# 電気回路学III

第１回：三相交流の基礎



## 第１回：三相交流の基礎

- 三相交流の定義，メリット
- 三相交流の発生
- 三相交流の表示法　〜三角関数，フェーザ，複素数〜
- 回路結線
  - Y結線とΔ結線
- 用語
  - 相，線間，中性点
- 結線方法と電圧の関係，電流の関係



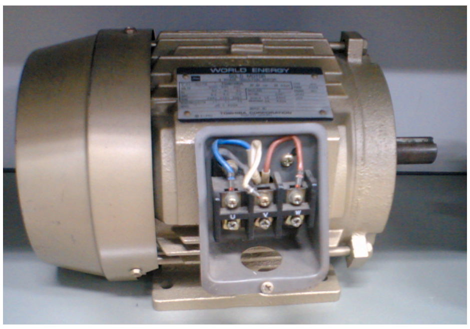
## 配電系統の実際



## 配電系統の実際

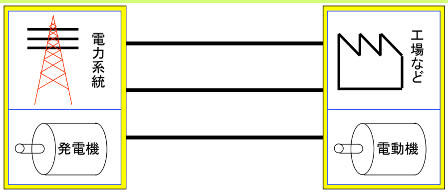


## 交流電動機（誘導電動機）



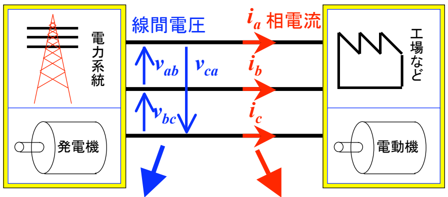


## 三相交流回路とは・・・




メリット
・単相2線式と比較すると同一電圧，電流の場合，電線1本当たりの送電電力は1.15倍
　→装置（電動機）の小型化 or 配線径小
・単相交流を得ることもできる
・回転磁界が容易に得られる　→交流電動機駆動に適している

## 三相交流回路とは・・・



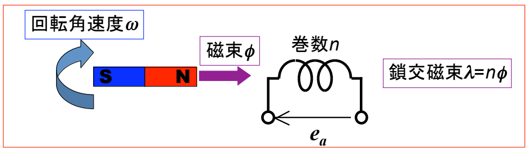

- 周波数：等しい
- 位相差：それぞれ2π/3
  （大きさも等しい："**対称**"
  そうでない："**非対称**"）

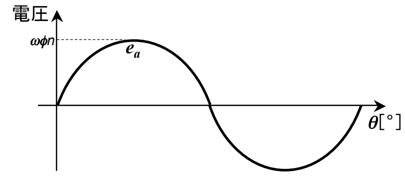
- 周波数：等しい
- 位相差：それぞれ2π/3
  （大きさも等しい："**平衡**"
  そうでない："**不平衡**"）

※対称：電源**電圧**が対称で三相とも同波形，平衡：負荷**電流**が対称で三相とも同波形



## 単相起電力の発生



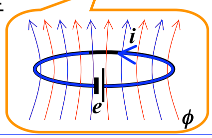






## 電磁気学の復習　～電磁誘導～

- ファラデーの法則（起電力の大きさ，1931年）
  - 一つの回路に電磁誘導によって生じる起電力は，その回路に鎖交する磁束数の時間変化量に比例
- レンツの法則（起電力の向き，1934年）
  - 電磁誘導によって生じる起電力は，磁束変化を妨げる電流を生じる向きに発生
- 数式化（ノイマン）

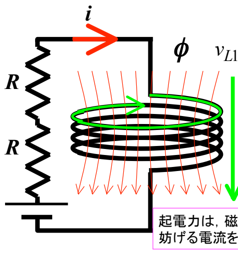
$n$回巻きコイル：$e = \boxed{-}n\dfrac{d\Phi_m}{dt}$






## 電磁気学の復習　～自己誘導～

- 空心コイル：鉄心なし
  ⇒電流$i$と磁束$\phi$は比例




$v_{L1} = \dfrac{d\Phi_m}{dt}$

逆起電力

$v_L = n\dfrac{d\Phi_m}{dt}$

起電力は，磁束変化を妨げる電流を生じる向き

$n\phi = \lambda = Li$

磁束鎖交数（鎖交磁束数）

自己インダクタンス（単位：[H]，ヘンリー）

$v_L = n\dfrac{d\Phi_m}{dt} = L\dfrac{di}{dt}$

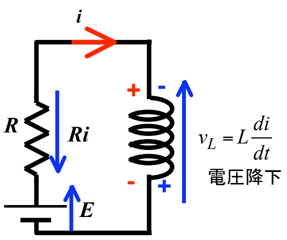
電磁誘導に関する一連の法則（ファラデーの法則，レンツの法則，ノイマンの数式）は，コイルの巻き方向，電流（磁束）の正方向，電圧の正方向を定義してはじめて説明がつく



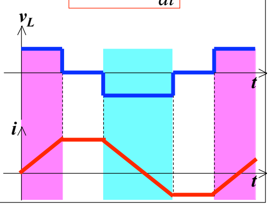
## 電気回路の復習　～電圧方程式～

- キルヒホッフの電圧則より電圧方程式は

$E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$

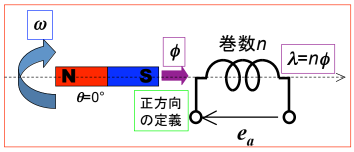


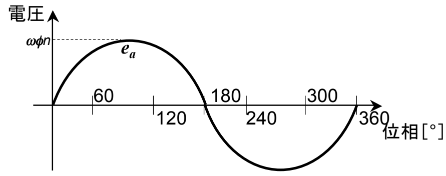

コイルの電流（磁束）が減少⇒負電圧
増加⇒正電圧



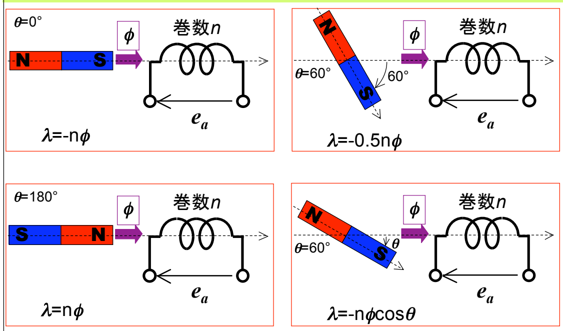



## 単相起電力の発生



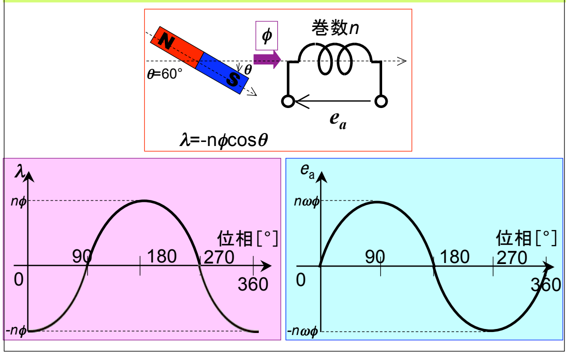



# 鎖交磁束



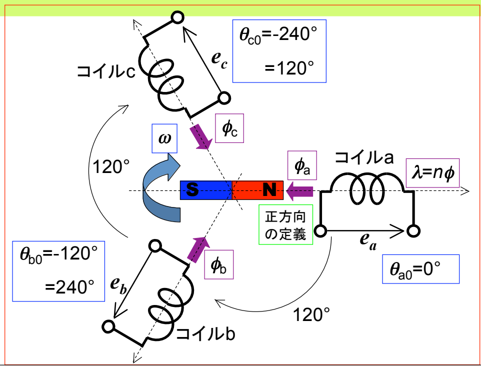



# 単相起電力の発生



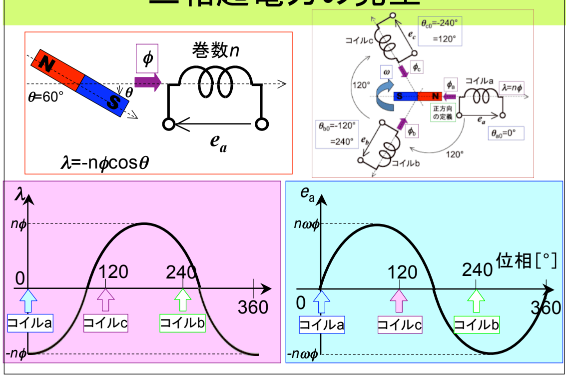



# 三相起電力の発生



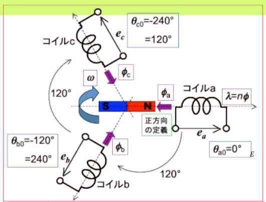



# 三相起電力の発生



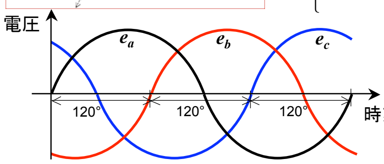



# 三相起電力の発生



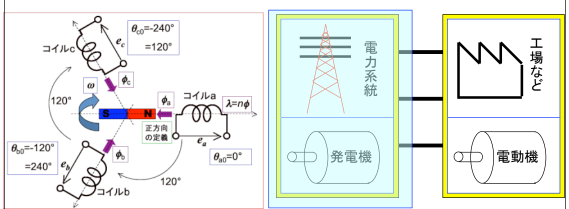
各電圧の振幅を$\sqrt{2}E$とすれば,

$$
\begin{cases}
e_a = \sqrt{2}E\sin\omega t \\
e_b = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\
e_c = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)
\end{cases}
$$



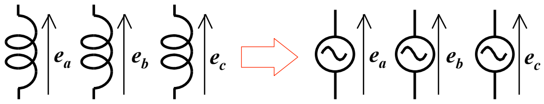



# 三相回路の結線方式




コイル端子の合計:6 ？ 三相回路の端子数:3

## 三相起電力の結線方式

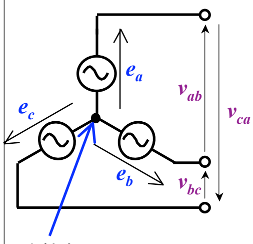



$$e_a = \sqrt{2}E\sin\omega t$$
$$e_b = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$
$$e_c = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

とする。



## 三相起電力の結線 ～Y結線～




中性点

$e_a$, $e_b$, $e_c$ ：相電圧

$v_{ab}$, $v_{bc}$, $v_{ca}$ ：線間電圧

※ 相電圧≠線間電圧

$$e_a = \sqrt{2}E\sin\omega t$$
$$e_b = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$
$$e_c = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

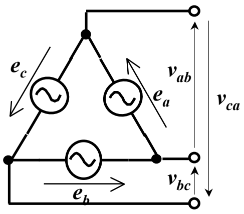
大きさ：$\sqrt{3}$ 倍

位相：π/6進み

$$v_{ab} = e_a - e_b$$
$$= \sqrt{2}E\sin\omega t - \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$
$$= \sqrt{6}E\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$v_{bc} = \sqrt{6}E\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$v_{ca} = \sqrt{6}E\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$



## 三相起電力の結線 ～Δ結線～




$$e_a = v_{ab} = \sqrt{2}E\sin\omega t$$
$$e_b = v_{bc} = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$
$$e_c = v_{ca} = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

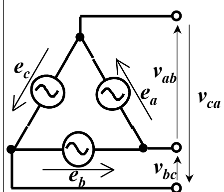
$e_a$, $e_b$, $e_c$ ：相電圧

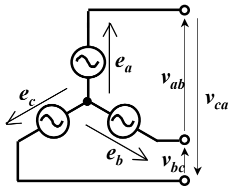
$v_{ab}$, $v_{bc}$, $v_{ca}$ ：線間電圧

※ 相電圧＝線間電圧



## 三相起電力の結線 ～Δ結線とY結線の比較～




$$v_{ab} = \sqrt{2}E\sin\omega t$$
$$v_{bc} = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$
$$v_{ca} = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

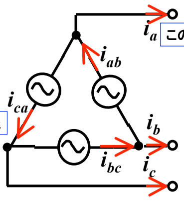
大きさは $\sqrt{3}$ 倍

位相差は $\frac{\pi}{6}$

$$v_{ab} = \sqrt{6}E\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$v_{bc} = \sqrt{6}E\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$v_{ca} = \sqrt{6}E\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$



## 三相起電力の結線 ～Δ結線の相電流～




この電流は線電流

この電流は相電流

起電力の場合と逆！！

$$i_{ab} = \sqrt{2}I\sin\omega t$$
$$i_{bc} = \sqrt{2}I\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$
$$i_{ca} = \sqrt{2}I\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

大きさは $\sqrt{3}$ 倍

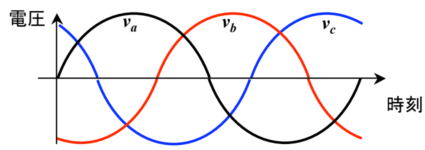
位相差は $\frac{\pi}{6}$

相電流は

$$i_a = i_{ab} - i_{ca} = \sqrt{6}I\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$i_b = \sqrt{6}I\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$i_c = \sqrt{6}I\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$



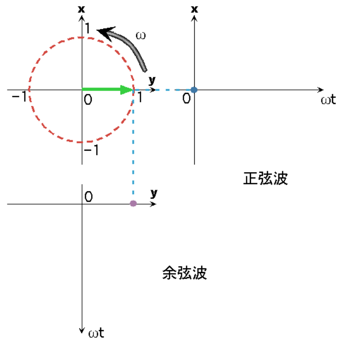
## 記号法の適用




$$v_a = \sqrt{2}E\sin\omega t$$
$$v_b = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$
$$v_c = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

記号法では？

## 三角関数は回転ベクトルの写像

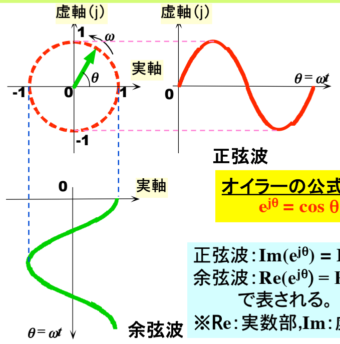



振幅１の正弦波
余弦波

単位ベクトルの回転
X軸に対する写像
・・・余弦波
Y軸に対する写像
・・・正弦波



## 回転ベクトルは複素平面上が便利!!

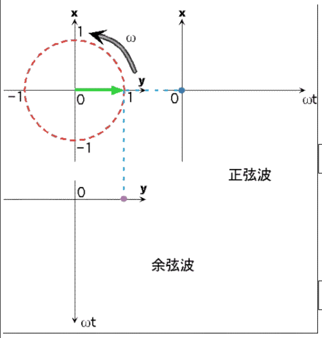



**オイラーの公式(重要！)**
$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

正弦波：$\mathrm{Im}(e^{j\theta}) = \mathrm{Im}\{\exp(j\theta)\}$
余弦波：$\mathrm{Re}(e^{j\theta}) = \mathrm{Re}\{\exp(j\theta)\}$
で表される。
※Re：実数部, Im：虚数部を表す



## 単相正弦波電圧の場合



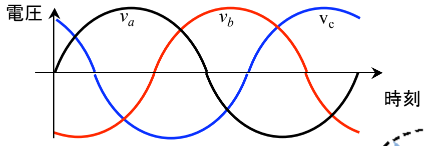

振幅$E_m$の正弦波

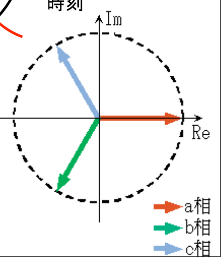
大きさが$E_m$の回転ベクトル

電流，電圧は同速度なので回転を止める

大きさが$E_m$の静止ベクトル

## 三相正弦波電圧の場合




- 対称三相交流電圧を$v_a$, $v_b$, $v_c$とする。複素平面上では右図のごとく各相の電圧ベクトルは回転。
- 各ベクトルの大きさは等しく,各ベクトル間の位相差は常に$2/3\pi$,回転速度は電源角速度$\omega=2\pi f$。



## 三相対称正弦波電圧のベクトル表示

三相正弦波電圧を次式とする。

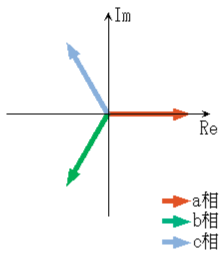
$$\boxed{\begin{aligned} v_a &= \sqrt{2}E\sin\omega t \\ v_b &= \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ v_c &= \sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned}}$$

$$\dot{V}_a = \dot{E} \qquad = \dot{E}$$

$$\dot{V}_b = \dot{E}\exp\left(-j\frac{2}{3}\pi\right) = \dot{E}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a^2\dot{E}$$

$$\dot{V}_c = \dot{E}\exp\left(-j\frac{4}{3}\pi\right) = \dot{E}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a\dot{E}$$

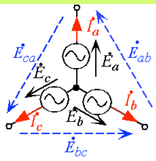
※演算子 $a = \exp\left(j\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

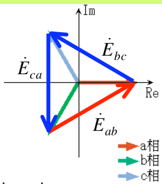



⇒ $\dot{V}_a + \dot{V}_b + \dot{V}_c = 0$



## Y結線の線間電圧




$$\dot{E}_a = \dot{E}$$

$$\dot{E}_b = \dot{E}\exp\left(-j\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\dot{E}_c = \dot{E}\exp\left(-j\frac{4}{3}\pi\right)$$

⇒

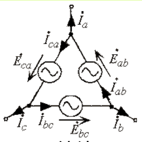
$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_a - \dot{E}_b$$

$$= \sqrt{3}\dot{E}_a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\dot{E}_a\exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)$$

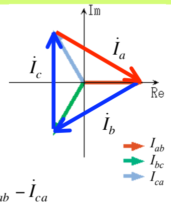
$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_b - \dot{E}_c = \sqrt{3}\dot{E}_b\exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_c - \dot{E}_a = \sqrt{3}\dot{E}_c\exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)$$

## Δ結線の線電流




Δ結線

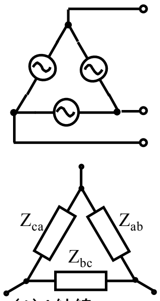



$$\dot I_{ab} = \dot I$$
$$\dot I_{bc} = \dot I \exp\left(-j\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$\dot I_{ca} = \dot I \exp\left(-j\frac{4}{3}\pi\right)$$

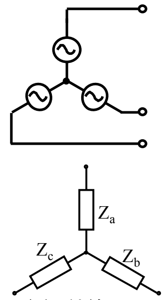
$$\dot I_a = \dot I_{ab} - \dot I_{ca}$$
$$= \sqrt{3}\dot I_{ab}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\dot I_{ab}\exp\left(-j\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\dot I_b = \dot I_{bc} - \dot I_{ab} = \sqrt{3}\dot I_{bc}\exp\left(-j\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\dot I_c = \dot I_{ca} - \dot I_{bc} = \sqrt{3}\dot I_{ca}\exp\left(-j\frac{\pi}{6}\right)$$



## 負荷の結線 ～Δ結線とY結線～




(1)Δ結線




(2)Y結線



## 問題

- 対称三相交流電圧は各相電圧の和がゼロである。これを示せ。
- 対称三相交流電圧は各線間電圧の和もゼロである。これを示せ。
- Y結線された三相交流電圧源の線間電圧の実効値は200Vであった。相電圧の実効値および振幅はいくらか。
- 三相交流発電機の回転数が，発電電圧の周波数に比例することを示せ。