

結び目，絡み目及び空間グラフの準射影図 とその応用について

花木 良（奈良教育大学教育学部）

1 はじめに

この章では，基本的な定義，射影像に関する研究，準射影図の研究について紹介する．

1.1 定義

有限グラフを G とし，自然に位相空間と考える． G から 3 次元球面 S^3 への埋め込みを， G の空間埋め込み [spatial embedding] といい，その像を空間グラフ [spatial graph] という．特に， G が一つの円周と同相のとき，その像を結び目， G がいくつかの円周と同相のとき，その像を絡み目という．空間グラフ \mathcal{G} と \mathcal{G}' が同値 [equivalent] であるとは， $h(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$ となる S^3 上の向きを保存する自己同相写像 h が存在するときをいう．空間グラフ \mathcal{G} が自明 [trivial] であるとは， S^3 の部分空間 S^2 (2次元球面) 上にある \mathcal{G} と同値な空間グラフ \mathcal{G}' が存在するときをいう．グラフ G が平面的 [planar] であるとは， G から S^2 への埋め込みが存在するときをいう．したがって，グラフ G が自明な空間グラフをもつための必要十分条件は， G が平面的であることになる．

G から S^2 への連続写像 φ が G の射影 [projection] であるとは， φ の多重点が有限個の辺の横断的な二重点のみのときをいう．このとき，射影の像を射影像 [projection] といい， $P = \varphi(G)$ で表す．

射影図 [diagram] D とは，各二重点に上下の情報を与えた射影像 P をいう．このとき， D は P から得られたといい，射影図は一意的に空間グラフ \mathcal{G} を表現している．このとき， P は \mathcal{G} の射影像であるという．本稿では，上下の情報の入った二重点を交点 [crossing] と呼び，上下の情報が入っていない二重点を前交点 [pre-crossing] と呼ぶ．射影図は交点をもつが，前交点をもたない．

1.2 結び目，絡み目の射影像の研究

この節では，向きの付いていない結び目と絡み目を考える． μ 成分の絡み目の集合を \mathcal{L}^μ とする．特に \mathcal{L}^1 は結び目の集合である．絡み目 L の射影像の集合を $\text{PROJ}(L)$ と表す． $L_1, L_2 \in \mathcal{L}^\mu$ に対して，谷山公規氏は， $\text{PROJ}(L_1) \supset \text{PROJ}(L_2)$ のとき， L_1 は L_2 より小さい ($L_1 \leq L_2$) と定義し，考察した [14, 15] ．

命題 1 [14] 各 μ に対して, (\mathcal{L}^μ, \geq) は前順序である. つまり, 任意の $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}^\mu$ に対して, 次の (1) と (2) が成り立つ.

(1) $L_1 \geq L_1$ (反射律)

(2) $L_1 \geq L_2$ かつ $L_2 \geq L_3$ ならば, $L_1 \geq L_3$ (推移律)

そして, 谷山氏は結び目に関して図 1 のようなハッセ図を得た [14]. 同様にして, 谷山氏は絡み目について考察した [15]. このハッセ図は, どんな結び目のどんな射影図も交差交換 (交点の上下の情報を入れかえる) を行えば, 自明な結び目を表す射影図にできること, 非自明な結び目のどんな射影図も交差交換 (交点の上下の情報を入れかえる) を行えば, 3_1 を表す射影図にできることを意味している.

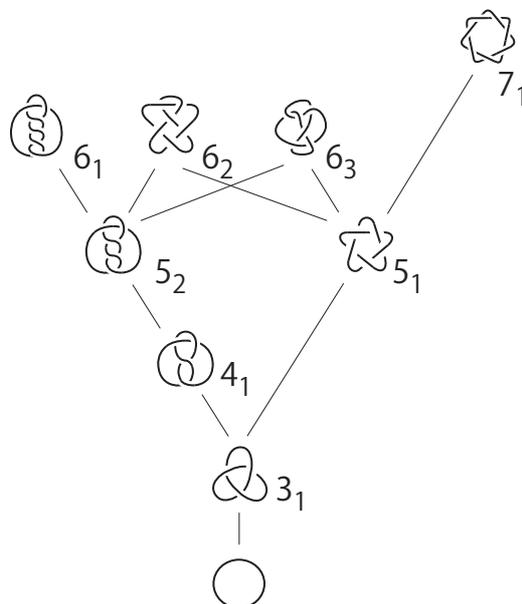


図 1:

結び目の不変量に関して, 次が成り立つ.

命題 2 [14] L_1, L_2 を μ 成分絡み目とする. $L_1 \leq L_2$ ならば,

$$c(L_1) \leq c(L_2), \quad br(L_1) \leq br(L_2), \quad b(L_1) \leq b(L_2)$$

が成り立つ. ここで, $c(L), br(L)$ と $b(L)$ は, 絡み目の最小交点数, 橋指数, 組紐指数である.

そして, この研究は, 正結び目の研究 [11] などに応用されている.

1.3 空間グラフの射影像の研究

空間グラフの射影像の研究に関しては盛んになされている．ここでは，準射影図の研究に大きな影響を与えた研究を紹介する．

射影像が自明〔trivial〕であるとは，射影像から得られるどの射影図も自明な空間グラフを表しているときをいう．逆に，射影像が非自明〔knotted〕である [16] とは，射影像から得られるどの射影図も非自明な空間グラフを表しているときをいう．任意の絡み目の射影図に対して，交差交換をすることで自明な絡み目を表す射影図が得られるので，いくつかの円周（結び目，絡み目）の射影像は非自明になることは決してない．しかし，グラフの射影像では非自明になることがあることを，谷山氏は示した [16]．例えば，正八面体グラフは非自明な射影像をもつ（図 2）．現在のところ，非自明な射影像をもつグラフの特徴づけは未解決である．

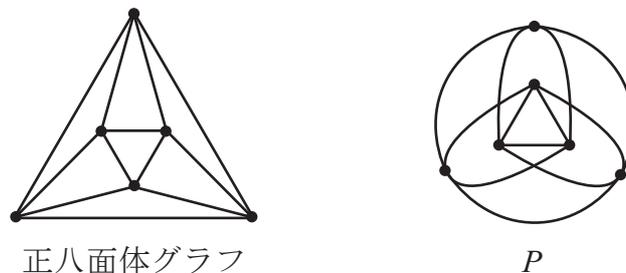


図 2: 正八面体グラフと非自明な射影像

さらに，次のような射影像の研究がなされている．Huh 氏と谷山氏は，ラベル付きのグラフとして射影像から得られるどの射影図も同値な空間グラフを表しているとき，射影像は特定可能〔identifiable〕であると定義し，考察を行った [7]．[9] では，特定可能な射影像は自明な射影像であることが示されている．一方，新國亮氏は，ラベル付きのグラフとして射影像から得られるどの射影図も互いに同値でない空間グラフを表しているとき，その射影像を完全区別可能〔completely distinguishable〕であると定義した [10]．例えば，図 2 の非自明な射影像は完全区別可能な射影像である．また，完全グラフなどは完全区別可能な射影像をもつことが示されているが，すべてのグラフが完全区別可能な射影像をもつかはわかっていない [10]．

1.4 準射影図の研究動機

はじめに，次の問題を考える．

問題 1 空間グラフ G とその射影像 P が与えられているとき， P だけを見て，元の空間グラフが自明であるか非自明であるか判定できるか？

答えは、特別な場合（射影像が自明であるか非自明である場合）を除いて、できない。それは、各前交点に上下どちらの情報が入るかわからないためである（図3）。



図 3: 射影像とそれから得られる射影図

そこで、次の問題を考え、準射影図の概念を導入する。

問題 2 空間グラフ G とその射影像 P が与えられているとき、どこの前交点の、どのような上下の情報かわかれば、その他の前交点の上下の情報に依らず、元の空間グラフが自明であるか非自明であるか判定できるか？

この研究を始める契機としては、DNA 結び目の研究もある。それは、DNA 結び目の実際の写真を見たとき、交点の上下がはっきりわかる部分とわからない部分が存在していたこと、交差交換の役割を果たす酵素（DNA トポイソメラーゼ）の存在が知られていることからである。

1.5 準射影図に関する定義

準射影図 [pseudo diagram] Q とは、一部の前交点に上下の情報を入れた射影像 P である。このとき、 Q は P から得られるという。準射影図 Q は交点と前交点をもつ。ここで、準射影図は交点をもたないこと、前交点をもたないことも許す。すなわち、準射影図は射影像や射影図であることも許す。準射影図 Q のいくつかの前交点に上下を入れると、他の（同じも許す）準射影図 Q' が得られる。このとき、 Q' は Q から得られるという。

準射影図 Q が自明 [trivial] であるとは、 Q から得られるすべての射影図が自明な空間グラフを表しているときをいう。逆に、準射影図 Q が非自明 [knotted] であるとは、 Q から得られるすべての射影図が非自明な空間グラフを表しているときをいう。図 4 で、(a) は自明な準射影図で、(b) は非自明な準射影図で、(c) は自明でも非自明でもない準射影図である。

次に、射影像 P に対して、どれだけ自明に近い非自明に近いかというような概念を定義する。

$$\text{tr}(P) := \min\{c(Q) \mid Q : P \text{ から得られる自明な準射影図}\}$$

とし、このとき、 $\text{tr}(P)$ を P の自明化数 [trivializing number] と呼ぶ。ここで、 $c(Q)$ は Q の交点の個数とする。逆に、

$$\text{kn}(P) := \min\{c(Q) \mid Q : P \text{ から得られる非自明な準射影図}\}$$

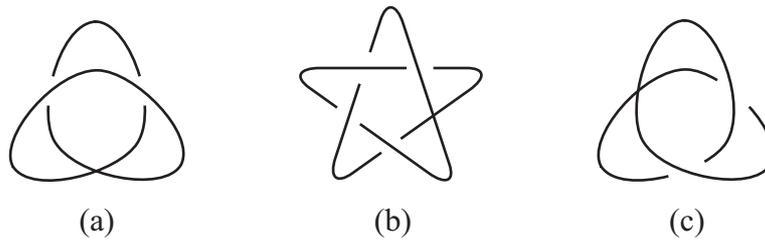


図 4: 準射影図

とし, $kn(P)$ を P の非自明化数 [knotting number] と呼ぶ. 例えば, 図 5 において, $tr(P_1) = 2, tr(P_2) = 2, tr(P_3) = 4$ で, $kn(P_1) = 3, kn(P_2) = 4, kn(P_3) = 4$ であることが確かめられる.

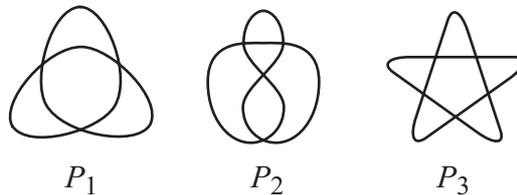


図 5: 自明化数と非自明化数

任意の平面的グラフ G に対して, $kn(P) = \infty$, すなわち, $tr(P) = 0$ となる G の射影像 P が存在する. 例えば, G から S^2 への埋め込みの像となる射影像が挙げられる. いくつかの円周の任意の射影像 P は非自明になることはないので, $tr(P) < \infty$ である. しかし, ある平面的グラフは非自明な射影像 P をもつ [16] ので, $tr(P) = \infty$, すなわち, $kn(P) = 0$ となることがある.

1.6 仮想結び目の準射影図の研究

Henrich 氏らは, 準射影図の概念を仮想結び目 [virtual knot] に拡張し, 研究を行っている [5]. さらに, 彼女らは, 結び目の自明化数と結び目解消数, 種数の関係についても言及している.

1.7 準射影図を用いたゲーム

Henrich 氏らは, 準射影図を用いたゲームを考案している [6].

2 射影像に関する得られた結果

一つの円周（結び目）の射影像に関する結果を中心に，得られた結果を紹介する．

2.1 基本的性質

P を一つの円周の射影像とする． S^2 上の単純閉曲線 S が P の分解円周〔decomposing circle〕であるとは， P と S との交わりがちょうど 2 つの横断的な二重点のみの集合のときをいう（図 6）．そして，次の命題が成り立つ．

命題 3 P を一つの円周の射影像とし， S を P の分解円周とする． $\{q_1, q_2\} = P \cap S$ とし， B_1 と B_2 を $B_1 \cup B_2 = S^2$ かつ $B_1 \cap B_2 = S$ となる円盤とする． l を q_1 と q_2 を結ぶ S 上の二つの弧の一つとする． $P_1 = (P \cap B_1) \cup l$ ， $P_2 = (P \cap B_2) \cup l$ とする．このとき， $\text{tr}(P) = \text{tr}(P_1) + \text{tr}(P_2)$ ， $\text{kn}(P) = \min\{\text{kn}(P_1), \text{kn}(P_2)\}$ が成り立つ．

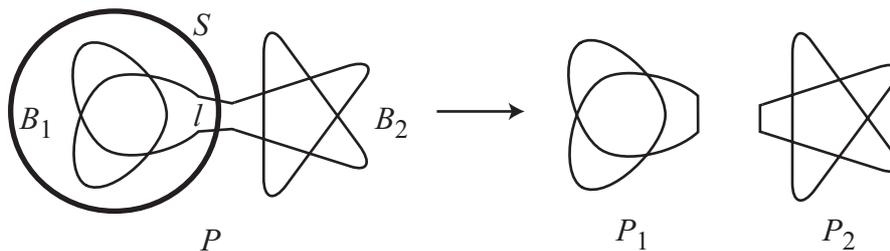


図 6: 分解円周

2.2 射影像の自明化数に関する結果

この節では，射影像の自明化数に関する結果を紹介する．

自明化数に関する定理や命題などと，結び目の射影像の自明化数を求めるコード図を使った方法を紹介する．次に，コード図とそれを用いて結び目の自明化数を求める方法を紹介する．

P を n 個の前交点をもった結び目の射影像する．このとき， CD_P が P のコード図であるとは， CD_P が各前交点の原像をコードによって結んだ n 個のコードをもつ円周のときをいう．例えば，図 7 の (a) の射影像のコード図は (b) である．

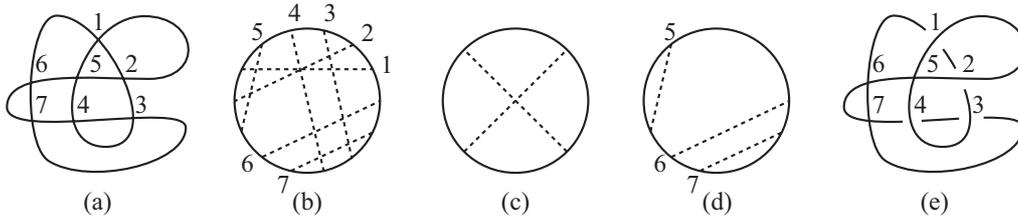


図 7: コード図から自明化数を求める, それを実現する自明な準射影図

定理 4 P を結び目の射影像とすると,

$$\text{tr}(P) = \min\{n \mid \text{ある } n \text{ 本のコードを } CD_P \text{ から削除すると, 部分コード図として図 7(c) のようなコード図を含まない}\}$$

さらに, $\text{tr}(P)$ は偶数である.

この定理から, 結び目の射影像に対して, コード図を用いて, 自明化数を求められることがわかる. 証明を考えると, それを実現する自明な準射影図を得る方法もわかる. 例えば, 図 7(a) の射影像を考えると, そのコード図は (b) である. このコード図からどのように 3 本以下のコードを除いても図 7(c) のようなコード図を含んでしまうが, 4 本のコードを除くと図 7(d) のようなコード図が得られる. したがって, $\text{tr}(P) = 4$ であることがわかり, 例えば, 図 7(e) はそれを実現する自明な準射影図である.

定理 5 P を結び目の射影像とする. このとき, $\text{tr}(P) = 2$ であるための必要十分条件は, P は図 8(a) の射影像から P の部分弧を図 8(b) のように置き換える操作を何回 (0 回も含む) かして得られることである.

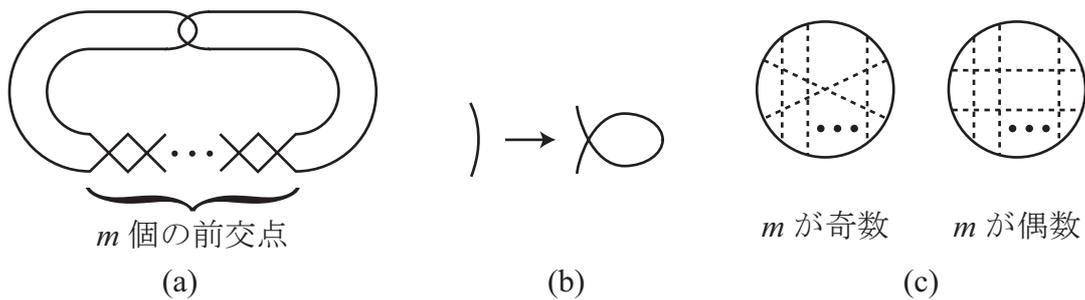


図 8: $\text{tr}(P) = 2$ となる結び目の射影像とそのコード図

定理 6 P を結び目の射影像とすると, $\text{tr}(P) \leq p(P) - 1$ が成り立つ. ここで, $p(P)$ は P の射影像の前交点の数である. また, 等号が成立するための必要十分条件は, P は図 9 のような射影像であることである.

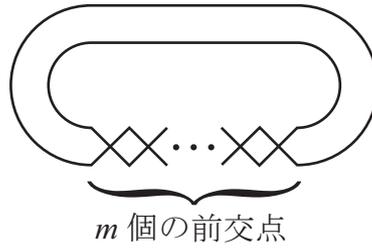


図 9:

定理 4 より, 次の系が得られる .

系 7 P をいくつかの円周の射影像とすると, $\text{tr}(P)$ は偶数である .

命題 8 G を平面的グラフ, P を G の射影像とすると, $\text{tr}(P) \neq 1$ である .

系は一般のグラフでは成り立たない . G を円周とシータ曲線との直和のグラフとすると, $\text{tr}(P) = 3$ となる G の射影像 P が存在する (図 10) . さらに, このグラフでは任意の自然数 $n \geq 2$ に対して, $\text{tr}(P) = n$ となる G の射影像 P が存在する .

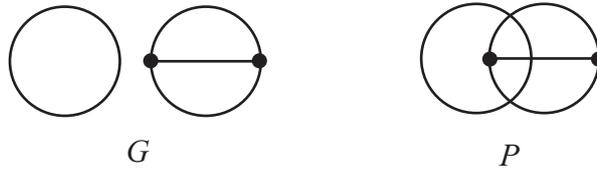


図 10:

3 結び目の自明化数とその応用

この章では, 結び目に対して自明化数を定義し, 得られた結果とその応用を紹介する .

3.1 結び目の自明化数の定義

D を射影図とし, P を D の交点の上下の情報をなくして得られる射影像とし, $\text{tr}(D) = \text{tr}(P)$ と定義する . 結び目 K に対しては,

$$\text{tr}(K) = \min\{\text{tr}(D) \mid \text{射影図 } D \text{ は } K \text{ を表す}\}$$

と定義する .

3.2 結び目の自明化数に関する結果

結び目の自明化数は、結び目の結び目解消数や種数と以下のような関係がある。

命題 9 [4, 5] K を結び目とすると、 $u(K) \leq \frac{\text{tr}(K)}{2}$ が成り立つ。ここで、 $u(K)$ は K の結び目解消数である。

定理 10 [5] K を結び目とすると、 $g(K) \leq \frac{\text{tr}(K)}{2}$ が成り立つ。ここで、 $g(K)$ は K の結び目の種数である。

ここで、定理 10 は、ザイフェルトのアルゴリズムから得られる正規な種数 [canonical genus] でも成り立つ。命題 9 と定理 10 を用いて下から評価を行い、最小交点数の射影図で自明化数を求めることで、10 交点以下の結び目の自明化数の表を作成した [4]。しかし、10 交点以下の結び目すべての自明化数は決定できていない。そして、次の命題を得た。

命題 11 [4] K を 10 交点以下の正結び目とすると、 $\text{tr}(K) = 2u(K)$ が成り立つ。さらに K のある正射影図は、 K の自明化数を実現する。

ここで、10 交点以下の正結び目は、42 個あることが知られている [8]。そして、次の予想をし、部分的な解答を得た。

予想 1 [4] K を正結び目とすると $\text{tr}(K) = 2u(K)$ が成り立ち、 K の任意の正射影図 D において $\text{tr}(D) = 2u(K)$ である。

定理 12 [4] K を正組紐結び目とすると、 $\text{tr}(K) = 2u(K)$ が成り立つ。さらに K の正組紐射影図は、 K の自明化数を実現する。

予想を解決することの難しさは、種数の低い正結び目に対しては、結び目解消数を評価できないことにある。定理 12 の証明ではラスムッセン不変量 [12] または中村拓司氏の定理 [8] を用いて結び目解消数を評価することができるが、種数の低い正結び目は、この定理ではうまくいかない。例えば、 7_4 は種数が 1 で結び目解消数が 2 であり、これらの結果では結び目解消数を決定することができない。

すべての結び目は、最小交点射影図で自明化数を実現するかという問題 [5] に対しては、否定的な解答を得た。

命題 13 [4] 11_{550} は最小交点射影図で自明化数を実現せず、12 交点の正射影図で自明化数を実現する。

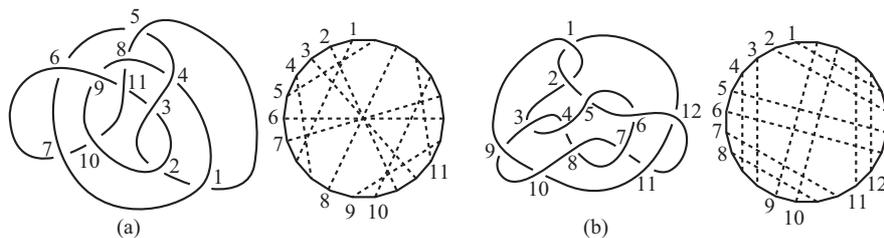


図 11: 11_{550} の最小交点射影図と自明化数を実現する正射影図

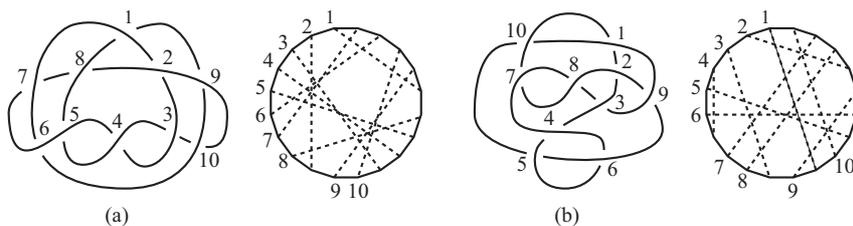


図 12: ペルコ対

この正結び目 11_{550} は最小交点射影図として図 11(a) しかもたず、最小交点数で正射影図をもたないこと、そして、12 交点で正射影図をもつことが [13] で知られている。

また、異なる自明化数の最小交点射影図をもつ結び目も存在する。例えば、 10_{161} を表すペルコ対 [Perko's pair] は正射影図でない図 12(a) は自明化数が 8 で、正射影図である 12(b) は自明化数が 6 でこの結び目の自明化数を実現している。

射影像の結果を用いることで、次の定理を得た。

定理 14 [4] K を非自明な結び目とすると、 $2 \leq \text{tr}(K) \leq c(K) - 1$ が成り立つ。ここで、 $c(K)$ は結び目 K の最小交点数である。等号が成立のための必要十分条件は、 K が $(2, p)$ トーラス結び目であることである。ここで、 p は奇整数である。

定理 15 [4] $\text{tr}(K) = 2$ であるための必要十分条件は、 K がツイスト結び目であることである。

3.3 結び目の半順序への応用

命題 2 と同様の命題が自明化数で成り立つ。

命題 16 [3, 4] K_1, K_2 を結び目とする。 $K_1 \leq K_2$ ならば、

$$\text{tr}(K_1) \leq \text{tr}(K_2)$$

が成り立つ。

3.4 結び目解消数の研究への応用

結び目理論において，次の命題が成り立つことがよく知られている．

命題 17 D を絡み目の射影図とすると， $u(D) \leq \frac{c(D)}{2}$ が成り立ち， D' を交点をもつ結び目の射影図とすると， $u(D') \leq \frac{c(D') - 1}{2}$ が成り立つ．また， L を絡み目とすると， $u(L) \leq \frac{c(L)}{2}$ が成り立ち， K を非自明な結び目とすると， $u(K) \leq \frac{c(K) - 1}{2}$ が成り立つ．

谷山氏は，[17] で，上の等号が成立する場合の射影図と結び目，絡み目の特徴づけを行った． $u(D') = \frac{c(D') - 1}{2}$ が成り立つための必要十分条件は， D' が図 13 のような $(2, r)$ トーラス結び目の射影図の一つであることを示した．定理 6 と命題 9 を用いると，この十分条件の別証明を与えることができる [3] ．

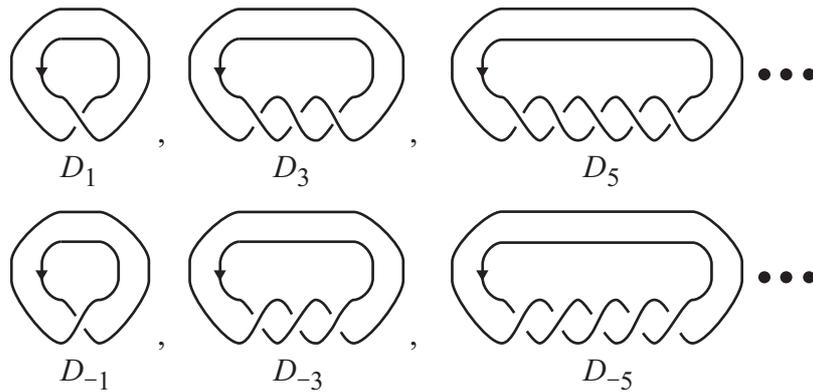


図 13: $u(D') = \frac{c(D') - 1}{2}$ である結び目の射影図 D'

次の補題と命題 9 を用いることで， $u(D) = \frac{c(D) - 2}{2}$ を満たす射影図の特徴づけを行った．

補題 18 [1] P を一つの円周の射影像とすると， $\text{tr}(P) = p(P) - 2$ であるための必要十分条件は， P は 3 本の組紐射影図の射影像であるまたは $(2, r)$ トーラス結び目射影図と $(2, s)$ トーラス結び目射影図の連結和の射影像であることである．

定理 19 [1] D を既約な結び目の射影図とする． $u(D) = \frac{c(D) - 2}{2}$ であるための必要十分条件は， D は図 14 の (a) のような 8 の字結び目の射影図，(b) のような 3 本の正組紐射影図，それらの鏡射影図，または $(2, r)$ トーラス結び目射影図と $(2, s)$ トーラス結び目射影図の連結和であるか，それらのことである．ここで r, s は奇数で $r, s \neq \pm 1$ である．

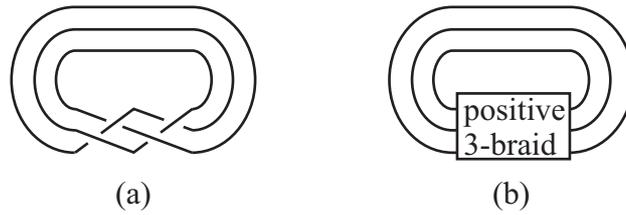


図 14:

参考文献

- [1] T. Abe, R. Hanaki, R. Higa, *The unknotting number and band-unknotting number of a knot*, Osaka J. Math, to appear.
- [2] R. Hanaki, *Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs*, Osaka J. Math **47** (2010), 863–883.
- [3] R. Hanaki, *Notes on regular projections of knots*, Bull. Nara Univ. Ed. Natur. Sci. **59** (2010), no.2, 7–13..
- [4] R. Hanaki, *Trivializing number of knots*, preprint.
- [5] A. Henrich, N. Macnaughton, S. Narayan, O. Pechenik and J. Townsend, *Classical and virtual pseudodiagram theory and new bounds on unknotting numbers and genus*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), 625–650.
- [6] A. Henrich, N. MacNaughton, S. Narayan, O. Pechenik, R. Silversmith and J. Townsend, *A Midsummer Knot’s Dream*, preprint, arXiv:math.GT/1003.4494.
- [7] Y. Huh, K. Taniyama: *Identifiable projections of spatial graphs*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), 991–998.
- [8] T. Nakamura, *Four-genus and unknotting number of positive knots and links*, Osaka J. Math. **37** (2000), 441–451.
- [9] R. Nikkuni: *A remark on the identifiable projections of planar graphs*, Kobe J. Math. **22** (2005), 65–70.
- [10] R. Nikkuni: *Completely distinguishable projections of spatial graphs*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), 11–19.
- [11] J.H. Przytycki and K. Taniyama, *Almost positive links have negative signature*, J. Knot Theory Ramifications, **19**, (2010) 187–289.
- [12] J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, to appear in Invent. Math.
- [13] A. Stoimenow, *On the crossing number of positive knots and braids and braid index criteria of Jones and Morton-Williams-Franks*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 3927–3954.
- [14] K. Taniyama: *A partial order of knots*, Tokyo J. Math. **12** (1989), 205–229.
- [15] K. Taniyama: *A partial order of links*, Tokyo J. Math. **12** (1989), 475–484.
- [16] K. Taniyama: *Knotted projections of planar graphs*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3357–3579.
- [17] K. Taniyama: *Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded*, J. Knot Theory Ramifications, **18** (2009), 1049–1063.