

万華鏡を用いた算数・数学教材の開発

○奈良教育大学 花木 良
奈良教育大学 井手内 彩

<キーワード>鏡, 線対称, 正多面体

1. はじめに

万華鏡は移動するビーズなどを鏡に反射させて対称性の高い像を楽しむものであり、三角柱の内側に鏡を張ったものが多い。本稿では、鏡を使って平面図形の対称性を考察したり、それぞれが直交する3枚の鏡でできた万華鏡(キャットアイ万華鏡)(カスパー, 2006)に正多面体を映し出し、空間図形の対称性の理解を深めたりする教材を提案する。対象は中学生以上を想定しているが、小学生にもみせて楽しませることが可能である。錐体鏡に一枚の三角形、四角形や五角形を置き、正多面体を映し出す万華鏡も提案されている(東海大学, 1999)。

鏡はカーブミラーなど日常の多くのものに用いられており、鏡に映ったものの位置を知るといった空間把握はどの子にも必要な力である。

図形の対称性の学習は、学習指導要領では小学校6年で「対称な図形について理解し、図形についての理解を深める」ことで扱われている。正多面体は中学校1年の空間図形の単元で取りあげられ、高等学校では数学Aでオイラーの多面体公式を用いて正多面体が5種類しかないことが扱われたり数学Iで図形の計量で多面体の体積を求めたりしている。

正多面体はその美しさから古代ギリシアから多くの研究があり、ユークリッド原論ではそれが5つしか存在しないことが論じられている。他にも多くの興味深い性質がある(一松, 2002)。また、その対称性から群の作用に

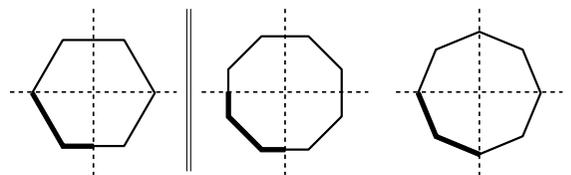
ついでの研究にも用いられる(平井, 2001)。また、正多面体やその他の多面体はその対称性の高さから人を魅了し芸術作品にも多く現れ、その礎にもなっている。

2. 教材

1枚の鏡を用いて正多角形を映し出せるかを考えさせると、任意の自然数で映し出せることがわかる。偶数の場合は、2通りの映し方があることがわかる。また、いろいろな図形を自由に描かせ、線対称な図形についての理解を深める。

次に、直交する2枚の鏡を用いて正多角形を映し出せるかを考える。偶数の場合は映し出せることがわかり、4の倍数の場合は2通りの映し方があることがわかる。他にもいろいろな図形を自由に描かせ、直交する2枚の鏡に映し出される図形の特徴を理解する。すると、奇数の場合は、直交する2本の直線で4等分することができないので、映し出せないことがわかる。また2枚の鏡を用いて映し出せるものはそれを2倍すれば1枚の鏡を用いて映し出せる。

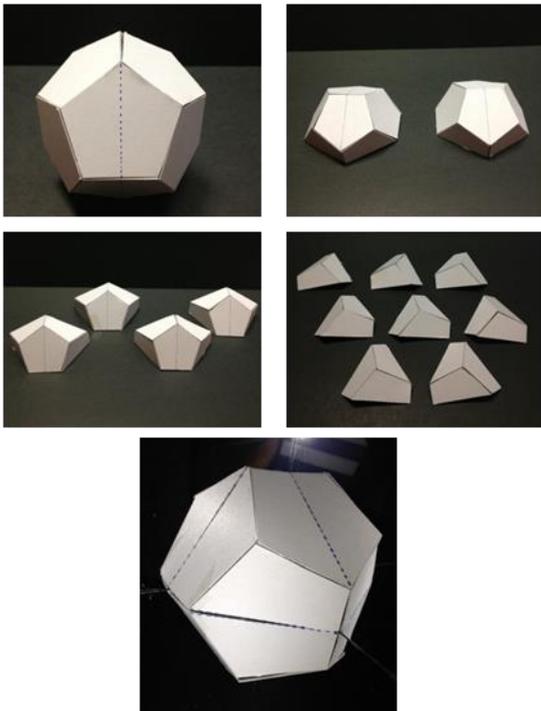
<図1 正多角形を2枚の鏡で映し出す>



2枚の鏡を3枚にし、正多角形を空間図形である正多面体に一般化し、それぞれが直交する3枚の鏡でできた万華鏡を用いて正多面

体を映し出せるかを考える。すると、正四面体以外の正多面体は映し出すことができる。正六面体と正八面体は容易にどのような形を置けばよいか分かり、2つの形があることにも気づく。正十二面体と正二十面体はすぐにはわからない。そこで、1枚の鏡や直交する2枚の鏡には、どのような形を置けばよいか考えると、正十二面体や正二十面体を半分にしたもの、四分の一にしたものを置けばよいことがわかり、3枚の場合は、元の多面体を八分の一にしたものを置けばよいことがわかる。正十二面体と正二十面体は双対の関係であり、まったく同じ対称性をもっている。したがって、双対の位置におけば、正十二面体を分けた平面で、同様に正二十面体を切れば、3枚の鏡に映す形を見つけることができる。

<図2 正十二面体を3枚の鏡で映し出す>



3. 教材の価値

鏡を使って形を映し出すことで、数学の美

しさや楽しさを味わえる。

主体的に対称的な図形を描き考察することで、日常にある図形に興味をもち、積極的に対称性を見つけようとする態度が養われる。

発展的な学習として、1, 2, 3枚の鏡を用いて、どのような形を映し出せるのかを考察することや芸術的な作品を作ることが挙げられる。例えば、正二十面体の頂点の周辺を黒くするとサッカーボール（切頂二十面体）が作られる。これらは各自の能力に応じて行うことが可能である。

鏡に映し出す元の形に色を塗ると、どこがどこに映るかわかり、鏡に映ったものの位置を理解することができる。

正多面体や図形の対称性を記述しようとすると、置換群や群を用いることになり、大学で学ぶ線形代数や代数学の学習に繋がる。

4. まとめと今後の課題

このように鏡を使った教材は見て楽しむことができ、数学的に発展させることも可能であるため、課題学習やSSH等の探求活動に適している。図形に絵を描いて楽しむこともでき、図工や美術教材としての利用も考えていきたい。

中学生や高校生に実践を行い、どのような発展的な学習が行えるかを考察していきたい。

付記: 本研究は平成 26 年度科学研究費補助金(基盤研究 C 24501051)によって支援されている。

引用・参考文献

- 一松 信「正多面体を解く」(2002)、東海大学出版会。
- 学校法人東海大学教育開発研究所(1999)「数理と造形の融合数学にさわろう! マセマティカル・アート展」。
- 平井 武(2001)「線形代数と群の表現 I, II」、朝倉書店。
- カスパー・シュワーベ、石黒敦彦(2006)「ジオメトリック・アート 幾何学の宇宙教室」、工作舎。