

# 数学科内容学における教材開発研究

—線形代数学におけるパーフェクトシャッフル教材—

花木 良<sup>1</sup>, 吉井 貴寿<sup>2</sup>

**要旨:** 次代を担う科学技術系人材を育成するためには、生徒に課題探究的な活動(数学的活動)を行わせる必要がある。現職教員や教員志望学生がこのような新たな学びを展開できる実践的指導力を修得するためには、課題探究的な活動(数学的活動)を自ら体験する必要がある。そのため、教員養成大学・学部においては専門数学の授業でも、このような活動を行うことが望まれる。本研究では、そのような授業を実現する教材の充実を目指している。今回は、その一つとして線形代数で学習する置換や巡回置換、合同式を用いて考察するパーフェクトシャッフル教材を開発した。パーフェクトシャッフルとは、トランプを並び変える操作である。この操作を繰り返すと、トランプは元の並びに戻る。この現象を探究することが課題である。また本論文では、実際にこの教材を用いた授業の結果も考察し、本教材の有用性を明確にする。

**キーワード:** 教員養成, パーフェクトシャッフル, 数学的活動, 課題探求, SSH

## 1. はじめに

この章では、本論文で取り上げるパーフェクトシャッフルの紹介とそれに出会った経緯を説明し、求められる数学科教員像を通じて、数学科内容学における教材開発研究について論じる。

### 1.1 パーフェクトシャッフルとは

10枚のカードで説明を行う。10枚のカード(1, 2, 3, ..., 10)が並んでいる。これを前半と後半の5枚ずつの2つの山(1~5, 6~10)に分け、前半の山から交互にカードを取り、カードを並び換える。本論文では、この操作をパーフェクトシャッフル(Perfect-Shuffle)と呼ぶ。これを行うと、10枚のカードは1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10と並ぶ(図1)。この操作をもう一度行くと、10枚のカードは1, 8, 6, 4, 2, 9, 7, 5, 3, 10と並ぶ。この操作を繰り返すと1, 2, 3, ..., 10という順に戻るという現象が起こる。これは偶然であるのか必然であるのかを探究する教材を考察する。

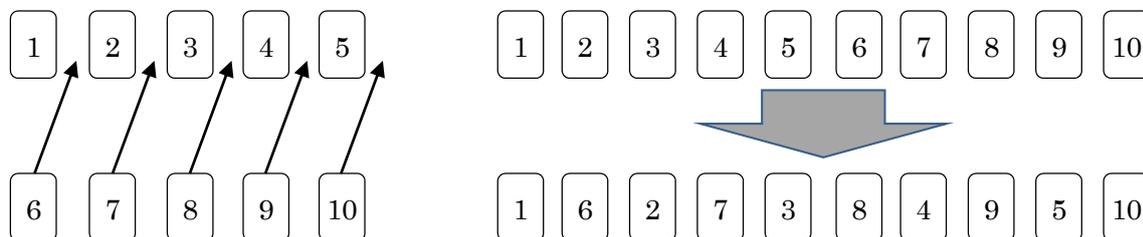


図1 パーフェクトシャッフル

<sup>1</sup> 奈良教育大学 hanaki@nara-edu.ac.jp

<sup>2</sup> 奈良教育大学 takatoshi.441@nara-edu.ac.jp

受付日: 2014年10月30日 受理日: 2015年2月7日

## 1.2 パーフェクトシャッフルとの出会い

第一著者がスーパーサイエンスハイスクール（SSH）奈良県立 S 高等学校に指導助言をしに行ったときに、高校生がパーフェクトシャッフルを探究しており、知った。そこでは、生徒が活発にカードの動きを具体的に書き出しているいろいろな枚数を調べていた。そこで、私はカードの動きを全部調べなくても何回行えばもとの並びに戻るか求められるのではないかと思い、大学数学を用いて考察した。高校の数学科教員はそれに気づいていないのが現状であった。教員養成における数学の授業では、そのような日常事象への応用が取り上げられておらず、このような力を十分につけられていないことがわかった。

## 1.3 求められる数学科教員像

資源に乏しい日本国は、科学技術立国として世界をリードしてきた。今後も日本の科学技術が持続的に発展したりイノベーションが創出されたりすることが望まれ、基盤となる理数教育は重要性が年々増しており、さまざまな取り組みが行われている。高等学校等において、先進的な理数教育を実施するとともに、高大接続の在り方について大学との共同研究や、国際性を育むための取組として、スーパーサイエンスハイスクール事業（SSH）が平成 14 年度より文部科学省の支援の下に 26 校で開始され、平成 26 年度には 204 校が指定されている。また、高等学校等の生徒チームを対象として、理科・数学・情報における複数分野の競技を行う取り組みとして、平成 23 年度より独立行政法人科学技術振興機構（JST）によって行われている科学の甲子園がある。このような事業は、科学好きの裾野を広げるとともに、トップ層を伸ばし、次代を担う科学技術系人材を育成することを目指している。さらに、平成 25 年度からは、「算数・数学の自由研究」という作品コンクールが、理数教育研究所によって行われており、初年度ながら 9132 件の作品が応募されている。このように小学校段階から、算数や数学を探究的に学習することが望まれている。

中学校・高等学校の数学科では、「目的意識をもった主体的な活動（数学的活動）」の充実が図られており、中学校に留まらず高等学校（数学 I, A）においても課題学習が内容として位置づけられている。学習指導要領解説において、課題学習では「（数学の）内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識できるようにする。（括弧内筆者）」と述べられている。

## 1.4 数学科内容学における教材開発研究

現職教員や教員を目指す大学生が課題探究的な活動（数学的活動）を自ら体験し、新たな学びを展開できる実践的指導力を修得する必要がある。そのためには、大学の数学の授業において、このような活動を行うことが望まれる。また、数学をただ学ぶだけではなく、数学の多様性を知る必要がある。

本論文では、数学科教員免許を取得する教員養成大学や理工系大学の 1 年生が受講する線形代数の授業において、大学における数学的活動や課題学習に適した教材としてパーフェクトシャッフルを提案し、大学で新たに学習する置換表現のよさと有用性を伝える。その指導実践の結果を考察し、今後の教科内容学研究への示唆を得る。

## 2. 先行研究と本教材の教育的価値

この章では、先行研究とパーフェクトシャッフル教材の教育的価値を紹介する。パーフェクトシャッフルによるカードの移動は群構造を有している。実際、カードの移動に、何も動かさないという単位元に相当する移動と、一手順元に戻す逆元に相当する移動を加えればこれは明らかであろう。それ

故に、数学でもこれは度々考察されてきたものである。それらの先行研究の概要及び本論文提案教材との差異に関しては吉井・花木 (2014) で論じている通りである。

## 2.1 先行研究の考察

本研究は教員養成大学・学部における教科専門の授業及びそこで使用される教材に関する研究である。これは昨今教科内容学として研究がなされている分野である。ここでは教科内容学に関する先行研究を参考に、本教材の有用性について論じる。数学科に特化した教科内容学に関する先行研究として、松岡 (西園・増井, 2009, pp.108 - 109) の「数学科における教員養成としての教科内容構成の理論と枠組み」に関する研究が挙げられる。松岡は、まず「教師自身が数学のもつ意義・有用性や豊かさ・美しさを十分に理解し、算数・数学を教えることに対する強い動機付けや使命感をもっていなければならない」とし、数学専門科目の目的は「人間にとっての数学の存在意義・重要性を十分に理解した上で、学習指導要領の指示する内容を単に受動的に受け入れるのではなく、算数・数学を教えることの意義を深く理解し、正しい数学観の元に自信をもって指導できることである。また、抽象的思考に慣れ、論理的に正しく思考を展開し表現できることも当然必要である。」と述べている。また、その上でその目的には以下のような能力の育成が含まれるとしている。

- ・学校での教科内容の背景にある数学理論を理解し、内容のどの部分に重点を置くべきか、また置く必要が無いかを的確に見抜くことができる。
- ・独自の工夫を加えて、内容を分かりやすく説明できる。
- ・教材研究を行い、知的好奇心を呼び起こす教材や数学的活動を創意工夫してつくることにより、興味・関心を引き出す授業を展開できる。
- ・数学の面白さを伝え、子どもの興味関心を育てることができる。
- ・子どもが数学を作り出していく創造の場である知識探求・創造型の授業を実践できる。
- ・教科内容が将来どのように変更されようとも迅速・的確に対応できる。
- ・子どもの発言やつまずきに含まれる発想の芽や本質的な点を見逃さず、拾い上げて発展させていくことができる。

さらに、上掲の目的を達成するために、内容の選択や指導方法において重視すべき要素として、以下の a~f を挙げている。

- |            |               |
|------------|---------------|
| a 数学の体系性   | b 算数・数学教科との関連 |
| c 事象との関連   | d 数学の実用性      |
| e 数学の文化的価値 | f 探求的活動       |
| ・数学の歴史     |               |
| ・数学の美的価値   |               |

## 2.2 パーフェクトシャッフル教材の教育的価値

パーフェクトシャッフル教材との関連が強いのは c, d, e, f の4つである。実際、本論文で提案されている教材の良さをこの枠組みに照らして整理すると次のようになる。

### c 事象との関連がある

日常の遊びの中でも行っている、カードのシャッフルという行為の中にも様々な数学が存在し、数学を用いてその一端を理解できることを示すことができる。

d 数学の実用性が伝わる

数学の概念や考え方は、シャッフルという一見ランダムに見えるカードの動きを的確に記述する言葉となる。また、効果的な問題の処理方法としても有効に働く。

e 数学の文化的価値（数学の美的価値）を有している

シャッフルという身近な話題と結びつけることで、数学が我々人類の活動と密接に関わる文化的なものであるということがわかる。また、数学を用いることで思考が整理され問題が解決でき、さらに問題を広げ考察することができるようになる。そこには美しさ、面白さ、豊かさが存在する。

f 探求的活動が行える

本教材は身近な内容を扱っているため、学生は問題に興味を持ち主体的にこれを考察する。その中で、自分の力で数学的発見を行う創造体験を積むことができる。また、問題設定を変更し、自分なりの問題を考えることも容易に行えるので、大学における探求的活動が実現する。

このように、本稿提案教材は先行研究で示されている教科内容学研究の理論枠組みに沿っており、求められる多くの要素を満たしたものとなっている。故に、上掲の目的達成にも十分に寄与すると考えられる。

### 3. 線形代数学の教材として

この教材は置換や巡回置換を学習した学生を対象とする。はじめに、パーフェクトシャッフルの紹介と実演を行う。「10枚のカード(1, 2, 3, ..., 10)が並んでいる。これを前半と後半の5枚ずつの2つの山に分け、前半の山から交互にカードを取り、カードを並べる(パーフェクトシャッフル)。この操作を6回行うと、カードは元の並びに戻る。」具体的には、 $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \rightarrow (1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10) \rightarrow (1, 8, 6, 4, 2, 9, 7, 5, 3, 10) \rightarrow \dots \rightarrow (1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10) \rightarrow (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ となる。そして、以下の問題を挙げる。

52枚のとき何回かのパーフェクトシャッフルでカードは元の並びに戻るでしょうか。  
 その場合、最少何回行えばよいでしょうか。

この問題に対して、カードの移動を記録し考察することや枚数を減らして帰納的推論を働かせることが期待される。52枚の動きを書くのは煩わしいため、数学的表現の必要性を感じ、置換を用いる。10枚のカードの場合、

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix} \text{ となる。これを巡回置換の積で表すと、} (2\ 6\ 8\ 9\ 5\ 3)(4\ 7) \text{ となる。置換を}$$

巡回置換の積で表すことにより、カード全体が混ざっているように思えるが、4と7は4番目と7番目を交互に繰り返しているだけのことに気付く。また、6回で元に戻る理由は巡回置換の長さの最小公倍数が6であることに依っていることもわかる。置換には積が定義されているので、それを用いて計算すると、

$$t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 6 & 4 & 2 & 9 & 7 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix} \text{ となり、2回シャッフルを行った動きと対応していることもわかる。}$$

次に、どうすれば巡回置換の積を求められるかという問題に移っていく。(2 6 8 9 5 3)を逆からみると、 $2, 3=2 \times 2 - 1, 5=3 \times 2 - 1, 9=5 \times 2 - 1$  が成り立つ。そこで、この規則を考えて「8が  $9 \times 2 - 1$  という数式から得られるのではないか？」ということが思考される。ここで、17を8と思うためには

$\text{mod } 9$  を取れば良いことに気付く。すると、 $6 \equiv 8 \times 2 - 1, 2 \equiv 6 \times 2 - 1 \pmod{9}$  となり、整合性が取れる。また、 $\text{mod } 9$  をとる理由はカードの動きを考察すればわかる。 $(4, 7)$  も、 $7 = 4 \times 2 - 1, 4 \equiv 7 \times 2 - 1 \pmod{9}$  であることがわかる。形式を整えるには、1 をひくことを避けるために、動くことがない1枚目のカードを0とし、カードの数字を1つずつ減らすと良い。

これらを用いて、22枚のパーフェクトシャッフルを考えると、巡回置換の積として、 $(1, 2, 4, 8, 16, 11)(3, 6, 12)(5, 10, 20, 19, 17, 13)(7, 14)(9, 18, 15)$  が得られる。したがって、6回で元に戻ることがわかる。この考えを用いて、他のいろいろな枚数で調べてみると、どの枚数においても1を含む巡回置換の長さで元に戻る回数が決まることに気付く。すなわち、1を含まない巡回置換の長さは1を含むものの約数である。実際、 $\text{mod } 21$  をとらずに22枚のもの巡回置換をみると、 $(1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5)(3, 3 \times 2, 3 \times 2^2)(5, 5 \times 2, 5 \times 2^2, 5 \times 2^3, 5 \times 2^4, 5 \times 2^5)(7, 7 \times 2)(9, 9 \times 2, 9 \times 2^2)$  である。合同式の性質から、 $2^m \equiv 1 \pmod{k}$  ならば  $n \times 2^m \equiv n \times 1 \pmod{k}$  が成り立つ。この式は1を含む巡回置換の長さは、他の巡回置換の長さの倍数になっていることを意味する。したがって、1を含む巡回置換だけで、元に戻る回数が決まることがわかる。また、合同式の性質から21と2,5は互いに素であるので、それらを含む巡回置換の長さが6であることもわかる。

#### 4. 授業の実践

教員養成系のN大学の1年前期に配当されている数学の「線形代数学」に関する授業の1コマ(90分)で、パーフェクトシャッフルを扱い、それを探究する課題を出した。この章では、授業の流れと学生が行った課題探究の成果を紹介する。受講者数は35名である。

##### 4.1 授業の流れ

教科書は三宅(2008)を用いて行っている。行列の紹介、連立1次方程式を掃き出し法を用いて考察することを行い、行列式の学習に入っている。試験を含む16回の授業のうち12回目の授業で行った。行列式の導入にあたり、置換(置換を巡回置換で表せること、巡回置換を互換の積で表せること、これを用いて符号を定義する)については学習している。

##### 4.1.1 本時案

(1) 主題名 「パーフェクトシャッフル」

(2) 本時の目標 (学校数学に準拠して述べる)

よりよい方法がないかを考えようとする。(数学への関心・意欲・態度)

いろいろな枚数のトランプで試し、帰納的推論を行う(帰納的な考え方)。自ら置換表現を用いてパーフェクトシャッフルを考察しようとする(記号化の考え方)。パーフェクトシャッフル以外のシャッフル方法を考え、考察しようとする(発展的な考え方)。(数学的な見方や考え方)

パーフェクトシャッフルを置換表現を用いて表現できる。置換表現を(各数は一度しか含まれない)巡回置換の積に表すことができる。(数学的技能)

任意の置換は自分自身を何度かかけると単位置換になることを知り、その性質からパーフェクトシャッフルを何度か行くとカードがもとの状態に戻ることを知る。パーフェクトシャッフルでもとに戻るまでの最小回数は、置換表現をし、それを巡回置換の積に表したときの巡回置換の長さの最小公倍数であることを知る。(知識理解)

(3) 指導案

時間	学習内容	学習活動(○教師の支援, ●学生の活動)	評価・留意点
0分	導入 実際に10枚のトランプを用いてパーフェクトシャッフルを紹介する。 「52枚のとき何回のシャッフルで元の並びに戻るか」を発問する	○問題提起, トランプ配布 ●トランプを実際を使って, パーフェクトシャッフルを行う ●枚数をいろいろ変えて考察する ●紙にカードの移動を記録する ●いろいろな表現をノートに書く	書画カメラでトランプの動きをみせる  初めは個人解決, その後グループ解決の流れをとる
30分	置換を用いて, パーフェクトシャッフルを考察する(問題の数学化) 「置換を用いて, 52枚が8回で戻ることをごどう示すか」	○学生から出なければ「置換で表せること」を紹介する ●置換での計算と, 実際のカードの動きが対応していることを確認する ●置換を巡回置換の積に表して, 考察する ●巡回置換の長さの最小公倍数でもとに戻すことに気づく	
45分	置換と巡回置換の積を用いて, 解決する 「n枚でも何回かのシャッフルでもとに戻るか。その場合, 何回に戻るか」	○一般のn枚でどうなるかを考えさせる ●グループで協力して行う ●枚数の少ない方から行う ●シャッフルの回数が少なくて済む枚数を考える ●効率的な方法を考える	各班で考えていることを発表させ, 情報共有をはかる
60分	「置換表現を介さずに, 巡回置換の積で表せないか」	●各巡回置換をみると2倍して1引いた数になっていることに気づく。枚数を超える数字になるときはmodをとることに気づく ●すべての巡回置換は2が入っている巡回置換の長さの約数であることに気づく	各班で考えていることを発表させ, 情報共有をはかる
85分	まとめ	○置換で表現することのよさを振り返る 他のシャッフルやパーフェクトシャッフルの考察を続けてレポートにまとめるように指示する	レポートには探究と感想を書く 班でまとめても個人でまとめてもよい

#### 4.1.2 授業実践の結果

導入では, 学生は10枚のトランプが数回のパーフェクトシャッフルでもとのならびに戻ることに驚いた様子であった。10枚だから起きた現象なのか, それとも一般に起こるのか興味津々で, 52枚の問題に取り組んだ。そこでは, 実際にカードを用いて考察したり, 表を用いて考察したり, 52枚より少ない枚数で現象を捉えようとしたりする学生がいた。しかし, 自ら置換や巡回置換の積を用いて考えられる学生はおらず, こちらから発言を促すことになった。巡回置換の積に表し, それらの巡回

置換の長さの最小公倍数回パーフェクトシャッフルを行えばカードがもとに戻ることに気づき、何枚でも同様にもとに戻ることに納得していた。この方法を用いて、52枚のとき、8回のパーフェクトシャッフルでもとに戻ることを求めている。学生から、「 $n$ 枚に対して、公式が出せないか」や「そのすべての巡回置換の長さを求めたい」という発言があった。しかし、各巡回置換の数字が2倍されていることに気づく学生は極少数であり、その考え方が共有されぬまま授業時間は終わりを迎え、課題の提示に移った。レポート課題として発展的に考えてくるように伝え、学生から「別のシャッフルを考える」という案が出された。

## 4.2 課題の分析

課題は個人またはグループ（4名以下）で探究した。学生が設定した課題の概要は以下の通りであった。

- ・枚数を変更（ $n$ 枚、126枚、偶数枚、奇数枚、 $2^n$ 枚など）して法則探求
- ・設定は変更せずに法則探求
- ・分ける山の数を変更して法則探求（3つ山、4つ山、5つ山）
- ・シャッフルの方法を変更して法則探求
- ・アウト・シャッフルと別のシャッフルの関係を考察
- ・枚数とシャッフル回数にある関数関係の探求（グラフを用いて考察）
- ・山の分け方（枚数を等分しない）を変更した場合の法則探求
- ・2つに分けた山からのカードの取り方（2枚ずつ取る等）を変更した場合の法則探求
- ・行列を用いたシャッフルの考察

学生はこれらを探求する中で、帰納的推論を用いた法則予想をしたり、その証明を考えたりしている（帰納的推論を過信している者も多かったが）。そして、その結果として元の並びに戻ることを確認したり、逆のシャッフル（逆元）の存在に気付いたりし驚きを感じていた。また、レポートの記述（置換を用いるか、単に授業内容の反復になっていないか等）からは各学生の学習内容の理解度が推察され、今後の指導に対する示唆も得られた。このように、自由度の高い課題レポートを課すことで、ペーパー試験では見えづらい、学生の迷いや驚き、理解度や創造性などを評価することができるというのも本教材の良さであろう。

## 5. 結果の考察と今後の数学科内容学の展望

最後に、教材を実践した結果の考察と今後の数学科内容学の展望を述べる。

### 5.1 結果の考察

実践授業を通して、学習した数学をいろいろな事象に使う経験が足りていないことが明らかになった。専門性が高く課題探究能力のある教員を育成するには、このような経験を積ませることが大切である。大学の数学を学習するだけでなく、それを活用する場面や探究可能な課題に取り組んでいくことが教員養成では強く望まれる。今後も、このような教材開発を行っていきたい。

### 5.2 今後の数学科内容学の展望

数学は学びを深めることによって、高いところからものが見られるようになる。今井他（2013）ではモジュライ空間を用いて、三角形に関する初等幾何の問題を分析している。今後、大学数学を使うことによって事象の解明ができる教材や学校数学に関わる問題が解ける教材が多く開発され、教員養成における数学で取り扱われることが望まれる。

## 謝辞

この教材を知らせてくれた青翔高校の花岡祐也君, 東司君, 前田直樹君と寺川彰先生に感謝します。本研究は平成 26 年度科学研究費補助金 (基盤研究 C 25381181) による支援を受けている。

## 引用・参考文献

- 今井淳・中村博昭・寺尾宏明 (2013) 不変量と対称性—現代数学のこころ。ちくま学芸文庫。
- 西園芳信・増井三夫 (編著) (2009) 教育実践から捉える教員養成のための教科内容学研究。風間書房。
- 増井三夫 (2010) 平成 22 年度日本教育大学協会特別研究助成研究報告書 教員養成における「教科内容学」研究。上越教育大学。
- 三宅敏恒 (2008) 線型代数学 —初歩からジョルダン標準形へ—。培風館。
- 文部科学省 (2009) 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編。実教出版。
- 吉井貴寿・花木良 (2014) 置換を用いたパーフェクトシャッフルの考察。数学教育学会会誌 臨時増刊 2014 年度数学教育学会秋季例会発表論文集, 80-82。
- 花木良・吉井貴寿, 置換を用いたパーフェクトシャッフルの考察と教材化。準備中。

# Development of Teaching Materials in Contents Studies of Mathematics:

## Teaching Materials on Perfect-Shuffles of Playing Card for Linear Algebra

Ryo Hanaki (Nara University of Education)  
Takatoshi Yoshii (Nara University of Education)

**Abstract** : Recently it is important to enrich the mathematics teaching-materials used in exploration activities. Therefore, teachers and students in teacher-training courses have to have experience with such activities, too. The purpose of this study is to develop teaching-materials. In this paper, we made a proposal of the teaching-material of the shuffle of cards (Perfect-Shuffle) in linear algebra lessons. The students considered the movement of cards using permutations, cyclic permutations, and modular arithmetic. Moreover, they researched this shuffle and wrote a paper.

**Key words** : Teacher-Training Curriculums, Perfect-Shuffle, Mathematical Activities, Exploration activities, Super Science High-School (SSH)