

置換を用いたパーフェクト・シャッフルの考察

奈良教育大学理数教育研究センター 吉井 貴寿 教育学部 花木 良

E-mail : takatoshi.441@gmail.com, hanaki@nara-edu.ac.jp

概要：パーフェクト・シャッフルとは、トランプを並び変える操作である．この操作を繰り返すと、トランプは元の並びに戻る．これは有限群の位数に対応する．本稿では、線形代数で学習する置換や巡回置換、合同式を用いてこれを探究する教材を提案する．これは群の学習の素地となる．このような教材は、数学的表現のよさを伝え、大学における数学的活動や課題学習として適切であることを明らかにする．

検索語：教員養成、パーフェクト・シャッフル、リフル・アウト・シャッフル、数学的活動

1. はじめに

教員養成の高度化が叫ばれており、大学の授業を通して、課題探究的な活動を自ら体験し、新たな学びを展開できる実践的指導力を修得することが必要であると云われている．中学校・高等学校の数学科では、「目的意識をもった主体的な活動(数学的活動)」の充実が図られており、中学校に留まらず高等学校(数学ⅠA)においても課題学習が内容として位置づけられている．学習指導要領解説^[1]において、課題学習では「(数学の) 内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識できるようにする。(括弧内筆者)」と述べられている．したがって、教員養成を行う大学の授業においても、学生に数学的活動を行わせ、教員志望学生の数学学習観や数学指導観の変容を促すことが望まれる．

本稿では、数学科教員免許を取得する教員養成大学や理工系大学の1年生が受講する線形代数の授業において、大学における数学的活動や課題学習に適した教材としてパーフェクト・シャッフル(Perfect-Shuffle)を提案する．パーフェクト・シャッフルとは、カードを混ぜる(Shuffling)方法のうちランダム性を含まない(ある一定の規則に従ってシャッフルが行われる)ものを指す場合に用いられる言葉である．一般に、パーフェクト・シャッフルと言った場合は後述するリフル・イン・シャッフル(Riffle-In-Shuffle)を指す場合が多く、その別名として用いられることもある．そこで、まず

最も代表的なパーフェクト・シャッフルであるリフル・イン・シャッフルと、本稿の提案教材で考察を行っているリフル・アウト・シャッフル(Riffle-Out-Shuffle)について紹介する．

○ リフル・イン・シャッフル

デッキ(カードの束)を(背面を上にして)上半分(A)と下半分(B)のちょうど二つに分割する．その後、二つのパケット(カードの山)AとBのカードが交互になるようにして一つの束へと戻す．その際、上下の反転が起きてはいけない．また、Bの山の一番上のカードが一番上に来るように戻す．

○ リフル・アウト・シャッフル

デッキを(背面を上にして)上半分(A)と下半分(B)のちょうど二つに分割する．その後、二つのパケットAとBのカードが交互になるようにして一つの束へと戻す．その際、上下の反転が起きてはいけない．また、Aの山の一番上のカードが一番上に来るように戻す．

その他にも、パーフェクト・シャッフルには様々な種類が存在する．例えば、「ヒンズー・シャッフル(Hindu-Shuffle)」・「ディール・シャッフル(Deal-Shuffle)」・「モンジュ・シャッフル(Monge-Shuffle)」・「それらの逆シャッフル^(a)」などである．これらは、いずれも繰り返し用いることで、シャッフルされたカードは一見するとばらばらになったかのように見える．しかし、規則に従ってシャッフルを繰り返している限り、シャッフルされたカードもある規則に従って整列している．また、カードの並びは有限通りしかないので、同一の規則的なシャッフルを繰り返し用いていけば、いつかは元の状態に戻ると

ということもわかる。

2. 先行研究

パーフェクト・シャッフルによる、カードの移動は群構造を有している^(b)。それ故に、これは数学でも度々考察されてきた。最もよく研究されてきたのは前述したリフル・イン・シャッフルであり、一回のシャッフルでカードがどのように移動するか、また何回のシャッフルで元の状態に戻るかなどが考察されてきた^[2]。その他にも何度カリフル・イン・シャッフルとリフル・アウト・シャッフルを繰り返す事で、デッキのトップのカードを任意の位置に移す方法なども知られている^[3]。それらの研究の多くは、考察方法として合同式を用いるものであり、群論に関連した代数学的知識を利用している場合が多い。故に、パーフェクト・シャッフルを教材とすることで、巡回群・剰余類群やその位数など群論に関連した様々な内容を学習することができるという考えも提案されている^{[2]・[5]}。実際、飯高(2013)の著作^[2]では、主にリフル・イン・シャッフルついて、合同式を用いた偶数枚デッキの考察や、置換を用いた奇数枚デッキの考察が行われ、そこから一般の群論的内容に話を広げていくことが行われている。現在、合同式を知らない大学生が多いことや、代数学の指導時期などを考えるといくつか難点はあるものの、このようにトランプのシャッフルという身近な題材を通して代数学の基礎的な知識を身に付ける方法は有意義であろう。

本稿で提案するパーフェクト・シャッフル教材では、1章で述べたリフル・アウト・シャッフルを置換や巡回置換を用いて考察する。多くの先行研究が考察をしているリフル・イン・シャッフルと本教材で扱うリフル・アウト・シャッフルは互いに関係が深い^(c)。本稿では、学生が合同式を学んでいないことを考慮したとき、リフル・アウト・シャッフルを考察した方が構造を見抜きやすいと考え、こちらを主として扱っている。一般的な線形代数の指導において、行列式は置換を用いそれが巡回置換の積、互換の積で表され、互換の数の偶奇は一意に決まることから符号を定義し、導入が図られる。本教材では、これらの内容と関連させ授業を展開することを構想している^(d)。

3. パーフェクト・シャッフル教材

この教材は置換や巡回置換を学習した学生を対象とする。はじめに、パーフェクト・シャッフルの紹介と実演を行う。「10枚のカード(1, 2, 3, ..., 10)が並んでいる。これを前半と後半の5枚ずつの2つの山に分け、前半の山から交互にカードを取り、カードを並べる(パーフェクト・シャッフル)。この操作を6回行くと、カードは元の並びに戻る。」具体的には、(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) → (1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10) → (1, 8, 6, 4, 2, 9, 7, 5, 3, 10) → ... → (1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10) → (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)となる。そして、以下の問題を挙げる。

52枚のとき何回かのパーフェクト・シャッフルでカードは元の並びに戻るでしょうか。その場合、最少何回行えばよいでしょうか。

この問題に対して、カードの移動を記録し考察することや枚数を減らして帰納的推論を働かせることが期待される。52枚の動きを書くのは煩わしいため、数学的表現の必要性を感じ、置換を用いる。10枚のカードの場合、

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix} \text{となる。これを巡回}$$

置換の積で表すと、(2 6 8 9 5 3)(4 7)となる。置換を巡回置換の積で表すことにより、カード全体が混ざっているように思えるが、4と7は4番目と7番目を交互に繰り返しているだけのことに気付く。また、6回で元に戻る理由は巡回置換の長さの最小公倍数が6であることに依っていることもわかる。置換には積が定義されているので、それを用いて計算すると、

$$t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 6 & 4 & 2 & 9 & 7 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix} \text{となり、2回シャッ}$$

フルを行った動きと対応していることもわかる。

次に、どうすれば巡回置換の積を求められるかという問題に移っていく。(2 6 8 9 5 3)を逆から見ると、 $2, 3=2 \times 2 - 1, 5=3 \times 2 - 1, 9=5 \times 2 - 1, 8=?=9 \times 2 - 1$ であると考えられる。ここで、17を8と思うためにはmod 9を取れば良いことに気付く。すると、 $6 \equiv 8 \times 2 - 1, 2 \equiv 6 \times 2 - 1 \pmod{9}$ となり、整合性が取れる。また、mod 9をとる理由はカードの動きを考察すればわかる。(4, 7)も、 $7=4 \times 2 - 1, 4 \equiv 7 \times 2 - 1 \pmod{9}$ であることがわかる。形式を整えるには、1をひくことを避けるために、1枚目のカードを0とし、カード

の数字を1つつ減らすと良い。

これらを用いて、22枚のパーフェクト・シャッフルを考えると、巡回置換の積として、 $(1, 2, 4, 8, 16, 11)(3, 6, 12)(5, 10, 20, 19, 17, 13)(7, 14)(9, 18, 15)$ が得られる。したがって、6回で元に戻ることがわかる。この考えを用いて、他のいろいろな枚数で調べてみると、どの枚数においても1を含む巡回置換の長さで元に戻る回数が決まることに気付く。すなわち、1を含まない巡回置換の長さは1を含むものの約数である。実際、 $\text{mod } 21$ をとらずに22枚のものの巡回置換をみると、 $(1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5)(3, 3 \times 2, 3 \times 2^2)(5, 5 \times 2, 5 \times 2^2, 5 \times 2^3, 5 \times 2^4, 5 \times 2^5)(7, 7 \times 2)(9, 9 \times 2, 9 \times 2^2)$ である。合同式の性質から、 $2^m \equiv 1 \pmod{k}$ ならば $n \times 2^m \equiv n \times 1 \pmod{k}$ が成り立つ。この式は1を含む巡回置換は、他の巡回置換の倍数になっていることを意味する。したがって、1を含む巡回置換だけで、元に戻る回数が決まることがわかる。また、合同式の性質から21と2,5は互いに素であるので、それらを含む巡回置換の長さが6であることもわかる。

4. 教材の教育的価値

本章では、本教材の教育的な価値について整理しておく。

○ 数学的活動が行える

学生が目的意識をもち、問題に取り組むことができる。その中で、カードを用いた思考錯誤や、色々な枚数のトランプで試すといった帰納的推論が行える。置換を用いて考察しようとする記号化の考え方や、他のシャッフルの方法を思考する発展的な考え方も促す。

○ 数学的な表現のよさを感じられる

置換を用いることで、1度のシャッフルを演算として考察できるようになる。また、巡回置換の積で表すことにより、カードの動きを明確に捉えられることに気付く。

○ 課題学習につながる

カードの枚数を変化させたり、シャッフルの方法を変えたりすることで、自ら課題設定が行える。これにより主体的な学習が促される。

○ 群論の素地となる

任意の枚数に対して、何度かパーフェクト・シャッフルを行うと元の並びに戻ることを経験的に学ぶことができる。この学習は、「有限

群の任意の元はその元を何度かかけると単位元になる」ことに対応している。また、すべての有限群は置換群として表現することができる（Cayleyの定理）。

5. おわりに

優れた教員養成の実現のためには、大学における教科内容に関する授業においても、このような教育的価値を有した教材が扱われることが望ましい。大学数学における数学的活動や課題学習を様々な内容領域で考えていく必要がある。

<脚注>

- (a) すべてのパーフェクト・シャッフルはその逆の操作を考える事が可能である。逆の操作 (A^{-1}) とは、操作Aをした後に操作 A^{-1} を行うとカードの並びが元の状態に戻るものを言う。この逆の操作を実現するシャッフルが逆シャッフルである。場合によっては、逆シャッフルに別の名前がついていることもある。例えば、モンジュ・シャッフルの逆シャッフルはミルク・シャッフル (Milk-Shuffle) と呼ばれる。
- (b) カードの移動に、何も動かさないと単位元に相当する移動と、一手順元に戻す逆元に相当する移動を加えればこれは明らかである。
- (c) $2n$ 枚のリフル・アウト・シャッフルは $2(n-1)$ 枚のリフル・イン・シャッフルと同一視できる。
- (d) 実際の授業では、必要に応じて補足を行うことで、合同式を用いた考察も視野に入れて指導を行う。なお、本学の授業では参考文献[6]を教科書として用いている。

<引用・参考文献>

- [1] 文部科学省、「高等学校学習指導要領解説 数学編」, 東山書房, 2009.
- [2] 飯高茂, 「数学のかんどころ16 群論, これはおもしろいトランプで学ぶ群」, 共立出版, 2013.
- [3] 石原徹, 「パーフェクト・シャッフルの数理(1)」, 数学セミナー 2014.02, pp.45-49, 日本評論社, 2014.
- [4] 石原徹, 「パーフェクト・シャッフルの数理(2)」, 数学セミナー 2014.03, pp.42-47, 日本評論社, 2014.
- [5] K. Glacey, 「Perfect Shuffles: A Shortest Sequence to Move a Card」, Master's Expository Paper, University of Nebraska-Lincoln, 2011.
- [6] 三宅敏恒, 「線型代数学—初歩からジョルダン標準形へ」, 培風館, 2008.