「理数探究基礎」「理数探究」学習指導要領の考察
数学的事象に焦点化して

R01/11/17

岐阜大学
花木　良

「理数探究基礎」「理数探究」の新設

- 数学や理科を学ぶ楽しさや意義の向上
- 探究的な学習の拡充
- SSHの「課題研究」の位置付け

↓

「理数探究基礎」「理数探究」の新設

- SSHや理数科では，既にこれに位置づく授業が実施されていると考えられる

1(1) 社会的な背景｜高等学校，数学

- SSH校や理数科で既に実施している学校は，自作のテキストや先輩の探究成果があると考えられ，円滑に理数探究が実施できる
- 一方，新たに 始めようとする学校はそれ ら を補う必要がある
- スーパーサイエンスハイスクール生徒研究発表会 で受賞している発表テーマを概観すると，理科の分野と比べ，数学は 多いとは言えず，一般的に，数学の 課題研究が盛んであるとは言えない部分がある

⇒ 数学に関する多くの題材や探究の方法の提案

1(1) 社会的な背景｜探究の成果

- 「算数・数学の自由研究」
  - 2013年度から始まった理数教育研究所による
  - 2018年度は 16,485件の作品が応募
  - 受賞作品はネット上で公開されている
- マスフェスタ
  - 大阪府立大手前高等学校による
  - 2009年度から SSH事業の一環として毎年行われている
  - 2018年度は 51校の発表があり
  - 2011年度からの要旨集がネット上で公開されている

1(2) 研究の目的

- 対象　新たに理数探究のような授業を実施しようとする高等学校
- 学習指導要領の解説に挙げられている数学的事象に関する内容を中心とした考察
- 探究への媒体（書籍）の紹介

⇒ 生徒が自ら数学の世界を拡げたり，
発見する喜びを味わったりできるようにしたい

2(1) 小数題材｜学習指導要領 解説

- 単位分数（特に分母が素数の場合）の循環桁数について実際に計算して調べ，多面的に規則性を考えたり，その証明を考えたりする。例えば1/7は142857という数字が循環するが，登場する数字の間には1＋8＝4＋5＝2＋7＝9という関係性がある。単位分数が偶数桁で循環するような循環小数の場合には，同じような法則性は成り立つかどうかを探究する。（解説より）

⇒ 分母も分子も絞らないほうが自然
分母の小さい方から順に小数にし表を作成
循環節を分けて足すのはなかなか気づきにくい法則

2(1) 小数題材｜数学的な内容

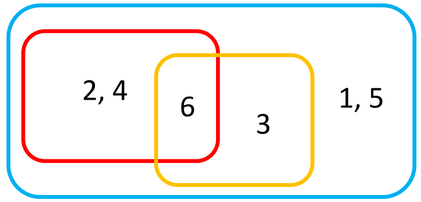
- 分母がnの真分数で 約分できないものの個数はn未満で nと互いに素な数の個数であり，オイラー関数で求められる
- $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ のとき，

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

⇒ 具体的な数の解法から，導くことも可能

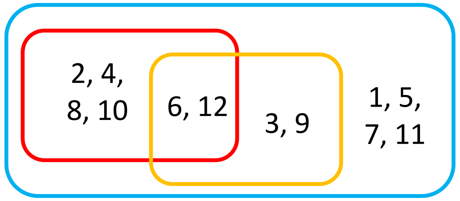
補足｜約分できない分数はいくつ？

- 分母 n に対して，分子が n 未満で，約分できない分数はいくつか？
  - 素数 p なら，p－1個であることはすぐにわかる
- n＝4 なら，1, 3のときの，1個である
- n＝6 なら，1, 5の 2個である
  - 2で割れるものが2個，3で割れるものが1個
    - 6÷2－1 ＝2，6÷3－1＝1
    - 5－(2＋1)＝2
- よい方法はないかな？
- 分母が12と120で考えてみよう



補足｜約分できない分数の個数

- 分子が 12 未満で，約分できない分数はいくつか？
  - 分子が12以下でも個数は同じなので，「12以下」で考える
- $12=2^2\cdot 3$
- 2の倍数は，$\frac{12}{2}=6$
- 3の倍数は，$\frac{12}{3}=4$
- 6の倍数は，$\frac{12}{6}=2$



$$12-\left(\frac{12}{2}+\frac{12}{3}\right)+\frac{12}{6}=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

- よって，12−(6＋4)＋2＝4

補足｜約分できない分数の個数

- 120 が分母のとき，分子が120未満で，約分できない分数はいくつか？
- $120=2^3\times 3\times 5$ である
- A1：120 までの自然数で 2 の倍数の集合
- A2：120 までの自然数で 3 の倍数の集合
- A3：120 までの自然数で 5 の倍数の集合

$$|A_1|=\frac{120}{2}=60,\ |A_2|=\frac{120}{3}=40,\ |A_3|=\frac{120}{5}=24$$

$$|A_1\cap A_2|=\frac{120}{6}=20,\ |A_1\cap A_3|=\frac{120}{10}=12,\ |A_2\cap A_3|=\frac{120}{15}=8$$

補足｜約分できない分数の個数

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=\frac{120}{30}=4$$

- 包徐の原理より

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3|=&|A_1|+|A_2|+|A_3|-(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)\\&+|A_1\cap A_2\cap A_3|\\=&60+40+24-(20+12+8)+4=124-40+4=88\end{aligned}$$

- これらは約分されるので，

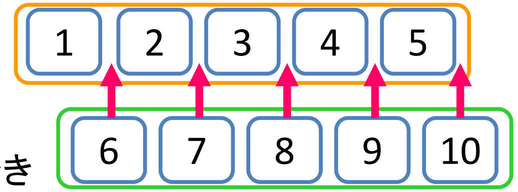
$$120-88=32$$

補足｜途中式を振り返る

$$\begin{aligned}|120\text{と互いに素な数の集合}|=&120-\left(\frac{120}{2}+\frac{120}{3}+\frac{120}{5}\right)+\left(\frac{120}{2\cdot 3}+\frac{120}{2\cdot 5}+\frac{120}{3\cdot 5}\right)\\&-\frac{120}{2\cdot 3\cdot 5}\\=&120\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\\=&120\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=32\end{aligned}$$

小数の循環とトランプのシャッフル

- 小数の循環節の長さは，$10^m \equiv 1 \pmod{n}$を満たす最小の自然数 m である
  - 一般のnに対してこのmを求めることは容易ではない．
- 右のシャッフルを繰り返すと，元の配置に戻る



- k 枚をシャッフルするとき $2^t \equiv 1 \pmod{k-1}$となる最小の t が もとに戻る回数

数学的に同様であることが指摘されている（飯高，2008）
トランプのシャッフルは，SSHで探究されており，線形代数学での課題探究的な活動が提案（花木ほか，2015）

小数の探究に関する実践｜大学生

- 分母が 17までの真分数を小数に直し，気づいたことを書く課題を 20名の大学生に課した
  - 1名が「偶数個の循環は半分に分けて足すと全部9になること」に気づき，「1÷17と2÷14」を例に挙げた
  - 提出後に聞き取り調査を行ったが「偶数なので分けてみた」ということで，それ以上の発見法を見出せなかった
  - 多くの学生が何かしら見つけられており，表の作成によって発見が促される

6	7	8	9	10	11	12
$0.1\underline{6}$	$0.\underline{142857}$	0.125	$0.\underline{1}$	0.1	$0.\underline{09}$	$0.08\underline{3}$
0.3	$0.\underline{285714}$	0.25	$0.\underline{2}$	0.2	$0.\underline{18}$	$0.1\underline{6}$
0.5	$0.\underline{428571}$	0.375	$0.\underline{3}$	0.3	$0.\underline{27}$	0.25
0.6	$0.\underline{571428}$	0.5	$0.\underline{4}$	0.4	$0.\underline{36}$	$0.\underline{3}$

小数の探究に関する実践｜中高生

- 中高生向けに，「循環小数を研究しよう」と題した講演を行い，Midyの定理などを紹介した
- 高校の教員より，生徒が研究を進めるには何を読めばよいかの問合せ
- 論文を無料でアップロードやダウンロードできるコーネル大学によるサイトarXivを紹介し，「midy fractions」で検索すると論文を得られることを伝えた
  - 研究者によっては，arXivに書きあがった論文を上げ，意見集約をし，雑誌への投稿を行うことがある

(2) 三角形の中心に関する探究｜解説

- 三角形について，3本の中線は1点で交わりその点は重心である。3本の垂線は1点で交わりその点は垂心である。同じように「三角形の3本の〇〇線が1点で交わる」と表現される性質は他にもあるかどうか調査し，またその証明について探究する。（解説より）

「調査し」という語からインターネットで検索をかけてしまう可能性を懸念
「三角形 中心 いろいろ」と検索すると，36種の三角形の中心を描くサイトがヒットする
そのサイトでは，10,000個以上の中心が紹介されている海外サイトのリンクが張ってある

(2) 三角形の中心に関する探究｜提案

- 三角形の面積の公式を考案させる
- 幾何学大辞典1巻（岩田，1971）を見ると，多くの面積の関係式があることがわかる　p.12より

79. $S=\frac{1}{2}ah_1=\frac{1}{2}bh_2=\frac{1}{2}ch_3=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

80. $S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

81. $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　(Heron の公式)

82. $S=\frac{abc}{4R}$　(Hipparchus)

83. $S=sr=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c=\sqrt{rr_ar_br_c}=r\sqrt{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}$

84. $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

85. △ABC において，BC 上の1点を P とすれば　△ABP：△ACP＝BP：PC

86. △ABC において，1点 O と A とを結び BC との交点を P とすれば
△ABO：△ACO＝BP：PC

(3) べきa^bに関する探究

- べきについて，多面的に考察し新たな性質を考える。例えば0^0の値はx^xの極限として計算できるかを探究する。さらに，a^bについて，bが複素数であるときにどのように計算できるかを探究する。（解説より）

高校生の動機として考えられるか疑問が残る
数学の学習指導要領解説では，数学Ⅲの課題学習でlim_(x→＋0) xlogxの収束性を例示している
その発展とし，ロピタルの定理やlim_(x→＋0)x^x＝1の証明を考えることを提案している

(4) 金平糖の角の形成過程の数理モデルに関する探究

- 金平糖を作る過程でできる角の形成過程を数理モデルで再現し，そのメカニズムを探究する。（解説より）
- 仮説を立て，金平糖の工場に協力を依頼し，形成過程のサンプルをもらい，検証（事例イメージ）

身近なお菓子や地場産業と関連させた数学的探究が望まれる
事例イメージでは，先輩が行った風紋の研究が発端となっていて，先輩の研究の影響力の大きさが伝わる

3．書籍の分析

- 堀野田恩孝（2010）．高校生のための課題研究 数学篇
- 各講，簡単に数学を紹介し，講末に，「研究課題」
- 第1講　2進法では，本文で，数字当てマジック，2進法の紹介し，次の3つを「研究課題」として挙げている
  - 他にも数学を利用したマジックを調べたり、作成しよう。
  - 10進法、2進法以外の位取り記数法が利用されているものを探そう。
  - デジタルではON、OFF (ある、なし)の2つの状態を考えるため、2進数が使われているといえる。
    コンピュータなどの電子機器で、2進数の性質が表れていることがわかるものを探そう。

3. 書籍の分析

- 堀部和経，林一雄，早苗雅史(2019)．数学の課題研究 テーマ選びのヒント 第1集
- 各章，基本的には文章で課題を提案している
  - 1　さらに，一般化するにはどうしたらよいでしょうか．など
  - 2　数多くある算額を見つけて，解法を試してみましょう
- 数学科の授業で取り上げることも想定される．
- 1/nに現れる循環小数も挙げられており，10進数以外の考察が提案されている．

3. 書籍の分析

- 竹山美宏(2018)．定理のつくりかた．
- ピックの定理の発見・考察に焦点化し，定理をつくるための考え方，数学の技法をかみ砕いている．
- 問題の立てかた，解くための考えかた，答えの書きかた，新しい問題のつくりかたの一般論から始まり，数学的帰納法，対偶の利用や背理法といった証明法の解説や違いを示している

3. 書籍の分析

- 飯高茂(2016a, 2016b, 2017a, 2017b, 2018)．数学の研究をはじめようI, II, III, IV, V
- 整数に関する話題が主である．コンピュータを用いて調べたり表にまとめたりしていて，研究手法や着眼の仕方を知ることもできる．
  - 例えば，完全数((nの約数の総和)－2n＝0となる自然数n)について偶数は決定されていて奇数の存在は未解決であることはよく知られているが，0でなく－1とすると，どのような数があるかの決定ができることが紹介されている(2016a)．
- このように定式化し，数を少し変えると比較的に容易な問になることがある．
- 大学における卒業研究がもとになっているものも多い．

4. 理数探究に関する提案

(1) 参考になる生徒の先行研究の考察

- 大手前高等学校によるSSHの発表会の資料や算数・数学の自由研究の受賞作品等の生徒が同年代の研究成果を見て着眼点などを学ぶとよい

(2) 普段の数学から探究題材を探る

- 中学校の内容では，熊本大学教育学部附属中学校数学科(2011)は，授業と生徒のレポートが掲載されていて，大変参考になる．
- 高校でも，問題を契機に，3辺が整数である三角形にはどのようなものがあるのだろうと解いた問題を深めることが大事である

4．理数探究に関する提案

(3) 論文種類

- 数学の論文には様々な種類があり，新しい研究成果を書いたものに加え，既知の研究のまとめや別証明などがある．また，日本応用数理学会では，「原著論文（理論，応用，実用，ノートの4部門）」および「サーベイ論文」という原稿の種類を挙げている．まとめる論文やレポートがどれに該当するかを意識することが大切である．

(4) 投稿先について

- 武蔵野大学 数理工学コンテスト，名古屋大学 日本数学コンクール論文賞，明治大学 MIMS現象数理学研究発表会，理数教育研究所 算数・数学の自由研究，日本学生科学賞，高校生科学技術チャレンジ

5．展望

- 多くの生徒が楽しく数学と接することができる高校数学になる契機となることを期待する
- 探究を理解していく時は，調べることより，生徒が自ら考えたことを評価したい
- 投稿先を記したが，過度に評価を気にすることがないように留意したい．数学の研究業績の評価の難しさは，日本数学会でも指摘されている
  - 日本数学会（2003）．数学会の研究業績評価について．
- 数学の発表の場が増えることが望まれる
  - 日本物理学会や日本分子生物学会などでは，高校生の発表の場が与えられており，理科分野は数学に比べて発表の場が多い