

「理数探究基礎」と「理数探究」に関する考察と提案

数学的事象に関することに焦点化して

花木 良
岐阜大学

1. はじめに

理数科が新設され、「理数探究基礎」と「理数探究」という科目が設置された。これは、数学や理科を学ぶ楽しさや意義の向上、探究的な学習の拡充、SSH（スーパーサイエンスハイスクール）の「課題研究」の位置付けを踏まえている。SSH や理数科では、既にこれに位置づく授業が実施されていると考えられる。

(1) 社会的な背景

SSH 校や理数科で既に実施している学校は、自作のテキストや先輩の探究成果があると考えられ、円滑に理数探究が実施されるであろう。一方、新たに始めようとする学校はそれらを補う必要がある。

スーパーサイエンスハイスクール生徒研究発表会で受賞している発表テーマを概観すると、理科の分野と比べ、数学は多いとは言えず、一般的に、数学の課題研究が盛んであるとは言えない部分がある。そこで、数学に関する多くの題材や探究の方法の提案がなされるべきである。

探究の模範として次の二つがある。2013 年度から始まった理数教育研究所による「算数・数学の自由研究」では、2018 年度は 16,485 件の作品が応募されており、受賞作品はネット上で公開されている。2009 年度から SSH 事業の一環として毎年行われている大阪府立大手前高等学校によるマスフェスタでは、2018 年度は 51 校の発表があり、2011 年度からの要旨集がネット上で公開されている。

(2) 研究の目的

本稿では、新たに理数探究のような授業を実施しようとする高等学校を対象に、学習指導要領の解説に挙げられている数学的事象に関する内容を中心とした考察を示したり探究への媒体を紹介し

たりし、質の高い理数探究が実施されることを研究の目的とする。これにより、生徒が自ら数学の世界を広げたり、発見する喜びを味わったりできるようにしたい。

2. 題材の考察と提案

学習指導要領の解説では、内容の取扱いを 5 つに分けており、その一つが「オ 数学的事象に関することについて」である。そして、「理数探究基礎」と「理数探究」に対して、2 つずつ例示がある。これらを順に考察する。

(1) 小数題材（単位分数の循環桁数に関する探究）

数学の探究を伝えるためには身近な算数・数学であり数学的に未解決な部分があるので、適切な題材であると考ええる。解説では『単位分数（特に分母が素数の場合）の循環桁数について実際に計算して調べ、多面的に規則性を考えたり、その証明を考えたりする。例えば $1/7$ は 142857 という数字が循環するが、登場する数字の間には $1+8=4+5=2+7=9$ という関係性がある。単位分数が偶数桁で循環するような循環小数の場合には、同じような法則性は成り立つかどうかを探究する。』とある。分母も分子も絞らないほうが自然であり、真分数を分母の小さい方から順に約分できるものも含め、小数に直す表を作成するとよい。循環節を分けて足すのはなかなか気づきにくい法則であると考ええる。

数学的な内容

分数が有限小数で表されるか循環小数で表されるかは数学 I で取り扱われる。

分母が n の真分数で約分できないものの個数は n 未満で n と互いに素な数の個数であり、オイラー

関数で求められることが知られている。それは初等的に包除の原理を用いて示すことができる。

ラーデマッヘンとテププリッツは、英語版の初版は1930年の書籍で、循環小数という章において、偶数桁の循環節の性質（Midyの定理）を挙げ、普及させた（2010）。

10と互いに素な分母 n の単位分数の循環節の長さは、 $10^m \equiv 1 \pmod{n}$ を満たす最小の自然数 m であり、一般の n に対してこの m を求めることは容易ではない。トランプのシャッフルの問題は循環節の長さと同様に同様のことが指摘されている（飯高，2008）。また、トランプのシャッフルは、SSHで探究されており、それを契機とし、線形代数学での課題探究的な活動が提案されている（花木ほか，2015）。

実践

著者は、分母が17までの真分数を小数に直し、気づいたことを書く課題を20名の大学生に課した。「素数のときは循環する」という誤解や「 2^n が分母のときは有限小数で表される」という不十分な理解が見られた。これらは小数表示が十進法に依存している点を理解していないことが一因である。1名が「偶数個の循環は半分に分けて足すと全部9になること」に気づき、「 $1 \div 17$ と $2 \div 14$ 」を例に挙げていた。提出後に聞き取り調査を行ったが「偶数なので分けてみた」ということで、それ以上の発見法を見出せなかった。多くの学生が何かしら見つけられており、表の作成によって発見が促されることが考えられる。

他に、著者は、中高生向けに、「循環小数を研究しよう」と題した講演を行い、Midyの定理などを紹介した。その後、興味をもった生徒が研究を進めるには何を読めばよいかの問合せが高校の教員よりあった。論文を無料でアップロードやダウンロードできるコーネル大学によるサイトarXivを紹介し、「midy fractions」で検索すると論文を得られることを伝えた。研究者によっては、arXivに書きあがった論文を上げ、意見集約をし、雑誌への投稿を行うことがある。正式な論文の検索はMathSciNetがあるが、契約した機関でないと使うことができない。発展的に考えると、数学の成果は基本的に英文で書かれ、国際的に発信されるため、

英語が必須であることも実感できる。

(2) 三角形の中心に関する探究

解説では、『三角形について、3本の中線は1点で交わりその点は重心である。3本の垂線は1点で交わりその点は垂心である。同じように「三角形の3本の〇〇線が1点で交わる」と表現される性質は他にもあるかどうか調査し、またその証明について探究する。』とある。自分で定義しようとせず、「調査し」という語からインターネットで検索をかけてしまう可能性を懸念する。実際、「三角形 中心 いろいろ」と検索すると、36種の三角形の中心を描くサイトがヒットする（令和元年8月30日Google検索）。加えて、そのサイトでは、10,000個以上の中心が紹介されている海外サイトのリンクが張ってある。

図形の分野における探究の視点と例を考案する。数学Iの三角比では三角形の面積の公式として、 $\frac{1}{2}bc \sin A$ を学習する。これは2辺とその間の角がわかれば三角形が決定し、面積が定まることを意味している。同様に考えると、三辺の長さから面積を求めるヘロンの公式が得られ、1辺とその両端の角による公式を作ることもできる。他にも、幾何学大辞典1巻（岩田，1971）を見ると、多くの面積の関係式があることがわかる。さらに、様々な証明を知ることでもできる。生徒が自ら大辞典を開き、多くの定理や関係式を知れば、探究の視点を得て、何か公式を発見する契機となる。

初等幾何において新たなことを発見することは難しい。未解決問題の解決を除けば、最も難しいことは発見の新規性を示すことであろう。

(3) ベき a^b に関する探究

解説では、「ベきについて、多面的に考察し新たな性質を考える。例えば 0^0 の値は x^x の極限として計算できるかを探究する。さらに、 a^b について、 b が複素数であるときにどのように計算できるかを探究する。」とある。オイラーの公式といった大学数学を先取りすることを推奨しているように感じられる。高校生の動機として考えられるか疑問が残る。また、数学の学習指導要領解説では、数学IIIの課題学習で $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x$ の収束性を例示している。その発展とし、ロピタルの定理や $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$ の証明を考えることを提案している。

(4) 金平糖の角の形成過程の数理モデルに関する探究

解説では、『金平糖を作る過程でできる角の形成過程を数理モデルで再現し、そのメカニズムを探究する。』とあり、理数探究の事例イメージが挙げられている。仮説を立て、金平糖の工場に協力を依頼し、形成過程のサンプルをもらい、検証がなされていて模範的である。身近なお菓子や地場産業と関連させた数学的探究が望まれる。また、事例イメージでは、先輩が行った風紋の研究が発端となっていて、先輩の研究の影響力の大きさが伝わる。

3. 書籍の分析

理数探究の題材を多く紹介している書籍は、高校生のための課題研究 数学篇(塩野田, 2010)、数学の課題研究 テーマ選びのヒント 第1集(堀部ほか, 2019)が挙げられる。また、探究の基礎となる本として定理のつくりかた(竹山, 2018)、探究の見本となる本として数学の研究をはじめよう(飯高, 2016a, 2016b, 2017a, 2017b, 2018)がある。

(1) 高校生のための課題研究 数学篇

10講で構成されており、それぞれが独立していて、中学校や高等学校の数学との関係性も明示されている。2進法、図形の極限、遠近感と立体視、三角測量、パスカルの三角形、確率の実験、次元の考え方、フラクタル次元、テイラー展開、フーリエ変換の10講がある。短時間で各講を授業実践できる。問も用意されており、内容の理解も促進できる。また、講末に「研究課題」が挙げられており、慣れない教員や生徒にはとても参考になる。例えば、2進法では、本文の数字当てと対応させ、数学を利用したマジックを調べたり作成したりすること、コンピュータなどの電子機器で2進数の性質が表れていることがわかるものを探すことなどが挙げられている。幅広い探究内容への示唆に富んでいる。

(2) 数学の課題研究 テーマ選びのヒント 第1集

32個の題材から成り、高校数学の三角比、三角関数、初等幾何、因数分解、曲線、整数、ベクトル、微分積分と関連していて、参考資料が多く挙げられているので、知りたいことが深められるようになっている。数学科の授業で取り上げることも想定される。1/nに現れる循環小数も挙げられており、

10進数以外の考察が提案されている。挑戦すべき内容が各題材の末に書かれており、探究のよい体験になる。

(3) 定理のつくりかた

ピックの定理の発見・考察に焦点化し、定理をつくるための考え方、数学の技法をかみ砕いている。問題の立てかた、解くための考えかた、答えの書きかた、新しい問題のつくりかたの一般論から始まり、数学的帰納法、対偶の利用や背理法といった証明法の解説や違いを示している。

(4) 数学の研究をはじめよう

整数に関する話題が主である。コンピュータを用いて調べたり表にまとめたりしていて、研究手法や着眼の仕方を知ることできる。例えば、完全数(n の約数の総和) $-2n=0$ となる自然数 n について偶数は決定されていて奇数の存在は未解決であることはよく知られているが、0でなく-1とすると、どのような数があるかの決定ができることが紹介されている(2016a)。このように定式化し、数を少し変えると比較的に容易な問になることがある。大学における卒業研究がもとになっているものも多い。研究課題も明確でわかりやすい。

4. 理数探究に関する提案

「理数探究基礎」を想定し、数学の探究を知る段階として、次の2つを提案する。

(1) 参考になる生徒の先行研究の考察

既に多くの生徒の探究の実践がなされていて、大手前高等学校によるSSHの発表会の資料や算数・数学の自由研究の受賞作品等の生徒が同年代の研究成果を見て着眼点などを学ぶとよい。生徒の興味により、模倣的な探究をしたり挙がっている参考文献を読んだりしたい。

(2) 普段の数学から探究題材を探る

理数探究の授業だけで探究を考えるのではなく、生徒は普段の数学の授業でも探究の種を見つけていきたい。また、教員はそのような仕掛けをできるとよい。中学校の内容になるが、熊本大学教育学部附属中学校数学科(2011)は、授業と生徒のレポートが掲載されていて、大変参考になる。高校でも、問題を契機に、3辺が整数である三角形にはどのようなものがあるのだろうと解いた問題を深めるこ

とが大事である。

「理数探究」を想定し、探究成果をまとめ、発信する段階と考え、次の2点を紹介する。

(3) 論文種類

数学の論文には様々な種類があり、新しい研究成果を書いたものに加え、既知の研究のまとめや別証明などがある。また、日本応用数理学会では、

「原著論文(理論, 応用, 実用, ノートの4部門)」および「サーベイ論文」という原稿の種類を挙げている。まとめる論文やレポートがどれに該当するかを意識することが大切である。

(4) 投稿先について

数学について書いたレポートの投稿先としては、武蔵野大学 数理工学コンテスト、名古屋大学 日本数学コンクール論文賞、明治大学 MIMS 現象数理学研究発表会、理数教育研究所 算数・数学の自由研究、読売新聞社 日本学生科学賞、朝日新聞社・テレビ朝日 高校生科学技術チャレンジが挙げられる。日本学生科学賞は分野に数学がないため、情報技術や広領域などを選択する必要がある。

5. 展望

理数探究を通じ、多くの生徒が楽しく数学と接することができる高校数学になる契機となることを期待する。理数探究という名称からは、高度な数学を要求されている印象を受けるが、大事なことは着眼点であり、自らが進んで数学を使おう・作ろうとする姿勢である。したがって、多くの学校が設置し、生徒に履修をして欲しい。今後、与えられた問題を解く入試からの脱却が図られることを望む。各自が探究した内容を発表し選抜する方法が普及するとよい。

探究を理解していく時は、調べることより、生徒が自ら考えたことを評価したい。発表時には可能な限り先行研究を調べさせたい。生徒が発表する会で過去に発表されたものは概要を調べたい。大手前高等学校のように調べやすい環境が大切である。常に、動機を明記し、発見や探究したプロセスを詳述し、主体性や方法を評価したい。真の研究は難しいので、高校生らしさを大切にしたい。過度に先行研究を調べることはせず、数学を発見したり

創造したりすることを楽しむ契機となることを望む。多くの人が数学に生涯にわたって触れるようにしたい。投稿先を記したが、過度に評価を気にすることがないように留意したい。数学の研究業績の評価の難しさは、日本数学会でも指摘されている(2003)。

日本物理学会や日本分子生物学会などでは、高校生の発表の場が与えられており、理科分野は数学に比べて発表の場が多い。数学の発表の場が増えることが望まれる。

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP18K02932, JP19K03158 の助成を受けたものである。後者の科研研究メンバーから多くの情報や助言を得たことを感謝します。

引用・参考文献

- 花木良, 吉井貴寿 (2015). 数学科内容学における教材開発研究—線形代数学におけるパーフェクトシャッフル教材—. 日本教科内容学会誌 1 (1), pp.77-84.
- 堀部和経, 林一雄, 早苗雅史 (2019). 数学の課題研究 テーマ選びのヒント 第1集. デザインエッグ社.
- 堀野田恩孝 (2010). 高校生のための課題研究 数学篇. ブイツーソリューション.
- 飯高茂 (2008). 分数の計算とトランプの数学. 数学通信 12 (4), 5-12.
- 飯高茂 (2016a, 2016b, 2017a, 2017b, 2018). 数学の研究をはじめよう I, II, III, IV, V. 現代数学科.
- 岩田至康編 (1971). 幾何学大辞典第1巻. 槇書店.
- 熊本大学教育学部附属中学校数学科 (2011). 数学レポート実践集—思考力・表現力がぐんぐん伸びる!. 明治図書.
- 竹山美宏 (2018). 定理のつくりかた. 森北出版.
- 文部科学省 (2018). 高等学校学習指導要領 (平成30年告示) 解説 理数編.
- 日本数学会 (2003). 数学会の研究業績評価について. 数学通信 8 (3), 67-70.
- ラーデマッヘル, テープリッツ (2010). 数と図形 (山崎三郎, 鹿野健訳). 筑摩書房.