数学探究のための未解決問題紹介サイト

岐阜大学　花木 良，熊本大学　吉井 貴寿
E-mail：hanaki@gifu-u.ac.jp,　tyoshii@educ.kumamoto-u.ac.jp

概要：SSH で高校生が探究している数学には未解決問題に関するものも少なくない．また，一般に，未解決問題は数学を研究する動機付けであり，学問を発展させるために肝要である．未解決問題の中には，高校生にも問題を理解することができるものが多くある．研究の目的は，これらの問題を紹介し，探究を支援する HP を構築することである．問題把握ができること，数や図形を変えて考察することができる問題をいくつか選び出し，探究指針などを記す．

検索語：SSH，理数探究，未解決問題

1. はじめに

SSH や理数探究などで，数学の探究が拡充している．花木（2020）は，大手前高校で行われているマスフェスタの要旨集（大阪府立大手前高等学校，2019）で高校生が探究している数学を分析した．その結果，未解決問題に関連するものがよく見られ，コラッツ予想，フィボナッチ素数が無限に存在するか，四色問題の初等的証明，マルコフ数の単一性予想，リーマン予想などの記述を確認した．このように，未解決問題は高校生を惹きつけるものである．

未解決問題を解くというスタンスは，数学の発展では基本的である．1900 年には，ヒルベルトにより 23 個の問題が挙げられ，数学を発展させてきた．数学の研究集会では，未解決問題をまとめた問題集が作られることもある．例えば，研究集会 Intelligence of Low-dimensional Topology（Ohtsuki，2021）を参照．

一般向けには，近年では ABC 予想が新聞に掲載されたり，ポアンカレ予想やリーマン予想に関する DVD が発売されたりしている．

2. 研究の目的と方法

研究の目的は，数学を探究したい高校生のために未解決問題を紹介する HP を構築することである．研究の最先端を知り，結果を出すことは非常に難しいことである．しかし，未解決問題に触れ，知られていることであっても自分で部分解を得たり，別の問題を考えたりすることは数学者としての営みを体験するといった価値があると考える．また，これを機に多くの人が数学の進展する様を知り，数学研究の大切さが周知されることを期待する．研究方法としては，書籍や Web サイトから高校生が問題把握をすることができる未解決問題を拾い上げていき，HP にまとめる．

3. 書籍や文献の考察

主に未解決問題を扱っている書籍，論文や HP を参考に，高校生が問題把握をし，探究していける題材を選出した．

クラフト他（1996）は，幾何学における未解決問題を 132 個取り上げている．分野は離散幾何や計算幾何に関するものが多い．しかし，四半世紀前のもので，進展について追う必要がある．例えば，「平面上にある単純閉曲線 C に対して，C 上には正方形をなす 4 点が必ず存在する」という予想が紹介されている．秋山（2020）によると，カスプのない区分的に C_1 級の曲線に関しては Stromquist が肯定的に解決しているとある．

ガイ（2010）は，数論に関する本格的な未解決問題集である．題材が豊富な上に，進展を知ることもできる．例えば，エジプト分数に関して，分母を奇数のみに限定して表現できるかが提案され解けるまでの様が書かれている．

ニール（2018）は，研究背景に詳しく時系列であり躍動感のある読み物である．双子素数予想は差が 2 の素数の組が無数に存在するかである．差が 7,000 万以下の素数の組は無数に存在することをチャンが 2013 年に示した．チャンの証明を改良することで 7,000 万を減らそうとする研究がインターネット上で始まり進展した様子や数学者の人柄が描かれている．

伊藤（2009）は，未解決問題を列挙するだけではなく，パズル的な問題と関連付けて，論文になった問題の事例を多く取り上げている．多面体を辺で切り，重なりのない展開図ができるかといった未解決問題を挙げている．

Wikipedia には「数学上の未解決問題」という項目があり，ミレニアム問題をはじめ多くの問題や予想が挙げられている．

4. HP での項目

1 つの問題に対して，タイトル，分野，内容，未解決問題，練習問題，問題の変更，関連内容，キーワード，英語キーワード，参考文献を付けた．

- 「分野」は高校生にわかりやすいように，図形，数や式，関数などとし，細分の数論やグラフ理論などはキーワードで触れることにした．
- 「内容」では定義や例を挙げたり，最先端の理解が平易なものは紹介したりしている．
- 「未解決問題」は，「内容」との重複が起こるが，明確化のために設けた．
- 「練習問題」は，解くことのできるもので，問題の理解を促進した．
- 「問題の変更」は，定義や操作を変更する例を挙げる．それによって簡単に解ける問題になったり，問題が拡張されたりする．一般に，what-if-not strategy や問題づくりに関連するものである．
- 「関連内容」は，広い意味で関連すると考えられ，高校生に馴染みのあるものを挙げた．
- 「キーワード」は，関連する内容を検索するために役立つものを挙げた．
- 「英語キーワード」は，最先端を知りたい場合は英語での検索を要するために書いた．
- 「参考文献」は，基礎固めをしたり，新たな問題を知ったりするための契機としている．

5. HP での具体的な事例

手を動かして，いくつかの場合を試せ，高校数学程度で解決できる練習問題を作れるような未解決問題を選出した．

5.1. 優美な木（数や式）

頂点と辺で構成されたものをグラフという．辺は頂点を結ぶ．どの頂点から同じ辺を通らず辺をたどっても，もとに戻って来られないグラフを木という．木では，「(頂点の数) = (辺の数) −1」が成り立つ．n 頂点の木を考え，頂点に 1〜n をラベルし，辺に 1〜n−1 をラベルし，各辺の両端点のラベルの差が辺のラベルと一致しているようにできるとき，この木を優美という．

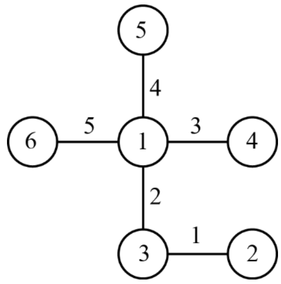

図 1　優美な木

「すべての木は優美である」という予想が未解決問題である．練習問題は，頂点が一直線に並んだ道という木が優美であることを示すものを挙げた．

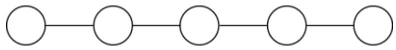

図 2　道

問題の変更は，差を積にして辺が異なる値にできるかを挙げた．関連内容は，魔方陣，数独を挙げた．キーワードは，離散数学，グラフ理論を挙げ，英語は graceful tree を挙げた．参考文献は，問題が載っているハーツフィールド（1992）を挙げた．

5.2. ソファー問題（図形）

幅が 1 の L 字の角を曲がって通り抜けうるソファーの最大面積はいくつかという問がある．2018 年に，2.37 以下であることが証明されている．「最大面積はいくつか」という問が未解決問題である．練習問題は，「一辺が 0.5 の長方形で，通り抜けうる最大のもう一辺の長さはいくつか．模型を作って考えてみよう．幅をもたない棒にすると，最長はどれだけか．」と問うた．

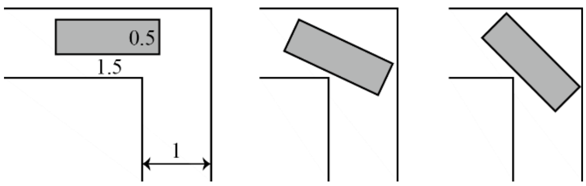

図 3　ソファーの移動

問題の変更は，通路の形を変えてみることを挙げた．関連内容は，魔方陣，数独を挙げた．キーワードは，離散数学，グラフ理論を挙げ，英語は sofa problem を挙げた．参考文献は，ソファー問題は記載されていないが，練習問題の棒と関連した Anton 他（2013）を挙げた．

5. 3.　エジプト分数（数と式）

約分されている分数を考える．分子が 1 の分数を単位分数，分子が分母より小さい分数を真分数という．真分数は異なる分母の単位分数の和で表されることが知られている．$\frac{m}{n}$は m 個以下の単位分数の和で表されることは次のようにして示される．n を m で割った余りを $m<r<0$ の範囲で取り商を q とする（$n=mq+r$）．$\frac{m}{n}=\frac{qm}{qn}=\frac{n-r}{qn}=\frac{1}{q}-\frac{r}{qn}$ であり，単位分数と m より小さい分子の分数の和で表される．一般に，真分数に対して，様々な単位分数の和がある．しかし，最小の単位分数の個数を求めることは容易ではない．$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$という未解決問題を挙げた．練習問題は，「分母と分子が 10 以下の分数を単位分数の和で表してみよう．」と問うた．問題の変更は，分母を奇数のみに限定することを挙げた．関連内容は，数列の和を挙げた．キーワードは, 数論, リンド数学パピルスを挙げ，英語は Egyptian fraction を挙げた．参考文献は，ガイ（2010），三浦（2012），西村（2013），Reimer（2017），を挙げた．

5. 4.　その他

他には，分数の小数展開に関連したアルチン予想，完全数，グラフの再構成，多面体の展開図，リンケージ，オセロゲームの必勝法などを取り上げる．

6.　まとめと展望

題材の拡充は生徒の多様な探究を促すために，必要不可欠であるので, 続けていきたい. また，協力者も募っていきたい．多くの人に HP を周知し，有効性を増すように改良していきたい．

教員養成における講義でも，未解決問題を探させたり挑戦したりさせていきたい．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP19K03158，JP19K03158 及び JP20K22244 の助成を受けたものである。

引用文献

[1]　秋山仁,「離散幾何学フロンティア」, 近代科学社, 2020.

[2]　伊藤大雄,「パズル・ゲームで楽しむ数学」，森北出版，2010.

[3]　伊藤仁一，「教育学研究科における数学の研究-直観幾何学的観点から」，数理解析研究所講究録（1657），pp.157-176，2009.

[4]　今野紀雄，成松明廣，「未解決問題から楽しむ数学」，技術評論社，2020.

[5]　ヴィッキー・ニール，千葉敏生翻訳，「素数の未解決問題がもうすぐ解けるかもしれない.」，岩波書店，2018.

[6]　P.ブラス，W.モーザー，J.バッハ，秋山仁監訳,「離散幾何学における未解決問題集」, 丸善出版, 2012.

[7]　H.T.クロフト，R.K.ガイ，K.J.ファルコナー，秋山仁訳，「幾何学における未解決問題集」，シュプリンガー・フェアラーク東京，1996.

[8]　西村洋一 ，「同時解明―エジプト分数と完全数」，黎明書房，2013.

[9]　リチャード・K.ガイ，金光滋訳，「数論「未解決問題」の事典」，朝倉書店 ，2010.

[10]　N.ハーツフィールド, G.リンゲル, 鈴木晋一翻訳,「グラフ理論入門」，サイエンス社，1992.

[11]　花木良 (2020)「理数探究を指導する教員養成に関する一考察―SSH の生徒発表からの考察を通して―」，日本数学教育学会第 53 回秋期研究大会発表集録，p.417.

[12]　三浦伸夫,「古代エジプトの数学問題集を解いてみる」，NHK 出版，2012.

[13]　大阪府立大手前高等学校,「マスフェスタ（2019 年度）要旨集」．https://otemae-hs.ed.jp/ssh/dat/2019mathfesta_abstract.pdf, 2019（2020.9.20 最終確認）.

[14]　Howard Anton, Stephen Davis, Irl Bivens, 西田吾郎監修,「微積分学講義 上」，京都大学学術出版会 ，2013.

[15]　T. Ohtsuki 編集，「Problems on Low-dimensional Topology, 2021 」 https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ildt/prob21.pdf，2021（2021.7.26 最終確認）.

[16]　David Reimer，礒田正美監修,「古代エジプトの数学 文明繁栄のアルゴリズム」，丸善出版，2017.