する．

２．リミットサイクルの近似

講演の後半では，２次元非自励非線形系

$$x' = f(t)x + g(t)y - \frac{f(t)}{K}x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \qquad y' = -g(t)x + f(t)y - \frac{f(t)}{K}y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \tag{2-1}$$

およびその摂動系

$$x' = f(t)x + g(t)y - \frac{f(t)}{K}x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} + p_1(t), \qquad y' = -g(t)x + f(t)y - \frac{f(t)}{K}y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} + p_2(t) \tag{2-2}$$

を考える．ただし，f, g, p_1, $p_2 \in C[0,\infty)$ であり，α, $K>0$ とする．特に，$f=g\equiv 1$, $\alpha=2$ かつ $K=1$ であるとき，系 (2-1) と (2-2) は２次元自励非線形系

$$x' = x + y - x\left(x^2+y^2\right), \qquad y' = -x + y - y\left(x^2+y^2\right) \tag{2-3}$$

およびその摂動系

$$x' = x + y - x\left(x^2+y^2\right) + p_1(t), \qquad y' = -x + y - y\left(x^2+y^2\right) + p_2(t) \tag{2-4}$$

になる．系 (2-3) は丁度一つの安定リミットサイクル $x^2+y^2=1$ をもつことが知られており，その事実も簡単に確認することができる．一方，系 (2-4) は非自励系であるので，リミットサイクルをもつ条件を考察するのは困難である．しかしながら，系 (2-4) は，$p_1(t)$ や $p_2(t)$ に制約を課せば，系 (2-3) の近似方程式とみなせる．加えて，系 (2-1) と (2-2) に極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を施せば，極座標系

$$r' = f(t)r\left(1-\frac{r^\alpha}{K}\right), \qquad r\theta' = -g(t)r, \tag{2-5}$$

$$r' = f(t)r\left(1-\frac{r^\alpha}{K}\right) + p_1(t)\cos\theta + p_2(t)\sin\theta, \qquad r\theta' = -g(t)r - p_1(t)\sin\theta + p_2(t)\cos\theta \tag{2-6}$$

を得る．系 (2-5) と (2-6) の第１式はそれぞれ，非自励系リチャードモデルとその摂動方程式であることに気づく．

本研究では，$t\geq 0$ に対して，条件 $\|(p_1(t),p_2(t))\|\leq\varepsilon$ を仮定し，系 (2-5) と (2-6) に対して，リチャードモデルの条件付きウラム安定性の概念を利用することを試みた．その結果，ある集合内から開始する系 (2-2) の任意の解軌道（近似解）に対して，それと同じ初期値から開始する系 (2-1) の解軌道（真の解）が，近くに常にとどまることが示せたので報告する．特に，系 (2-1) のリミットサイクル上から開始する系 (2-2) の解軌道は，リミットサイクルを内部に含むある円環内にとどまることが分かるため，その解軌道はリミットサイクルの近似と呼べる．得られた結果を例と数値シミュレーションを踏まえて紹介したい．

参考文献

[1] L. J. S. Allen, An Introduction to Mathematical Biology, Prentice Hall, 2006.

[2] J. D. Murray, Mathematical Biology. I. An Introduction. Third edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, 17. Springer-Verlag, New York, 2002.

[3] H. Nishiura, S. Tsuzuki, B. Yuan, T. Yamaguchi and Y. Asai, *Transmission dynamics of cholera in Yemen, 2017: a real time forecasting*, Theor. Biol. Med. Model., 2017;14:14.

[4] X-S. Wang, J. Wu and Y. Yang, *Richards model revisited: validation by and application to infection dynamics*, J. Theoret. Biol. 313 (2012), 12–19.

[5] X. Luo, H. Duan and K. Xu, *A novel grey model based on traditional Richards model and its application in COVID-19*, Chaos Solitons Fractals 142 (2021), Paper No. 110480, 15 pp.

[6] A. Smirnova, B. Pidgeon, G. Chowell and Y. Zhao, *The doubling time analysis for modified infectious disease Richards model with applications to COVID-19 pandemic*, Math. Biosci. Eng. 19 (2022), no. 3, 3242–3268.

[7] D. Popa, I. Raşa and A. Viorel, *Approximate solutions of the logistic equation and Ulam stability*, Appl. Math. Lett. 85 (2018), 64–69.

[8] M. Onitsuka, *Hyers–Ulam stability of first order linear differential equations of Carathéodory type and its application*, Appl. Math. Lett. 90 (2019), 61–68.

[9] M. Onitsuka and T. Shoji, *Hyers–Ulam stability of first-order homogeneous linear differential equations with a real-valued coefficient*, Appl. Math. Lett. 63 (2017), 102–108.

[10] M. Onitsuka, *Conditional Ulam stability and its application to the logistic model*, Appl. Math. Lett. 122 (2021), Paper No. 107565, 7 pp.

[11] M. Onitsuka, *Conditional Ulam stability and its application to von Bertalanffy growth model*, Math. Biosci. Eng. 19 (2022), no. 3, 2819–2834.

[12] M. Onitsuka and Iz. El-Fassi, *On approximate solutions of a class of Clairaut's equations*, Appl. Math. Comput. 428 (2022), Paper No. 127205, 13 pp.

[13] S.-M. Jung and Y. W. Nam, *Hyers–Ulam stability of Pielou logistic difference equation*, J. Nonlinear Sci. Appl. 10 (2017), no. 6, 3115–3122.

[14] Y. W. Nam, *Hyers–Ulam stability of elliptic Möbius difference equation*, Cogent Math. Stat. 5 (2018), no. 1, Art. ID 1492338, 9 pp.

[15] Y. W. Nam, *Hyers–Ulam stability of hyperbolic Möbius difference equation*, Filomat 32 (2018), no. 13, 4555–4575.

[16] Y. W. Nam, *Hyers–Ulam stability of loxodromic Möbius difference equation*, Appl. Math. Comput. 356 (2019), 119–136.

[17] M. Onitsuka, *Approximate solutions of generalized logistic equation*, submitted.

[18] M. Onitsuka, *Approximation of limit cycle of differential systems with variable coefficients*, submitted.