グラフの強概自明な埋め込みについて

花木 良（奈良教育大学）

有限グラフを G とし，自然に位相空間と考える．G から 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ への埋め込みを，**G の空間埋め込み（spatial embedding）**といい，その像を**空間グラフ（spatial graph）**という．f, f' を G の空間埋め込みとしたとき，f と f' が**同値（equivalent）**であるとは，$h \circ f = f'$ となる $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への向きを保存する自己同相写像 h が存在するときをいう．f が**自明（trivial）**であるとは，f と同値な G から $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\mathbb{R}^2$ への埋め込み f' が存在するときをいう．G が**平面的（planar）**であるとは，G から $\mathbb{R}^2$ への埋め込みが存在するときをいう．したがって，G が平面的であるときに限り，G は自明な空間埋め込みをもつことになる．

G から $\mathbb{R}^2$ への連続写像 φ が G の**射影（projection）**であるとは，φ の多重点が有限個の辺の横断的な二重点のみのときをいう．このとき，射影の像を**射影像（regular projection）**という．φ が**空間埋め込み f の射影**であるとは，$\varphi = \pi \circ f'$ となる f と同値な空間埋め込み f' が存在するときをいう．ここで π は $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^2$ への自然な射影である．このとき，f は φ **から得られる**という．射影 φ が**自明（trivial）**であるとは，φ から得られる空間埋め込みが自明なものだけのときをいう．

グラフ G の空間埋め込み f が**概自明（almost trivial）**であるとは，G の任意の真部分グラフ H に対して $f|_H$ が自明な空間グラフのときをいう．概自明の定義の条件に「f は非自明である」を加えたものを**極小非自明（minimally knotted）**という．絡み目でいうと，Brunnian はこの性質を満たしている．

グラフ G の空間埋め込み f が**強概自明（strongly almost trivial，SAT）**であるとは，f が非自明で，G の任意の真部分グラフ H に対して $\hat{f}|_H$ が自明となる f の射影 $\hat{f}$ が存在するときをいう．そのような射影の像を SAT 射影像と記す．定義から，空間埋め込み f が SAT ならば，f は極小非自明になる．

任意の平面グラフは極小非自明な空間埋め込みをもつことが知られている [3, 5]．SAT 空間埋め込みに関しては，もつグラフともたないグラフが存在することが知られている [2]．しかし，どのようなグラフが SAT 空間埋め込みをもつかもたないかは，あまりよくわかっていない．そこで，次のような SAT 空間埋め込みをもつグラフの族と SAT 空間埋め込みをもたないグラフの族を見つけた．

定理 1 [1] n 花束は，SAT 空間埋め込みをもつ．ここで，n 花束（bouquet）とは 1 個の頂点とそれを結ぶ n 本のループでできたグラフである．

命題 2 [1] 切断辺をもたず，2 個の円周と同相でない，非連結なグラフは，SAT 空間埋め込みをもたない．

次に，グラフ F を林（forest）とする．ここで，林とは 1 次元ベッチ数が 0 の（非連結なものも許す）グラフである．F の次数 0 または 1 の頂点にループをつけたグラフを G_F とすると，次の定理が成り立つ．

定理 3 [1] $E(F) \neq \emptyset$ ならば，G_F は SAT 空間埋め込みをもつ．

定理 4 [1] G は連結で手錠グラフ（1 辺の両端にループをつけたグラフ）と同相ではないとし，G が切断辺 e を 1 本もち，$G - e$ の連結成分を H_1, H_2 とする．このとき，H_1, H_2 は切断辺をもたず，サイクルをもつならば，G は SAT 空間埋め込みをもたない．

グラフ G から辺の除去と縮約および孤立点の除去を繰り返して H が得られるとき，H は G **のマイナー（minor）**であるといい，$H <_m G$ と記す．グラフの性質がマイナーに**遺伝する（inherit）**とは，その性質をもつグラフがあったら，そのグラフのマイナーも同じようにその性質をもつときをいう．そして，次を得た．

系 5 [1] グラフが SAT 空間埋め込みをもつ（もたない）という性質はマイナーに遺伝しない．

図 1 の (a) は定理 1 より SAT 空間埋め込みをもち，定理 3 より (b) は SAT 空間埋め込みをもたなず，定理 4 より (c) は SAT 空間埋め込みをもつことがわかる．

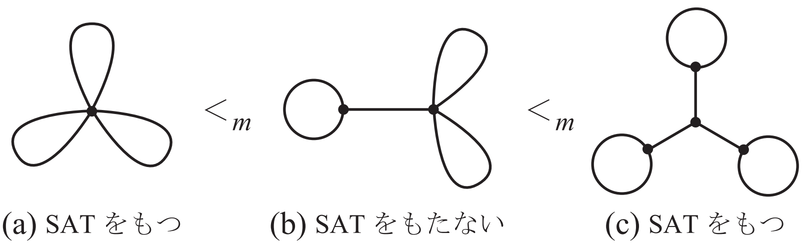

図 1: マイナーに遺伝しないことを示す例

参考文献

[1] R. Hanaki, On strongly almost trivial embeddings of graphs, to appear in *J. Graph Theory.*

[2] Y. Huh and S. Oh, Planar graphs producing no strongly almost trivial embedding, *J. Graph Theory.* 43 (2003), 319–326.

[3] A. Kawauchi, Almost identical imitations of (3,1)-dimensional manifold pairs, *Osaka J. Math.* 26 (1989), 743–758.

[4] S. Kinoshita and J. Mikasa, On projections of spatial theta-curves, Kwansei Gakuin University (1993) In Japanese.

[5] Y. Q. Wu, Minimally knotted embeddings of planar graphs, *Math. Z.* 214 (1993), 653–658.