

日常生活や社会に活用する離散グラフ教材の研究

真鍋 佑香, 花木 良

奈良教育大学教育学研究科, 奈良教育大学教育学部

1. 研究の背景

学習指導要領では、「数学的活動」が重視されている。その中では、中学校学習指導要領では『既習の数学を基にして数や図形の性質などを見だし発展させる活動、日常生活や社会で数学を利用する活動、数学的な表現を用いて根拠を明らかにし道筋立てて説明し伝え合う活動』、高等学校では『自ら課題を見だし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること』が挙げられている。

また、数学への興味や関心を高めるとともに、具体的な事象への活用を通して数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てることをねらいとする「数学活用」という科目が高等学校に新設され、「数学的な表現の工夫」として、離散グラフを活用することが挙げられている。

離散グラフに関する教材研究は、(西村, 2007) (生野ほか, 2007) (花木, 2011) (真鍋ほか, 2012) などで行われているが、まだ十分に教材が準備されているとはいえない。

本論文では、これらの活動に合ったフレームを固定する教材を提案する。この題材は(ウィルソン, 1997)で離散グラフを用いることで、解くことができることが紹介されている。本教材は、建物のフレームのように一定の長さの鉄鋼をボルトで留めたもののボルトが緩んでも建物が崩れないようにするためには、どのように梁を入れたらよいかという教材である(図1)。この教材では、実際に鉄でできた模型の教具¹を用いて行うことを前提としている。この問題では、「4つの辺の長さが等しい四角形はひし形であり、ひし形の向

かい合う辺は平行である」という定義や性質、「平行線の関係は推移律が成り立つ」という性質を用いるため図形の学習を活用する力がつき、離散グラフを用いて表現し解決することで数学的表現のよさを知ることができる。具体的な教具があることから、誰でも意欲的に問題に取り組むことができ、問題に対する解答を予想したり、体験的に成り立つ事実を実感したりすることが可能である。四角形の性質を用いたり論証的であることから、中学校2年生以上で扱うことが妥当である。

教具を用いて図形の動きを実際に見ることができするため、四角形は4つの辺の長さだけでは形が決まらないことやひし形の特殊な場合が正方形であることが理解できる。離散グラフを用いる場面では、同時に平行に動く辺を1組と見なし、1つの頂点で表現するため、ベクトルの見方の応用や素地にもなる。

本論文で提案するフレーム教材は、(今岡ほか, 2006), (荻田, 2000)でも取りあげられている。(今岡ほか, 2006)では、高等学校を主とした学校数学を対象に、『フレームの動きという観点で、実際面との結びつきを生かしながら、数学の発展的な考え方につながる可能性のある図形教材を探ること』を目的とした考察が行われている。その中で本教材を紹介しており、ベクトル空間を用いた解法を紹介し、線形理論を学ぶ大学生などにも適した教材ではないだろうかと提案している。第二類の教科書では、フレーム教材が図形の導入で用いられ、三角形の合同性はフレームの動きで印象づけられていると指摘している。(荻田, 2000)では、筋交い(梁)の最少個数を求めることを目的に、この教材を扱い、『2部グラフに変換する

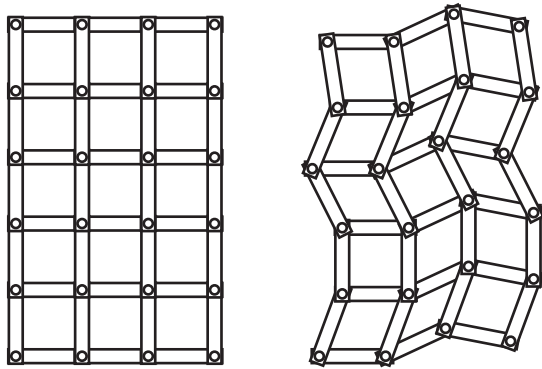


図1 フレーム教材

ことで、単純化し、固定することがグラフの全域木になることと同値であることがわかる。抽象化の良さを体験させることが目標であった。生徒（または我々が）が数学的な考えの良さをいつ認識するか、といえは、一見複雑に見える事象を、その本質を捉えて抽象化すると、法則性を見いだすときである。』と教材の価値を述べている。しかし、これらの論文では、本フレーム教材の詳細な授業展開やどこで図形の性質が用いられるか、発展的な教材が挙げられていない。また（日常生活教材作成研究会、2005）では、合同条件の建築への応用として「建物に筋交いをなぜ入れるのか」という教材が紹介されているが、1つの長方形に筋交いを入れる理由に終始しており、現実的な問題には遠く、数学としての発展性も乏しい。そこで、本論文では、フレーム教材は、離散グラフ表現を用いることで、数学を日常生活や社会に活用することを実感でき、数学を創造したり発展させたりすることができることを明らかにする。

2. 教材

日常生活や社会で数学を利用する場面として、次の問題から始める。

問題1

建物を建てる時、車で運べる資材の長さは限られています。そのため、資材をつなぎ合わせて建物を建てます。今回は同じ長さの鉄材を用いて建物を建てるとし、その鉄材の端を1つのボルトで図1左のように繋ぎ合わせ、建物のフレームを組みました。長い時が立つと、ボルトが緩んでしまうかもしれません。ボルトが緩んでしまったら、このフレー

ムはどのようになりますか。また、どのような対策をとったらよいですか。

教材を用いると、縦に並ぶ辺、横に並ぶ辺は平行に動くことが見て取れる。その根拠は、「すべての鉄材の長さは等しいので、各四角形（各格子）はひし形であり、ひし形の性質から向かい合う辺は平行である。さらにひし形が縦にも横にも並んでいることから、平行線の関係の推移律より、縦に並ぶ辺、横に並ぶ辺は平行であることがわかる。」ということになる。こうして、38本の辺はすべてが独立に動くわけではなく、縦に並んだ6本の辺の組が3組、横に並んだ4本の辺の組が5組で、8組の独立に動く辺の組があることがわかる。

四角形は4つの辺の長さが与えられても四角形が一つに決まらないが、三角形は3つの辺の長さが与えられれば三角形が一つに決まることから、四角形に梁と呼ばれる対角線を入れればよいことがわかる。

問題2

3×5のフレーム全体を固定するには、はりをどこにどのように入れたらよいか考えましょう。

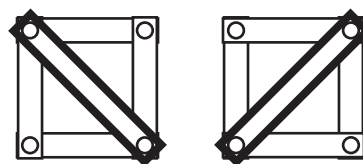


図2 梁（はり）

教材を通して実際に梁を入れていくと、すべての四角形に梁を入れなくてもフレームが固定されることに気づき、「最小何本で固定されるのか」という問いを生徒自らもつことが期待できる。そして、実際に行う中で、最小本数が7本であることを予想することもできる。最小本数を実現する梁の入れ方は多様にあり、簡単に全体が固定されていると示せるものからそうでないものまでがある。図3の左側では、A2の四角形は、A1, B1, B2の三つの正方形から右下の角度が直角に決まり、4つの辺の長さと1つの角が決まり四角形の決定条件から正方形に決まることがわかる。つまり、角度に関する説明で固定されることがいえる。同

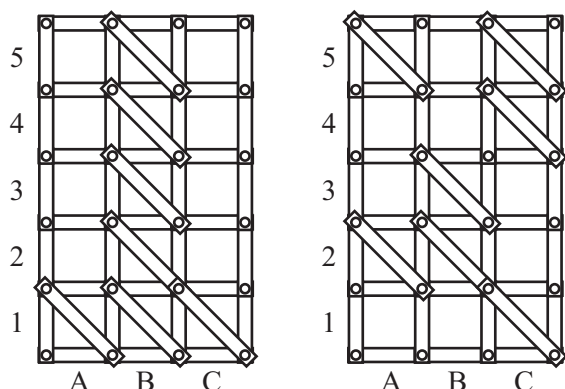


図3 全体が固定されているフレーム

様の説明で、次から次へと A3, A4, A5 が正方形に固定されるといえる。また、右側も同様に C2, C3, C4, C5 と固定されるといえる。

図3の右側では、同様の説明で A3 が固定されるといえる。しかし、他の四角形は同様の説明では固定されることがいえない。例えば、A1 が固定される理由は A5, C1, C5 に梁が入っているからである。理由は A5 の梁より 5 にある 4 本の辺（直線）と A にある 6 本の辺（直線）がそれぞれが垂直であり、C1 の梁より 1 にある 4 本の辺と C にある 6 本の辺がそれぞれが垂直であり、C5 の梁より 5 にある 4 本の辺と C にある 6 本の辺がそれぞれが垂直である。また垂直の記号を使うと、 $A \perp 5$, $C \perp 5$, $C \perp 1$ より、 $A \perp 1$ ということになる。そして、A1 が固定されることがわかれば、あとは角度に関する説明で、B1, C2, C3, B4, B5, A4 と固定されることがわかる。この見方は、角度に関する説明の一般化になっていることもわかる。

このままでは、状況が見えづらいので、梁による垂直の関係を線で表し、離散グラフを作る（図4）。離散グラフ（略してグラフ）では点を頂点、頂点を結ぶ線を辺と呼ぶ。これを用いると、最小本数が7本であることを示すことが容易になったり発展的な学習が行えるようになったりする。この離散グラフを用いて、フレームを考察すると、グラフが繋がっているとき（どの2頂点も辺をたどって行き来できるとき、グラフは連結と呼ばれる）はフレーム全体は固定されていて、連結でないときは固定されないことに気づく。固定されないとき、動くひし形は辺をたどって辿りつけない頂点どうしで構成されていることにも気づく。グ

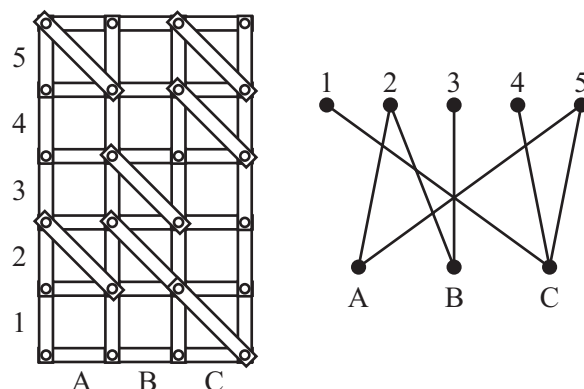


図4 垂直の関係を表す離散グラフ

ラフが連結であるとき、全体が固定されることを示すには、すべてのひし形が固定されることを示せばよい。

図4のような場合、辺で結ばれていない A と 1 のひし形は、A5C1 というような長さ3の道が見つかるので、正方形に固定されており、同様の見方をすれば、全体が固定されることがわかる。これは、先ほどの3つの垂直関係から残りの垂直関係がわかるという見方と対応している。グラフでは、角が固定されるという見方は4辺の垂直関係に一般化されてしまう。このようにしてグラフが連結であることは、フレームが固定されるための必要十分条件であることがわかる。

次に、最小本数に関する解決を行う。5×3のフレームの動く辺の組を頂点で表すと、8個の頂点で表現され、8個の頂点を繋げるためには最小でも7本の辺が必要であるからである。連結に関して極大な部分グラフを連結成分と呼ぶ。8個の頂点で辺がないときは、連結成分は8個ということになる。同じ連結成分にある頂点を辺で結ぶと連結成分の数は変わらず、異なる連結成分にある頂点を辺で結ぶと連結成分は1つだけ減る。したがって、最小本数でグラフを連結にするには異なる連結成分の間に辺を加えていけばよいことになるので、7本といえる。

3. 発展的教材

離散グラフを用いることで、次のような発展的な課題を見つけ考察することが可能になる。

「他の鉄材の2倍の長さの鉄材が2本入っているとき（図5）、最小何本のはりを入れてたら、すべてのひし形が固定されるか」「最小本数で固

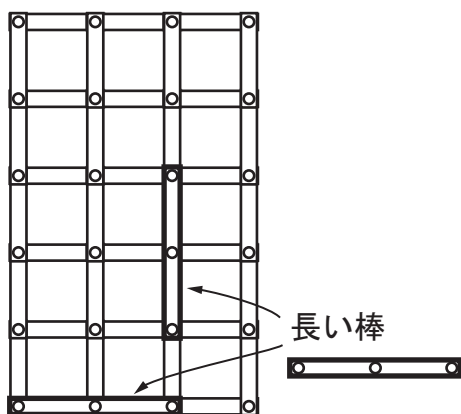


図5 問題

定するのは少し不安が残るので、どの1本のはりが折れても全体は固定されているようにすることになった。3×5フレームでは何本のはりが必要か。また一般のフレームを考えなさい。」といった課題が考えられ、グラフを使うことで解決することができる。

4. おわりに

授業実践を行うと、全体が固定されるフレームの特徴についての多くの仮説が生徒から提案された。授業実践では時間がなく、それらに関する生徒同士の議論をさせることはできなかったが、これらの仮説を生かした論駁を行う授業、すなわち、数学的な表現を用いて根拠を明らかにし道筋立てて説明し伝え合う活動を行う授業を行うことも可能である。また本教材は、中学校だけではなく高等学校の学習指導要領にも挙げられるようになった課題学習にも適している。それは、中学校の学習指導要領に書かれているような『日常の事象や他教科等での学習に関連づけたりするなどして見いだした課題を解決する学習』で、観察、操作や実験などの活動にも適しており、意欲的な追究を継続することもでき、解決のために多様な数学的な見方や考え方が発揮され、解決を振り返り発展的に考えることができるような課題であるからである。

1. 教具は、ユニクロ隅金 90mm の両側に高さ 20mm のネジを六角ナットで留めフレームを作成し、太さ 5mm 幅 15mm の木を対角線の長さになるように切断しドリルで穴を開け

た。このサイズでは、一つのネジに3本の梁を入れることは少し難しい。また場合によってはネジが閉まり過ぎて、固定されてしまう場合があるので、もう一工夫あるとよい。およそ 2000 円で一つを作ることができる。

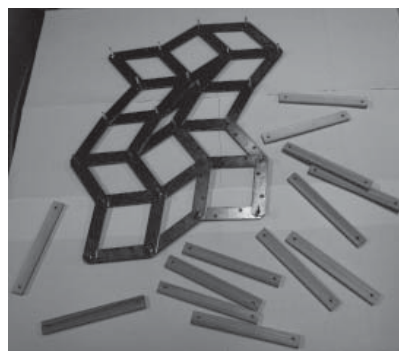


図6 教具

引用・参考文献

- 花木良 (2011) 「逆の成立を目指す教材の開発～中学・高等学校向け離散グラフ教材～」, 第 44 回数学論文発表会論文集 pp.777-782.
- 今岡光範・富田真吾・西岡亮平 (2006) 「フレームの動きを取り入れた図形教材の考察ー工学的な背景をもつ教材の発展性ー」, 全国数学教育学会誌数学教育学研究第 12 巻, pp.227-235.
- ロビン・J. ウィルソン, ジョン・J. ワトキンス著, 大石 泰彦翻訳『グラフ理論へのアプローチ』(1997), 日本評論社.
- 真鍋佑香・花木良 (2012) 「スケジュール問題に関する教材研究ー中学・高等学校向け離散数学教材ー」, 第 45 回数学論文発表会論文集 pp.353-358.
- 西村圭一 (2007) 「中等教育における離散グラフを用いた数学的モデル化に関する研究」, 日本数学教育学会誌 89(3), pp.8-16.
- 日常生活教材作成研究会 (2005), 「学習内容と日常生活との関連性の研究」調査研究事業報告書 pp.188-189.
- 荻田竜三 (2000) 「工業高校での数学教材」, 第 33 回数学論文発表会論文集 pp.489-492.
- 生野隆・花木良 (2007) 「一筆がき問題に関する教材研究ー中学・高等学校向け離散グラフ教材～」, 第 40 回数学論文発表会論文集 pp.277-282.