未解決問題を用いた探究教材の研究

R03/10/30

岐阜大学　花木　良
熊本大学　吉井貴寿

研究の背景と目的

SSH事業で探究活動の実践
教科として探究活動を行う理数科の新設
日常の数学学習でも，探究が行われることを期待

SSH校の発表要旨を分析し未解決問題に興味をもつ生徒が見られる（花木，2020）
高校生が理解できる未解決問題を数多く取り上げ，HPでの公開を提案（花木・吉井，2021 ）

中学校や高等学校の数学を生かし，探究可能な未解決問題があることを明らかにする
「探究」とは，生徒が定理を創造するような活動を想定

探究テーマとしての未解決問題

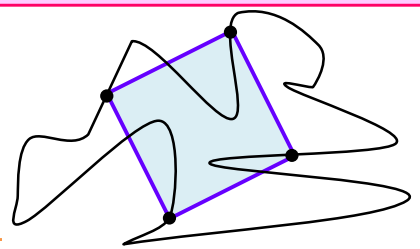
探究課題の設定の困難性（cf.京都市立堀川高等学校，2011）
① 非自明性　：答えが直ちにわからない.
② 解決可能性：期間内に一定の解決ができる.
③ 有価値性　：社会的・学術的価値を有している.
（学習者が価値を感じる）

未解決問題による困難性の解消
① 未解決問題は解決されていないため，その解決を目指して課題設定をすれば，非自明性が生じる
② 未解決問題の仮定を限定したりすることで，解決可能性を有する課題を生み出すことが可能
③ 未解決問題の解決が学術的な価値を有している

未解決問題に関する図形教材

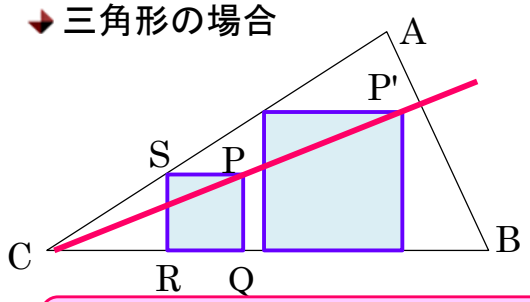
- 前提知識は，数学Ⅰの三角比までを想定している
- 未解決問題が知られている（クロフト他，1996）
  - 秋山（2020）では，カスプのない区分的にC_1級の曲線に関してはStromquistが肯定的に解決

平面上に単純閉曲線Cが与えられたとすると，C上には，正方形をなす4点を取ることができる.



探究例｜三角形上の正方形

- 探究の方針
  形を三角形や平行四辺形などに限定
  方法として，動的幾何ソフトの利用
- 三角形の場合

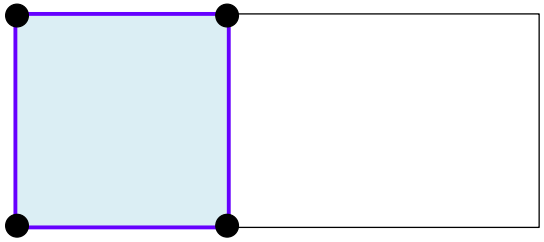


x : CRの距離
∠ACB＝θ
R $(x, 0)$
S $(x, x\tan\theta)$
Q $(x+x\tan\theta, 0)$
P $(x+x\tan\theta, x\tan\theta)$

定理
任意の三角形の辺上には正方形をなす4点を取れる

探究例｜長方形上の正方形

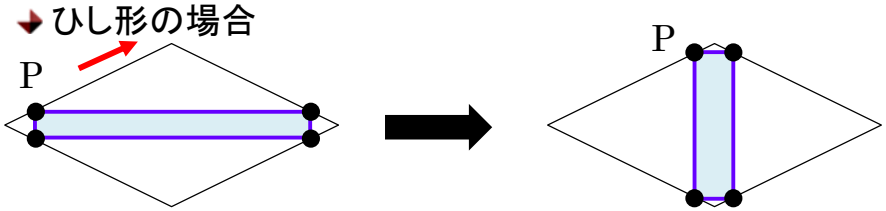
- 四角形は特殊な形から考えていく
- 長方形では，その短辺を一辺とする正方形をなす4点を取ることができる



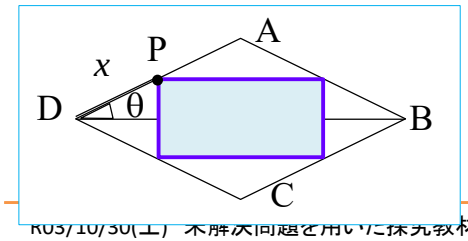
定理
任意の長方形の辺上には正方形をなす4点を取れる

探究例｜ひし形上の正方形

- ひし形の場合



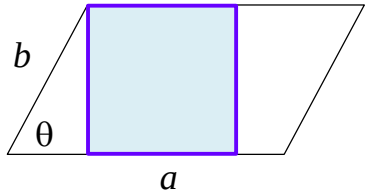
定理
任意のひし形の辺上には正方形をなす4点を取れる



$$x = \frac{1}{\sqrt{2}(\sin(\theta + 45°))}$$

探究例｜平行四辺形上の正方形

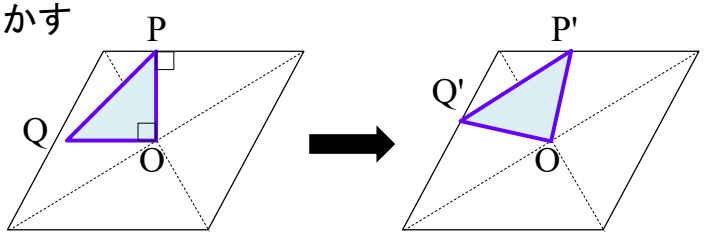
- 平行四辺形
  その2辺の長さをa, b $(a>b)$，鋭角をθ
- $b\sin\theta \leqq a - b\cos\theta$ の場合



- 次に，$b\sin\theta > a - b\cos\theta$ の場合
  平行四辺形と正方形の点対称性から，互いの対角線の交点は一致すると仮定する

探究例｜平行四辺形上の正方形

- Oが直角である直角二等辺三角形POQを取り，点Pを動かす



- QとQ' は，直線APに垂直に動く
- $b\sin\theta > a - b\cos\theta$ のであるので，Q' は辺上に取れる

定理
任意の平行四辺形の辺上には正方形をなす4点を取れる

未解決問題に関する代数教材

- 前提知識は，数学Bの数列
- σ(n)：自然数nの約数の和（nも含む）
- 完全数：σ(n)＝2nを満たす数
  過剰数：σ(n)＞2nを満たす数
  不足数：σ(n)＜2nを満たす数
  - σ(6)＝1＋2＋3＋6＝2×6 より，6は完全数
  - σ(12)＝1＋2＋3＋4＋6＋12＞2×12 より，12は過剰数
- 未解決問題が知られている

・奇数の完全数は存在するか
・偶数の完全数は無限に存在するか

偶数の完全数

- 2^{n-1}が素数の自然数$2^{n-1}(2^n-1)$は完全数である（原論）
- 逆に，偶数の完全数はこの形に限る（オイラー）
- 2^{n-1}で表される素数が無限に存在するかに還元される
- 2^{n-1}が素数であるための必要条件 （nが合成数）
  - $n=2, 3, 5$のとき，$2^2-1=3$，$2^3-1=7$，$2^5-1=31$で素数
  - $n=4$のとき，$2^4-1=15=3\times5$ で合成数
  - $n=6$のとき，$2^6-1=63=7\times9$ で合成数
  - $n=9$のとき，$2^9-1=(2^3-1)(2^6+2^3+1)$ で合成数
- $n=ml$ なら，$x^{ml}-1=(x^m-1)(x^{m(l-1)}+x^{m(l-2)}+\ldots+x^{m+1})$
- 逆「nが素数ならば2^n-1は素数である」は成り立たない
  - $n=11$のとき，$2^{11}-1=2047=23\times89$

$3^m\times5\times7$型の数

- $3^m\times5\times7$型の完全数が存在するか
  - 今野紀雄，成松明廣（2020）．未解決問題から楽しむ数学．
- $\bar{\sigma}(n)=\frac{\sigma(n)}{2n}$とを定義すると，$\bar{\sigma}(n)=1$が完全数
- $\bar{\sigma}(3^m\times5\times7)$を考えると，
- $\bar{\sigma}(3^m\times5\times7)=(1+3+\cdots+3^m)(1+5)(1+7)$
  $\frac{\bar{\sigma}(3^{m+1}\times5\times7)}{\bar{\sigma}(3^m\times5\times7)}>1$より単調増加
  $\bar{\sigma}(3^2\times5\times7)<1<\bar{\sigma}(3^3\times5\times7)$より，この型の完全数は存在しない

定理　$3^m\times5\times7$型の完全数は存在しない

不足数と過剰数の無限性

- nが素数なら，$\sigma(n)=n+1$であるので，不足数
  - 奇数の不足数は無数に存在する
- $\sigma(2^m)=1+2+2^2+\ldots+2^{m-1}+2^m=2^{m+1}-1$
  - 逆「$\sigma(n)=2n-1$である自然数は$n=2^m$に限るか」は未解決

定理　偶数の不足数と奇数の不足数はそれぞれ無限に存在する

- $\sigma(12)=28>2\times12$より，過剰数であり，一般化する
- $\sigma(2^m\times3)=(1+2+\ldots+2^m)(1+3)=2n+2^m-4$

定理　過剰数は無限に存在する

まとめ

- 学校数学の知識でも，数学の未解決問題を探究できることが明らかになった
- 数学という学問を知り，楽しむことができる．また，その過程では「いくつかの事例で試して発見する」といった帰納的な考えや，「証明する」といった演繹的な考えなど数学的な見方が養われる．また，動的幾何ソフトや計算ソフトを用いて，推測するような探究も行われる
- 今後，このような未解決問題に関わる探究活動が数学科における課題学習や，理数科の理数探究基礎，総合的な探究の時間などで行われることを期待する．
- 今回の探究は，純粋数学におけるものであるが，応用数理学的なものも考えられる