

逆の成立を目指す教材の開発 ～中学・高等学校向け離散グラフ教材～

花木 良
奈良教育大学教育学部

学生の試験やレポートの解答をみると、逆が成り立つことを平気で使ったものが多く見受けられる。この原因として、学校教育において逆を意識させる教材が十分ではないことが考えられる。命題「 p ならば q 」が成り立ち、逆が成り立たない場合、反例があり、その反例を除外するような条件を q に加えると、逆も成り立つようになることがある。このような教材を、平成 21 年度全国学力調査の算数 B 問題 4 を発端に展開する。逆の成立にあたっては、高等学校の新学習指導要領にも取りあげられている離散グラフを用いて考察する。このような経験は、必要十分条件や反例を学習する際に大切な素地となる。また、本教材を用いれば、これらの理解を深化させることも期待できる。

キーワード：逆，離散グラフ，マッチング

1. 研究の動機

学生の試験やレポートの解答をみると、逆が成り立つことを平気で使ったものが多く見受けられる。この原因として、学校教育において逆を意識させる教材が十分ではないことが考えられる。

初等幾何において、円周角の定理、円に内接する四角形の定理、二等辺三角形の底角定理、三平方の定理、チェバの定理及びメネラウスの定理などは、逆が成り立つものである。

自然数において、偶数は $2n$ の形で表され奇数は $2n - 1$ の形で表されることも逆が成り立ち、この必要十分条件を用いて、奇数どうしの乗法は奇数になることなどが示されている。中学校や高等学校の内容は必要十分条件が成り立つことが多い。

杉山吉茂は、円に内接する六角形 $ABCDEF$ に関する性質として、 $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$ が成り立つが、逆は成り立たないことを挙げ、逆が必ずしも真になら

ないということを経験することが大事であると述べている（杉山，2008）。

高等学校では，形式的に必要な十分条件などの術語を学習する．しかし，逆を学ぶ教科書の例において，既存の内容を形式的に扱っていることが多く，仮定の条件を弱めたり結論の条件を強めたりして逆が成り立つような動的な見方はなされていない。

命題「 p ならば q 」が成り立つとは，図 1 のように条件 p を満たすものの集合 P と条件 q を満たすものの集合 Q の間に $P \subset Q$ という包含関係が成り立つということである．逆が成り立たない場合は， Q が P より真に大きいということである．そこで， q の条件を強め， $P = Q$ が成り立つこと，すなわち，必要十分条件が成り立つことを目指す教材を提案する．逆が成り立たないことをいうには反例をあげる．その反例を除外するような条件を Q に課し，逆の成立を目指す．このような行為は P の特徴や性質を知りたいときに行われる．本教材の問題 1 は，平成 21 年度全国学力調査の算数 B 問題 4 と同様の問題で，タイルを敷きつめるための必要条件を用いた説明が要求される．このような経験は，必要十分条件や反例を学習する際に大切な素地となる．また，本教材を用いれば，これらの理解を深化させることも期待できる．これは，高等学校の新学習指導要領にも取りあげられている離散グラフに関する一つの教育的価値を表している．さらに，離散グラフを用いることで，学力調査の問題の本質や拡がりを見ることができる．問題づくりという観点では逆を考えることがある（京極，2008；鈴木，1994）が，逆の成立を目指して結論の条件を強めていくというものはみられない。

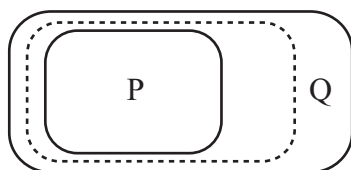


図 1 仮定と結論の関係

2. 結論の条件を強める教材

逆が成り立つように結論の条件を強めて必要十分条件を求めていく教材を紹介する。

問題 1 図 3 の部屋 (i)(ii) に図 2 のようなタイルを敷きつめることができるでしょうか。

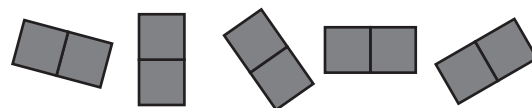
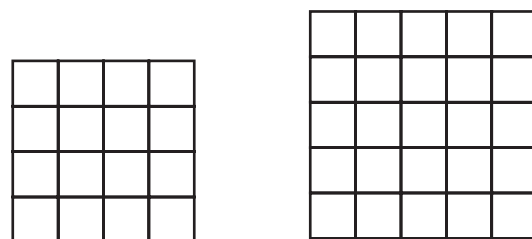


図 2 タイル



(i)

(ii)

図 3 問題 1

本論文では，タイルといったら図 2 のようなタイルを指すこととする．(i) は，実際にタイルを敷きつめることで，容易にタイルを敷きつめ可能であることがわかる．一方，一つのタイルを敷くと 2 マスが埋まるので，部屋のマス目が偶数でないと敷きつめることはできないから (ii) は，タイルを敷きつめることはできない．すなわち，これは次の命題の対偶からわかるということである。

命題 1 ある部屋にタイルを敷きつめ可能ならば，その部屋のマス目の数は偶数である。

そして，逆が成り立つのかを考える．つまり，マス目の数が偶数の部屋があれば，必ずその部屋はタイルを敷きつめられるかという問題である．ここで部屋は正方形や長方形でない形も許すことにする．

逆が成り立たないことは，図 4 の部屋 (i)，(ii) にタイルを敷きつめられないことからわかる．敷きつめられない理由は，(i) に関しては部屋の端にはタイルを図 5(i) の 1 や 2 のように敷きつめなければならない，すると真ん

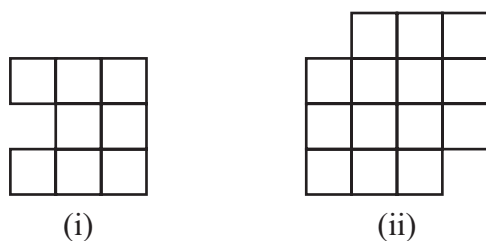


図4 命題1の逆の反例

中には3のように敷き詰めなければならないことからわかる. (ii)に関しては, 左下にタイルを縦長におくか横長におくかで場合分けをする. 横長におく場合は, 図5(ii)にあるように他のタイルが敷き詰められなければならないことから敷き詰めが不可能であることがわかり, 縦長の場合も同様にしてわかる. つまり, 効率的に場合分けをしていけばよい.

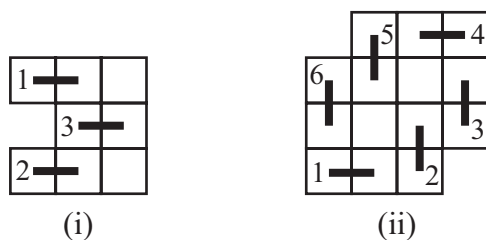


図5 敷きつめるには

実は, これらが敷き詰められないことを示すエレガントな方法がある. このアイデアは, 1957年にアメリカのパズル研究者マーチン・ガードナーによって発表されたものである. この部屋に隣り合うマスが異なる色になるようにマスを2色に塗る (図6). これをチェッカーボード彩色, または市松模様という. チェッカーボード彩色された部屋で考えると, タイルを一つ置くと, そのタイルは必ず白のマス1つと黒のマス1つを覆う. したがって, 白と黒のマス目が同じ数でなければ,

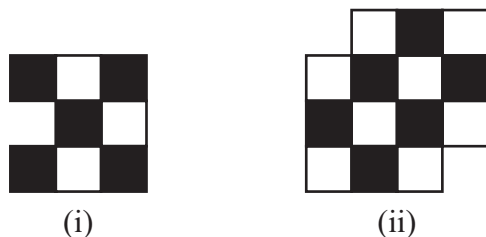


図6 チェッカーボード彩色

ば, 敷きつめることはできない. すなわち, これは次の命題の対偶からわかるということである.

命題2 タイルをある部屋に敷き詰め可能ならば, その部屋をチェッカーボード彩色したときの白のマス数と黒のマス数は同数である.

命題2は命題1を拡張したもの, 命題1の結論の条件を強めたものになっている. つまり, 部屋をチェッカーボード彩色したときの白のマス数と黒のマス数は同数であるならば, その部屋のマス数が偶数である.

命題2の逆が成り立つのかを考えると, 逆が成り立たないことは, 図7の部屋は敷き詰められないことからわかる. 理由は, 先ほどと同様に端から場合分けをしていけばわかる. しかし, この理由では敷き詰め可能であるための必要十分条件を十分に見いだせない. 図7(i)一番左と上の黒を敷きつめるには, 中にある白のタイルを敷き詰めないといけなからである. つまり, 2つの黒に対して白が1つしかないことが敷き詰められない要因であるを突き止める必要がある. また部屋のタイルの敷き詰め問題では隣り合うタイル数に制約があるので, さらに問題の本質を探るために, 敷きつめの問題をグラフのマッチングの問題に拡張する. まず, 次の問題を考える.

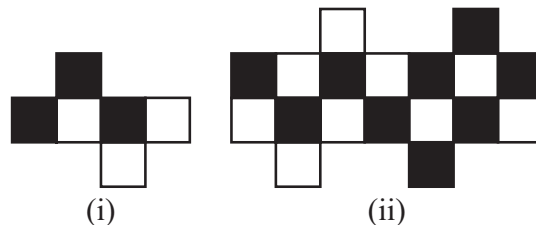


図7 命題2の逆の反例

問題2 あるパーティにA, B, ..., Jの10人がある. AとD, AとE, AとJ, BとD, BとE, BとI, CとD, CとE, CとI, DとG, DとH, EとF, EとG, Fと

I, F と J, G と I, G と J, H と J が知り合いである. このとき, 全員が同時に知り合い同士のペアを作ることが可能であるか.

頂点を人間, 知り合いであるとき辺で結び, (離散) グラフで表すと, 問題の人間関係は図 8(i) のように表される (ここで頂点に白と黒があるのは後述の説明のためで, 普通は黒のみを用いる). この問題は, このグラフの辺の部分集合で, 互いに頂点を共有せず, どの頂点からもその集合の一边が出ているものが存在するかということになる. このような辺の部分集合を完全マッチングという. 一般に, グラフに対して, 互いに頂点を共有しない辺の集合をマッチングという. 問題 2 のグラフを考察すると, 同じ色の頂点同士が辺で結ばれていないように頂点を白と黒に塗ることができる (このようなグラフを二部グラフという) ことがわかり, 白頂点と黒頂点の数が異なることから, 完全マッチングは存在しないことがわかる. なお, 二部グラフの表し方は, 図 8(ii) のように表すとわかりやすいことが多い.

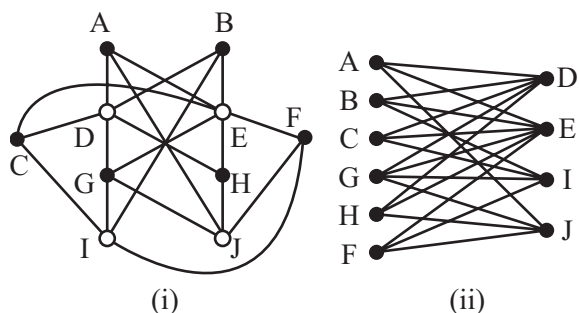


図 8 問題 2 のグラフ

この考え方は前のチェッカーボード彩色と同様である. 前のタイルの敷き詰め問題もグラフとして考えると, 図 9 のようになり, このグラフには完全マッチングが存在しないことが同様にしてわかる. 命題 2 はグラフで書き直すと, 次のようになる.

命題 2' 二部グラフに完全マッチングが存在するならば, 白頂点の数と黒頂点の数は同

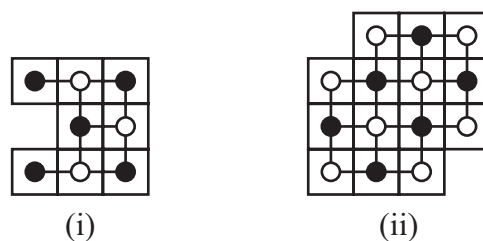


図 9 部屋の敷きつめをグラフで考える数である.

命題 2' の逆を考えると, 図 10(i)(ii) のようなグラフが反例として挙げられる. 図 10(i) のグラフは g と i は c のみと辺で結ばれているので, 完全マッチングが存在しないことがわかる. 図 10(ii) のグラフは, g と i と j に着目すると, これらの頂点は b と d のみと辺で結ばれているので, 完全マッチングが存在しないことがわかる. 実は, このような部分があれば, 二部グラフには完全マッチングが存在するということが, ホールによって示されている.

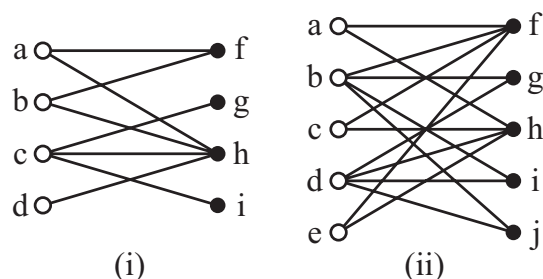


図 10 命題 2' の逆の反例

定理 3 (ホールの定理) X と Y を白と黒の頂点集合とする二部グラフ G に完全マッチングが存在するための必要十分条件は, 任意の X の部分集合 S に対して $|S| \leq |N(S)|$ が成り立つこと, かつ, 任意の Y の部分集合 T に対して $|T| \leq |N(T)|$ が成り立つことである. ここで, 絶対値は集合の元の個数を表し, $N(S)$ は S のいずれかの頂点と辺で結ばれている頂点の集合である.

証明は数学的帰納法を用いて予備知識なしに行うことができるが, ここでは割愛する.

この定理は、 $S = X$ とすると $|X| \leq |N(X)| \leq |Y|$ であり、 $T = Y$ とすると $|Y| \leq |N(Y)| \leq |X|$ であることから、命題 2' を拡張したものになっていることがわかる。また、この定理の後半部分は、任意の X の部分集合 S に対して $|S| \leq |N(S)|$ が成り立つことかつ $|X| = |Y|$ に書き直すこともできる。

先ほどの説明は定理を用いると、図 10(ii) のグラフでは、 $T = \{g, i, j\}$ とすると、 $N(T) = \{b, d\}$ となるので、 $|T| \leq |N(T)|$ を満たさないことがわかる。敷きつめられないタイルの敷きつめ問題では、このような部分があることが確認できる。この定理は、任意の X の部分集合を調べれば、完全マッチングが存在するかないかが判定でき、存在しない場合は不等式を満たさない部分が見つかるということの意味している。さらに、この定理を使った効率的に完全マッチングを発見するアルゴリズムが知られている。

3. 仮定の条件を弱める教材

次の問題から始める。

問題 3 図 11 の部屋があり、左上におはじがある。隣り合うマスに移動していき、すべてのマスを 1 度だけ通り、もとのマスに戻ってくる経路は存在するか。

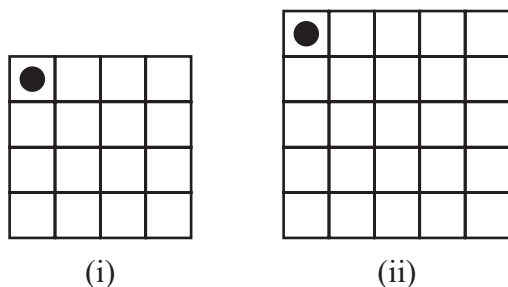


図 11 問題 3 経路を考える

図 12 のように、(i) は経路が存在し、(ii) はチェッカーボード彩色を行うと、このような経路が存在したら白黒白黒…白と戻ることになり白と黒のマス数が同じでなければならないが、この部屋は同じ数でないで、存

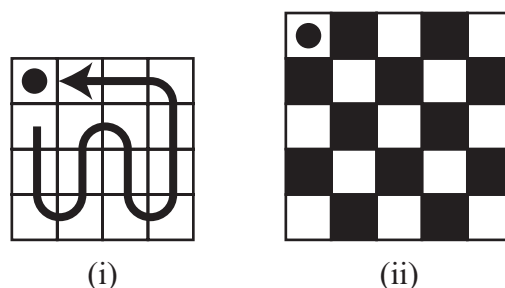


図 12 ハミルトンサイクル

在しないことがわかる。このような経路をハミルトンサイクルという。ハミルトンサイクルが存在したら、それに沿ってマッチングの辺として選択するしないを交互に決めることで、完全マッチングが得られる (図 13)。すなわち、次の命題が成り立つ。

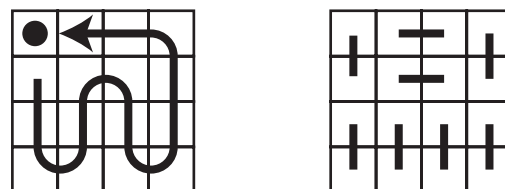


図 13 ハミルトンサイクルと完全マッチング

命題 4 偶数個のマスをもつ部屋 (偶数個の頂点をもつグラフ) にハミルトンサイクルが存在するならば、その部屋にタイルを敷きつめることができる (完全マッチングが存在する)。

この命題の逆も成り立たないことが、図 14 の反例からわかる。(i) がマッチングをもつことは明らかであり、ハミルトンサイクルをもたないことは真っ直ぐに進んで元に戻って来れないことからわかる。(ii) は左下に着目すると、ハミルトンサイクルとして太線部分は必ず通らないといけないことがわかり、太線の破線も通らないといけないが、この両方を通るとそこで閉じてしまうため、存在しないことがわかる。すなわち、グラフにおいて 2 本だけ辺が出ている頂点は、ハミルトンサイクルでその両辺を通らないといけないことである。しかし、元に戻って来ないですべてのマスを 1 度だけ通るものは存在す

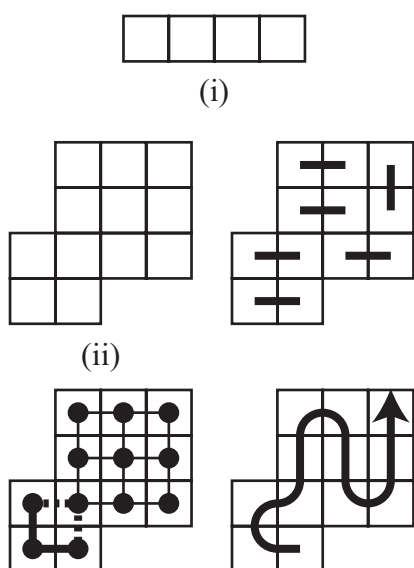


図 14 命題 4 の逆の反例とハミルトンパス

る.このようなものをハミルトンパスという.ハミルトンサイクルが存在すれば,ハミルトンパスが存在するので,仮定の条件は弱くなる次の命題が同様に成り立つことがわかる.

命題 5 偶数個のマスをもつ部屋 (グラフ) にハミルトンパスが存在するならば,その部屋にタイルを敷きつめることができる (完全マッチングが存在する).

この命題の逆も成り立たないことが,図 15 の反例からわかる.この部屋がハミルトンパスをもたないことは,太線の破線のうち,高々 4 本しか通ることができないことからわかる.一般に,ハミルトンサイクルに関する問題は非常に難しいことが知られている.この命題から意義ある必要十分条件を作り出すことも簡単ではないと考えられる.

4. おわりに

大学 2 年生 2 名に実践したところ,命題 1 と命題 2 の逆の反例を挙げることができた.命題 2' の逆の反例 (図 10(ii)) を与えたところ,3 個の頂点と隣接している頂点が 2 個しかないことに気付き,指摘することができた.また,このような着想は中学生にも可能であ

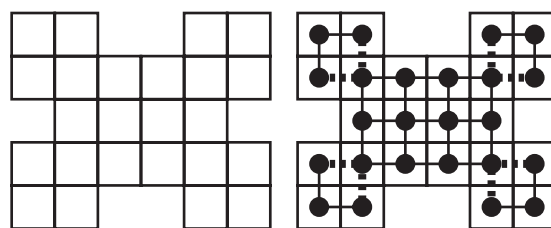


図 15 命題 5 の逆の反例

ることが記されている (根上 - 中本, 2003 : p.103). 問題 2 に関して,学生の一人は,大学の授業で同様の問題をグラフで表した経験があることもあり,すぐに人間関係をグラフで表した.その後,一つの頂点に色を決め,それと辺で結ばれている頂点に異なる色を塗り,この操作を続けることで,グラフの頂点に色を塗るという考えに到達した.しかし,辺を辿って色を塗っていくとき,その辺はマッチングで選ばれる辺になると思い込んでいたり,なぜ色を塗っているのかを十分理解していない様子であった.このような問題を通して,グラフをよむ力も育成されることが期待される.問題がパズルを発端としていること,目的が鮮明であること,試行錯誤できることから,楽しいという感想であった.

付記 この研究は,奈良教育大学新理数プロジェクトの補助を受けている.

参考文献

- 京極邦明 (2008),「図形の問題づくりに用いる原題の有効性とその改題に関する教材研究の視点」,『日本数学教育学会誌』第 90 巻第 1 号, pp.34-41.
- 杉山吉茂 (2009)『中等科数学科教育学序説』,東洋館.
- 鈴木誠 (1994),「中学校数学科における「逆」の問題づくりに関する研究」,日本数学教育学会誌』第 76 巻 7 号, pp.167-174.
- 根上生也・中本敦浩 (2003),『基礎数学力トレーニング』,日本評論社.