

スケジュール問題に関する教材研究 — 中学・高等学校向け離散数学教材 —

真鍋 佑香

奈良教育大学大学院教育学研究科 院生

花木 良

奈良教育大学教育学部

要 約

数学への興味や関心を高めるとともに、具体的な事象への活用を通して数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てることをねらいとする「数学活用」という科目が高等学校に新設され、「数学的な表現の工夫」として、離散グラフを活用することが挙げられている。本論文では、数学的モデル化や活動的な学習を強調した米国の Core-Plus Mathematics Project による教科書を参考にし、より身近でより発展・創造的な PERT を用いたスケジュール問題に関する教材を開発した。生徒は、このような教材を経験することで、日常の問題を数学を用いて解くことのよさがわかり、数学を積極的に用いたり数学と関わったりしようとする姿勢が身につくと考えられる。また、図で表現したり図をよむ場面が多くあるため、そのような力がつくことが期待できる。

キーワード：数学活用，離散グラフ，PERT

1. はじめに

数学への興味や関心を高めるとともに、具体的な事象への活用を通して数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てることをねらいとする「数学活用」という科目が高等学校に新設される。学習指導要領には、目標にある「事象を数理的に考察する能力を高め、数学を積極的に活用する態度を育てる」に関して、『例えば、「(2) 社会生活における数理的な考察」では、イベント会

場の順路や総当り戦の試合進行、最短経路の探索などを考える際に、それらを、頂点と辺で構成される離散グラフに表し、能率的に処理したり、事象の様子を的確に伝えたりすることで、事象を数理的に考察する能力を高め、数学を積極的に活用する態度を育成する。』とある。そして、「数学的な表現の工夫」として、離散グラフを活用することを挙げている。また、学校教育における離散数学の重要性や教材開発も行われている（秋山，2006，

長尾他, 2006, 生野他, 2007, 花木, 2007 など). しかし, まだ十分に教材が準備されているとはいえない.

本論文では, 数学的モデル化や活動的な学習を強調した米国の Core-Plus Mathematics Project (CPMP) による 9 年生から 12 年生を対象とした教科書 (Arthur F. Coxford, et al, 1998) を参考にし, より身近でより発展・創造的な PERT (Program Evaluation and Review Technique) を用いたスケジュール問題に関する教材を開発した. この教科書の分析は(西村他, 2005)で行われている. 本教材は, 中学生や高校生を対象に行うものとして, 予備知識をほとんど必要としないため, 数学を苦手とする文系の生徒にも取り組みやすいものとなっている. PERT は大規模で複雑なプロジェクトの計画立案とスケジュールリングを行うために開発されたものであり, システム開発プロジェクトの計画にも用いられ, 情報技術の背景として知るべき原理や基礎となる知識技能であるため, 「情報処理の促進に関する法律」に基づき経済産業省が行う国家試験である情報処理技術者試験にもよく出題されている. 教材では, 現実場面から数学的モデルをつくり数学を創るところから始め, 現実的な展開から数学を発展させていくという創造性のある数学的活動を行う. 生徒は, この

ような教材を経験することで, 日常の問題を数学を用いて解くことのよさがわかり, 数学を積極的に用いたり数学と関わったりしようとする姿勢が身につくと考えられる. また, 図で表現したり図をよむ場面が多くあるため, そのような力がつくことが期待できる.

2. 教材

次の問題から始め, ストーリーを通して, 数学を発展させていく.

問題 1

今年の文化祭では, クラスで食品店を行うことに決まった. 文化祭までに行わなければならない仕事をクラスで分担し, どれくらいの日数を要するのを知りたい. そのために, 行うべき仕事とその仕事に要する日数についてまとめる. また, それぞれの仕事を行うためには, 事前に行わなければならない仕事がある. それをまとめると表 1 となった. このとき, 全工程は最短何日間で完了できるか.

まず, 最短で終らせるためには, 各仕事を一つずつ終えていくのではなく, 並行して行えるものは手分けをして終らせていく必要があることに気づく.

それを行うために, この問題を図で表現し

仕事の内容	必要な日数	事前に行わなければならない仕事
A. 何の料理にするか決める	1 日	なし
B. 食材の価格を調べる	3 日	A
C. 容器の価格を調べる	2 日	A
D. 場所を下見する	2 日	A
E. 調理器具などの備品を用意する	2 日	A
F. 商品の値段を決める	2 日	B, C, E
G. チラシの作成と配布する	5 日	D, F
H. 食品を購入する	1 日	F
I. 容器を購入する	1 日	F
J. 店舗の準備を行う	3 日	F
K. 容器をデコレーションする	3 日	I
L. 当日		G, H, I, J, K

表 1

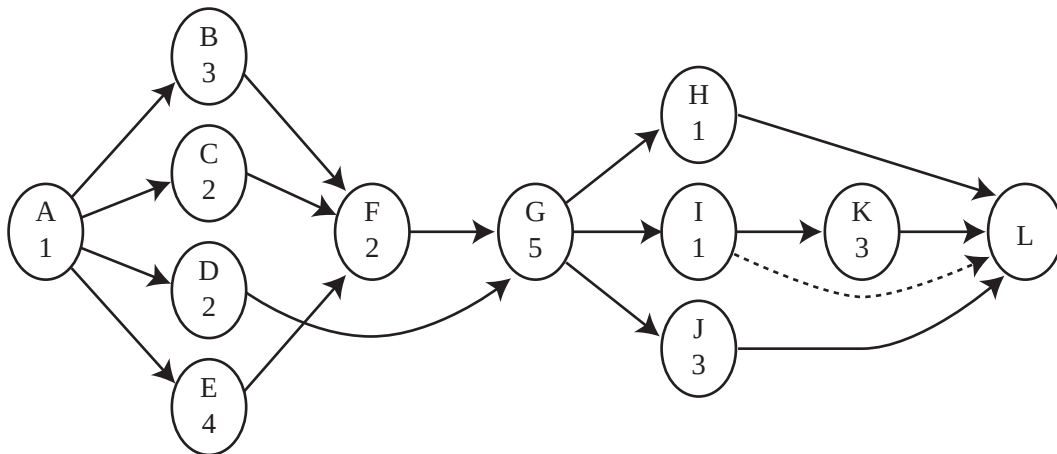


図 1 問題 1 の有向グラフ

ようになると、図 1 のような有向グラフが描かれる。有向グラフとは、頂点と頂点を結ぶ向きのついた辺（弧）で構成される図（辺に向きのついた離散グラフ）である。この問題は一般に PERT と呼ばれる（本論文では頂点で仕事を表すが、弧で仕事を表す場合もある）。そして、この有向グラフをよむと、各弧が仕事の関係を表しており、弧の始点の仕事が弧の終点の仕事より事前に行わなければならないことを表している。図に表すことで、（弧 IK と弧 KL があるので）弧 IL（I は L の事前に行わなければならない仕事であるという情報）は不要であることに気づくので、なぜ不要かを考察させたい。

仕事の関係だけをみると、例えば B, C, D, E の仕事は同時に並行して行うことができる。しかし、並行して仕事を行うだけの人数がいなければならないことに気づく。そこで、今回は、それだけの人数がクラスにいると仮定することとする。

そして、この問題では、全工程が終るのに 16 日間かかることに、直感的に気づく子どもいると考えられる。しかし、一般的な解法を得るために「それぞれの仕事は何日後に終わることができるか（終了可能日数はいくつであるか）」を考えさせる。例えば、A は 1 日後、B は 4 日後となる。なぜそうなるかを考えると、B は A が終わらないとできないため、

A	B	C	D	E	F	G	H
1 (A)							
	4 (AB)	3 (AC)	3 (AD)	5 (AE)			
					7 (AEF)		
						12 (AEFG)	
							13 (AEFGH) → 20 (AEFGMH)

I	J	K	L
13 (AEFGI) → 20 (AEFGMI)	15 (AEFGJ)		
		16 (AEFGIK) → 23 (AEFGMIK)	
			16 (AEFGIKL) → 23 (AEFGMIKL)

表 2 問題 1 と 2 の各仕事の終了可能日数

A の 1 日と B の仕事の 3 日を足して 4 日になることがわかる。次に、F は B, C, D, E の仕事が終わらないと行えない。一番遅く終る E の仕事までに 5 日かかるので、それに F の仕事の 2 日を足して 7 日かかることがわかる。このような方法がわかれば、アルゴリズムを作ることにも可能となる。それを段階的にまとめると、表 2 になる（この問題では、各仕事の終了可能日数に影響を与える仕事は 1 つだけになっているが、一般には複数存在することがある）。このとき、有向グラフでは、各仕事の終了可能日数に影響を与える弧を太くする（図 2）と、各仕事の終了可能日数に関わる仕事の関係がみやすくなる。このように日数を決定していくという考えは（花木，2007）の教材にあるような最短経路問題を考えるときと似ている。

次に、「どの仕事計画以上に時間がかかってしまうと、全工程を終えるのが遅くなってしまいか（どの仕事が早く終われば、全工程が早く終わるか）」を考えさせる。すると、そのような仕事は、L の終了可能日数に関わる A, E, F, G, I, K, L であることに気がつく。このようにして、最後の仕事の終了可能日数に関わる仕事は、1 日でも余計にかかること全体の仕事に遅れが生じてしまうものであることがわかる。最後の仕事を終える日数に関わる仕事の道（AEFGIKL）はクリティカルパス

と呼ばれる、これは PERT 問題において重要な役割を果たす。この問題のように、L の終了可能日数に関わる仕事が弧を繋いでできる 1 本の道になっている場合は、これらの仕事が早く終わると、L の終了可能日数が減少する。しかし、早まる日数が減少する日数と一致するとは限らない。なぜなら、仕事にかかる日数の変化に伴ってクリティカルパスが変化する可能性があるからである。そこで、「E の仕事が 2 日で行えるようになったら、全工程は何日間で完了できるか」という問いを考えさせ、クリティカルパスの変化の考察も行うとよい。

さらに、「計画以上に時間がかかっても L の終了可能日数が変わらない仕事は、どの程度の日数（余裕日数）まで許されるか」を考察させる。この問いは「各仕事は最も遅くて何日目（最遅終了日）に終了させれば、L の終了可能日数を変えないですむか」を考えるとよい。例えば、H と J は L を 16 日目に始められればよいので 16 日目までに終わらせればよく、D の最遅終了日は G を 7（12 - 5）日目に始められればよいので 6 日であることがわかる。G の最遅終了日は、H を 15（16 - 1）日目、I を 12 日目、J を 13 日目に始めなければならないので、12 日となる。このように最遅終了日は、L から弧を逆にたどることと決定できる。そして、余裕日数は、最遅

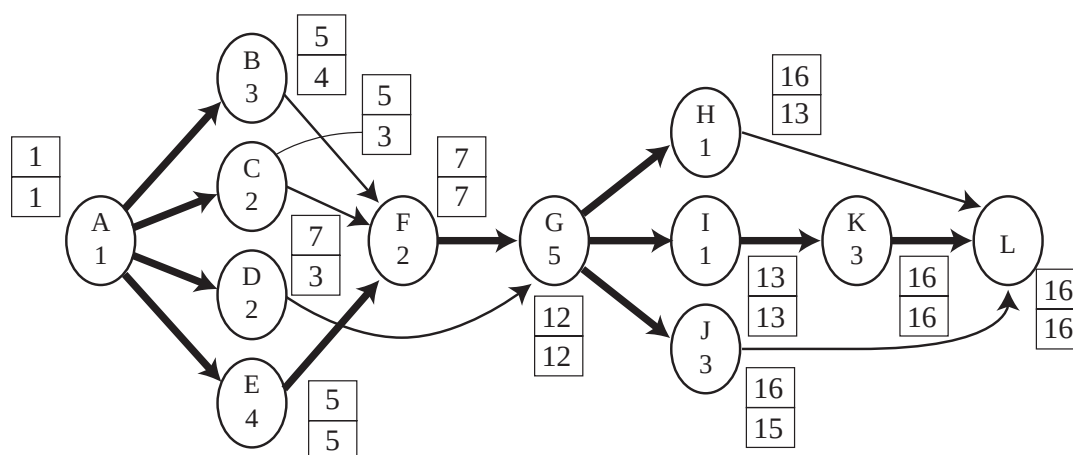


図 2 上の数字は「最遅終了日」、下の数字は「終了可能日数」

終了日から終了可能日数をひけばよいことになる。

次に、発展的な問題を挙げる。

問題 2

ある生徒から「食材や容器がなるべく残らないようにするために、前売りを行いたい」という意見が出た。そこで、チラシを事前に配布し、その中に前売券をつけることにした。G の必要な日数は変更せず、前売券の受付は 7 日間行うこととする。このとき、全工程は何日間で完了できるか。

この問題を図で表し、問題 1 と比べて終了日が変わる仕事と変わらない仕事があることに気づかせたい。この問題を図で表すと、M（前売券の受付）という頂点を追加し、G は M の事前に行わなければならない仕事であり、M は H, I の事前に行わなければならない仕事であるので、図 3 のようになる。また、弧 GH, GI は不要であることに気づく。M を事前に行わなければならない仕事とするのは H, I なので、H, I を事前に行わなければならない仕事以外（A, B, C, D, E, F, G, J, これらの頂点は有向グラフでは H, I から弧を向きに沿ってたどって到達できない頂点である）は、今回の変更で終了可能日数が変わらないことがわかる。それ以外の頂点は新たに考察する

ことになる。すると、M は 19 日（AEFGMIKL）となり、他の仕事は表 1 のように変更になることがわかる。この問題のように、クリティカルパス上の頂点間に新たな仕事が増えると、その分最終的な仕事の終了可能日数も増えることがわかる。

さらに、理解を深めるために、発展的な問題を挙げる。

問題 3

さらに、ある生徒から「チラシには商品の写真を載せた方がよい」という意見が出た。そこで、価格を調べる際に、商品サンプルを作るための食材と容器を購入することになった。B と C の必要な日数は変更せず、そのための食材と容器は用意できるとし、商品サンプルにかかる日数は 2 日とする。また商品サンプルが完成してから商品の値段を決めることになった。このとき、全工程は何日間で完了できるか。

問題 2 と同様に考える。この問題は、図 4 のように変更すればよいことになる。N（商品サンプルを作成する）を事前に行わなければならない仕事は B なので、B を事前に行わなければならない仕事以外（A, C, D, E）は、今回の変更で終了可能日数が変わらないことがわかる。それ以外の頂点は新たに考察

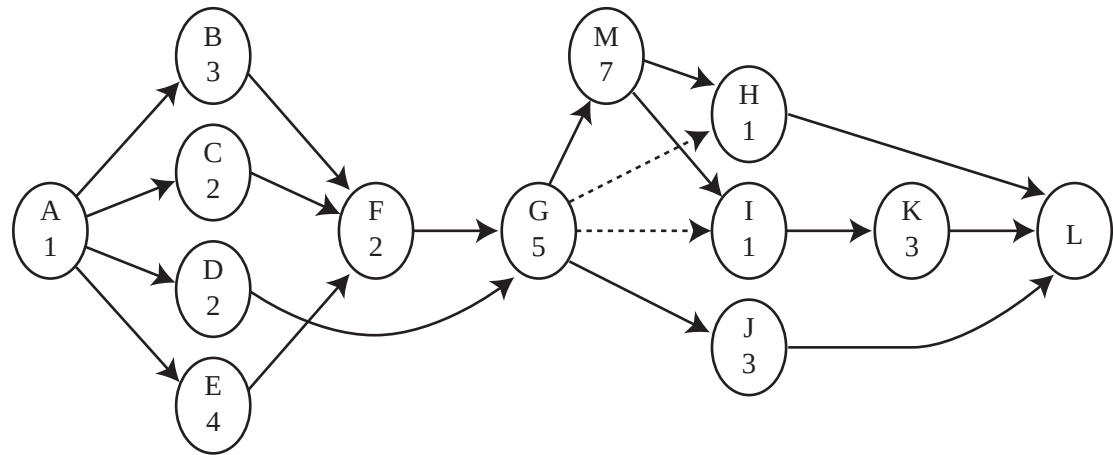


図 3 問題 2 から考えられる有向グラフ

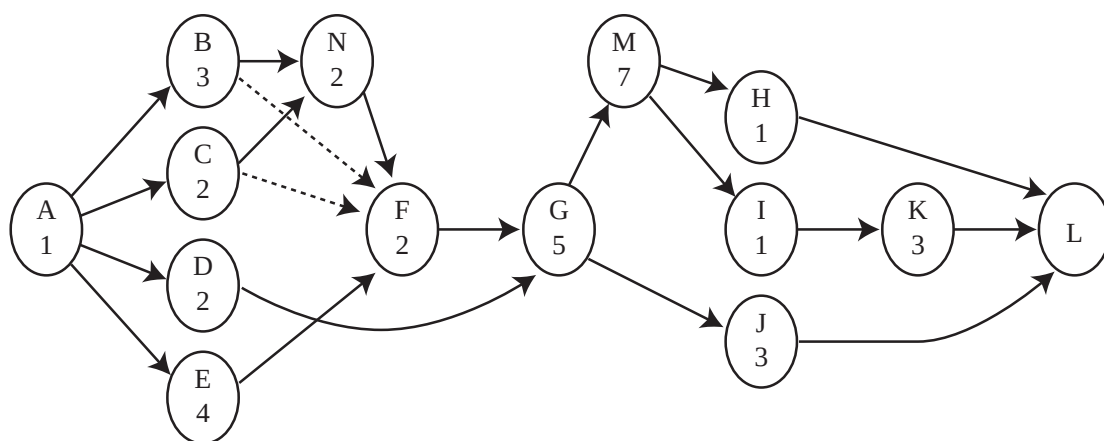


図4 問題3から考えられる有向グラフ

することになる。そして、クリティカルパスは ABNFGMIKL で、全工程は 24 日かかることがわかる。F の終了日が 1 日遅くなり、(この問題では新たな仕事 N を事前に行わなければならない仕事とするのは F のみなので) F が終了可能日数に関わる仕事は、どれも 1 日遅くなることがわかる。次に、クリティカルパスの変更のない問題を挙げる。

問題 4

場所を下見した後に店のイメージを撮影しチラシに載せることになった。入口だけを装飾することになり 2 日かかる。このとき、全工程は何日間で完了できるか。

このような問題を通して、どのような場合にクリティカルパスが変更になるのか、各仕事の終了日が増えるのかを数学的に考察させたい。

3. おわりに

このように PERT の問題は、日常的であり、初等的に解くことができる。さらに日常の問題と合わせて発展的に考えることもできる課題であるといえる。他にも、料理をするときに何から準備をしたらよいかを考えるときにも用いることができる。本教材は、CPMP の教科書同様にグループ学習にも向いている。

今後、この教材を理系や文系の幅広い生徒に実践を行い、可能性を探っていく。

参考文献

- Arthur F. Coxford, et al (1998) “Contemporary Mathematics in Context”, Course1 PartA. McGraw.Hill.
- 秋山仁・酒井利訓 (2006) 「離散数学を高校カリキュラムに導入すべし」教育開発 第 1 号, pp75-90
- 生野隆, 花木良 (2007) 「一筆がき問題に関する教材研究～中学・高等学校向け離散グラフ教材～」第 40 回数学教育論文発表会論文集 pp.277-282
- 長尾篤志, 景山三平, 長崎栄三編 (2006) 『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』国立教育政策研究所科学研究成果報告書
- 西村圭一, 植野美穂, 松元新一郎他 6 名 (2005), 「中等教育段階の数学カリキュラム開発に関する基礎的研究：米国の Core-Plus Mathematics Project の分析を通して」, 日本数学教育学会誌 87, pp.2-11.
- 花木良 (2007) 「最短経路問題に関する教材研究～中学・高等学校向け離散グラフ教材～」第 40 回数学教育論文発表会論文集 pp.853-858