結び目の自明化数

花木 良（奈良教育大学教育学部）

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の向きのついた結び目を考えます．結び目の**射影像〔projection〕**とは，$\mathbb{R}^2$ へ自然に射影したときの像であり，射影像の多重点は横断的な二重点のみであるとします．**射影図〔diagram〕**とは，それらすべての二重点に上下の情報が入ったものであり，結び目を一意的に表しています．射影像からは 2 の二重点個乗の射影図が考えられるため，一般には射影像から元の結び目が自明であるか非自明であるかを読み取ることはできません．そこで，筆者は，[2] において，射影像の一部の二重点に上下の情報を入れたものを**準射影図〔pseudo diagram〕**と定義し，残っている二重点にどう上下の情報を入れても自明な結び目を表す射影図しか得られない準射影図を**自明**と定義しました．図 1 の準射影図からは，2 つの自明な結び目を表す射影図が得られるので，自明です．射影像 P に対して，最小で何個の二重点の，どのような上下の情報がわかれば（どの二重点をうまく交点に変えれば），自明な準射影図が得られるかを考え，その最小の交点数を射影像の**自明化数〔trivializing number〕**と定義し，$\mathrm{tr}(P)$ と表します．図 1 の射影像のどの 1 つの二重点にどう上下の情報を入れても残りの 2 つの二重点にうまく上下の情報を入れて非自明な結び目を表す射影図を得ることができる．また，図 1 の 2 つの交点をもつ自明な準射影図をもつので，これの自明化数は 2 であることがわかります．[2] において，射影像の自明化数を求める方法を得，自明化数は常に偶数であることを示しました．

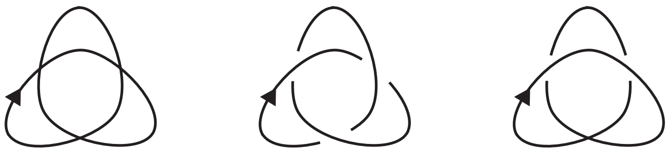

図 1: 射影像，射影図，準射影図

D を射影図とし，P を D の交点の上下の情報をなくして得られる射影像とし，$\mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(P)$ と定義します．結び目 K に対しては，

$$\mathrm{tr}(K) = \min\{\mathrm{tr}(D) \mid \text{射影図 } D \text{ は } K \text{ を表す}\}$$

と定義します．すると，結び目の自明化数は，結び目のよく知られた不変量と以下のような関係があります．

命題 1 [1, 3] K を結び目とすると，$u(K) \leq \dfrac{\mathrm{tr}(K)}{2}$ が成り立つ．ここで，$u(K)$ は K の結び目解消数である．

定理 2 [3] K を結び目とすると，$g(K) \leq \dfrac{\mathrm{tr}(K)}{2}$ が成り立つ．ここで，$g(K)$ は K の結び目の種数である．

命題 1 と定理 2 を用いて下から評価を行い，最小交点数の射影像で自明化数を求めることで，10 交点以下の自明化数を求め，次の命題を得ました．

命題 3 [1] K を 10 交点以下の正結び目とすると，$\mathrm{tr}(K) = 2u(K)$ が成り立つ．さらに K の正射影図は，K の自明化数を実現する．

そして，次の予想をし，部分的な解答を得ました．

予想 1 K を正結び目とすると $\mathrm{tr}(K) = 2u(K)$ が成り立ち，K の任意の正射影図 D において $\mathrm{tr}(D) = 2u(K)$ である．

定理 4 [1] K を正組紐結び目とすると，$\mathrm{tr}(K) = 2u(K)$ が成り立つ．さらに K の正組紐射影図は，K の自明化数を実現する．

すべての結び目は，最小交点数の射影図で自明化数を実現するかという問題に対しては，否定的な解答が得られています．正結び目 11_{550} は最小交点数の正射影図をもたないことが [4] で知られています．そして，11_{550} は最小交点数で自明化数を実現せず，12 交点の正射影図で自明化数を実現することがわかりました．射影像の結果を用いることで，次の定理を得ました．

定理 5 [1] K を非自明な結び目とすると，$2 \leq \mathrm{tr}(K) \leq c(K) - 1$ が成り立つ．ここで，$c(K)$ は結び目 K の最小交点数である．等号が成立のための必要十分条件は，K が $(2, p)$ トーラス結び目であることである．ここで，p は奇整数である．

定理 6 [1] $\mathrm{tr}(K) = 2$ であるための必要十分条件は，K がツイスト結び目であることである．

参考文献

[1] R. Hanaki, *Trivializing number of knots*, preprint.

[2] R. Hanaki, *Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs*, Osaka J. Math **47** (2010), 863–883.

[3] A. Henrich, N. Macnaugton, S. Narayan, O. Pechenik and J. Townsend, *Classical and virtual pseudodiagram theory and new bounds on unknotting numbers and genus*, preprint, arXiv:math.GT/0908.1981v2.

[4] A. Stoimenow, *On the crossing number of positive knots and braids and braid index criteria of Jones and Morton-Williams-Franks*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 3927–3954.