第 43 回数学教育論文発表会論文集
論文発表の部

算数・数学への離散グラフの活用

花木 良
奈良教育大学教育学部

離散グラフ（グラフ）とは，頂点と呼ばれる点と，それら頂点を結ぶ辺と呼ばれる線で構成される図をいう．グラフは，与えられた情報をビジュアル化するために用いられたり，図形とみて位相的観点から考察するときに用いられたりする．グラフは高等学校の新学習指導要領「数学活用」では社会生活における数理的な考察や数学的な表現の工夫として，取りあげられている．本論文では，新学習指導要領の内容においてグラフを活用することを提案する．具体的には，多面体，場合の数に関する話題を紹介する．グラフで表現することで統合的にみる力を養えたり子どもたちの理解を助長することができたりこと，図を描いて帰納的推論を行うなどの算数・数学的活動を行えること，グラフを用いることで空間図形（多面体）の見方が豊かになることを示す.

キーワード：展開図，多面体公式，場合の数，離散グラフ

1．はじめに

離散グラフ（グラフ）とは，頂点と呼ばれる点と，それら頂点を結ぶ辺と呼ばれる線で構成される図をいう．例えば，路線図は駅を頂点，路線を辺とするグラフであると考えられる．図 1 はグラフで，例えば，A, B, C, D, E, F という 6 人を頂点で表し，知り合い同士であるときに辺で結んだ人間関係を表したグラフと考えられる．グラフは定義が単純なことからもわかるように，汎用性がとても高く，いろいろな事象を図として表現することができる．グラフは，与えられた情報をビジュ

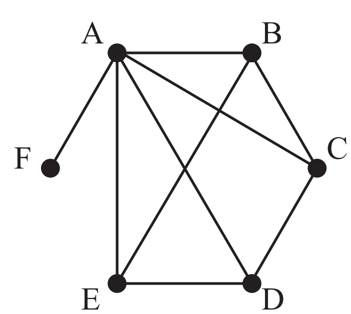

図 1　離散グラフ

アル化するために用いられたり，図形とみて位相的観点から考察するときに用いられたりする．グラフは，離散数学，特にグラフ理論に属するものである．グラフ理論の起源はオイラーの一筆がき問題とされている．ただし，そのオイラーの論文の中にはグラフと呼べる図は存在しない．グラフ理論は離散数学の中心分野であり，コンピュータサイエンスとも関係が深いことから，近年盛んに研究が行われたり，大学の情報系の学科では学ばれることがよくある．

高等学校の新学習指導要領「数学活用」に関して，次のようなことが挙げられている．目標にある「事象を数理的に考察する能力を高め,数学を積極的に活用する態度を育てる」に関して，『例えば，「(2) 社会生活における数理的な考察」では，イベント会場の順路や総当り戦の試合進行，最短経路の探索などを考える際に，それらを，頂点と辺で構成される離散グラフに表し，能率的に処理したり，事象の様子を的確に伝えたりすることで，事象を数理的に考察する能力を高め，数学を積極的に活用する態度を育成する。』と書かれている．そして，「数学的な表現の工夫」として，離散グラフを活用することを挙げている．この分野の研究は，鈴木（1998），河野（2000），長尾・景山・長崎（2006），生野・花木（2007），西村（2007），花木（2008）などがある．

本論文では，新学習指導要領の内容においてグラフを活用することを提案する．具体的には，多面体，場合の数に関する話題を紹介する．グラフで表現することで統合的にみる力を養えたり子どもたちの理解を助長することができたりこと，図を描いて帰納的推論を行うなどの算数・数学的活動を行えること，グラフを用いることで空間図形（多面体）の見方が豊かになることを示す．

２．グラフの活用例

(1) 多面体におけるグラフの活用

多面体に対してグラフを用いる例を紹介する．花木（2009）にも同様の提案がある．関係する内容は，小学校第 2 学年「箱の形をしたものについて知ること」, 第 4 学年「立方体」第 5 学年「角柱，円柱」，中学校第 1 学年及び高等学校数学 A「空間図形」が挙げられる．

多面体の各面に名前を付け，面の形をした頂点と考え，それらの面が辺を共有しているとき対応する辺を辺で結び, グラフを作る（図 2）．ここでは，このグラフを面の関係図と呼ぶ．面の関係図から，頂点から出ている辺の数が辺を共有している面の数や面の形を表していること，グラフの辺で囲まれている領域が多面体の頂点に対応していて，領域が囲まれている辺の数はその頂点に集まっている面の数を表していること，向かい合う平行な面は辺で結ばれていないこと，グラフの辺の数は多面体の辺の数と等しいことを読み取らせたい．また，面の関係図を用いると，立方体と直方体は面の繋がり方は同じであることもわかる．

これを展開図の指導に用いると，次の 4 つの利点がある花木（2009）．

1. 展開図の組み立て方がわかる
2. 複雑な多面体の展開図もつくれるようになる
3. 展開図の重要な構造がわかる
4. 必要なのりしろの数がわかる

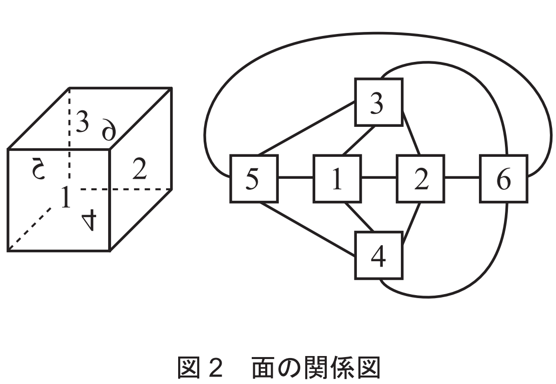

図 2　面の関係図

(2) 場合の数におけるグラフの活用

事象をグラフで表し，グラフの辺の数を数えたり頂点から出ている辺の数を数えたりすることで場合の数を求めることができることを紹介する．関係する内容は，小学校第 6 学年「起こり得る場合」, 中学校第 2 学年「確率」, 高等学校数学 A「場合の数と確率」が挙げられる．

小学校第 6 学年の教科書にあるような問題，四つのチームの総当たりの対戦の組合せを考えるとき，チームを頂点とし試合を辺で表すことで図 3 左のようなグラフが得られ，辺の数を数えることで組合せの数がわかる．このことは，グラフとは明記されていないが，小学校学習指導要領解説 算数編 p.182 にも記載されている．次に，「四人の中から掃除当番を二人決めるとき，考えられる組合せは何通りであるか.」という問を発問し，グラフに表すことで，同じ問題として見られるというような統合的な見方ができるようにしたい．また，頂点から出ている辺の数（頂点の次数）は，その人の試合数を表していることを読ませたり, それらの総和（次数の総和）は試合数（辺の数）の 2 倍になっていることをいろいろグラフを描き帰納的に考えることで発見させたりしたい.

このようにして試合の組合せはグラフで表せることがわかる．発展的な問題として，さまざまな試合の組合せを考えさせ，「どの組合せにおいても試合数が奇数になる人は偶数人にいること」を帰納的に発見させ，そのことの説明を考えさせたい．これは，小学校第 5 学年で学習する「偶数・奇数」の応用になる．

この考えを面の関係図に利用すれば，多面体には必ず奇数角形が偶数個存在することもわかる．これについては，具体的に五個の三角形で構成される多面体が存在しないことを体験させ，理解を促進させたい.

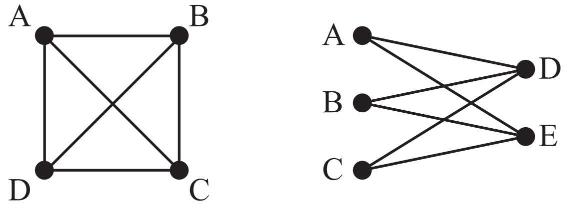

図 3　組合せのグラフ

試合の組合せをグラフで表すことで，試合の日程を効率的に組むこともできる．頂点から出ている辺は異なる色になるように辺に彩色することで, 試合の日程を組むこともでき，彩色する色の数を少なくすることで効率的な日程を得られる.

グラフ理論において，グラフの辺に彩色するときの最小の色の数は，そのグラフの頂点から出ている最大の辺の数であるかその本数プラス 1 であることが知られている．また n チームあり 1 日 1 試合までできるときの総当たりにかかる最小の日数は，n が偶数のとき $n-1$ であり，n が奇数のとき n であることが知られている．例えば, 鈴木 (1992) を参照.

中学校第 2 学年の教科書にあるような問題，「A, B, C の 3 人の女子と，D, E の 2 人の男子がいます．女子のなかから 1 人，男子のなかから 1 人選んで，テニスのダブルスのペアをつくります．①　できるペアをすべてあげなさい　②　A と E がペアになる確率を求めなさい」という問は，人を頂点とし，ペアを組める人同士を辺で結ぶことで，図 3 の右のグラフが得られる．①は辺の数, ②は (A と E を結ぶ辺の数) ／ (グラフの辺の数) を求めればよいことになる.

同様にして，大小 2 つのサイコロを投げるときや硬貨の表裏の起こり得る場合のグラフを描くことができる（図 4).

4 本のくじがあり, A, B の 2 人がこの順に, ひいたくじを元に戻さず，1 本ずつくじをひくときの起こり得る場合をグラフで表すと, 図 5 のようになり，辺の数は場合の数を表している.

次に，これらの問題を 2 から 3 に拡張したものを考える．3 つのサイコロをふる場合 V, 3 人がくじをひく場合を考える．大中小 3 つ

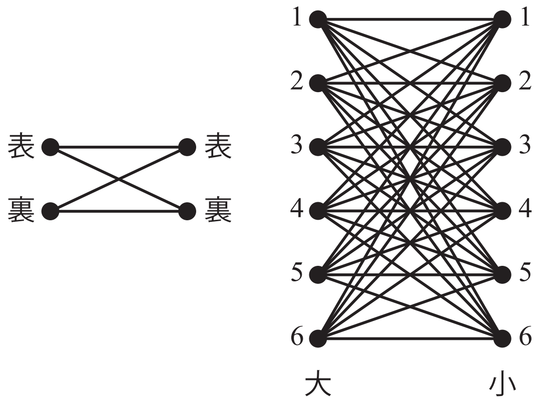

図 4　硬貨の表裏とサイコロ

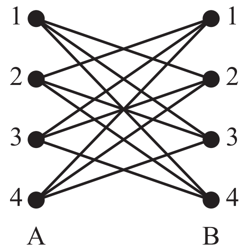

図 5　くじ引きの問題

のサイコロを投げる場合は，図 6 のようなグラフで，大の頂点から小の頂点へ辺をたどっていく方法が何通りあるかを数える問題になる．

4 本のくじを 3 人（A, B, C）が順にひく場合の数をグラフで表そうとすると，図 7 のグラフが思い浮かぶが，このグラフではうまく表現できていないことがわかる．このグラフで A の頂点から C 頂点へ辺をたどっていく方法が何通りあるかを数えると，1 → 2 → 1

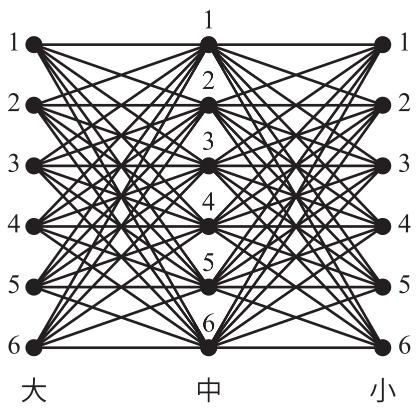

図 6

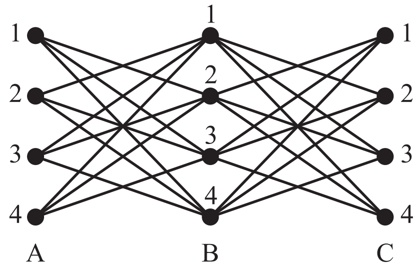

図 7

という 1 というくじを 2 回ひく場合を数えてしまうことになるからである．

このように 2 つの場合ではうまくいっても，3 つになるとうまくいかない場合があり，グラフは万能というわけではない．

(3) 多面体におけるグラフの活用 2

ここでは，グラフ理論で最も有名な公式の一つであるオイラーの多面体公式の応用に関する話題を紹介する．

オイラーの多面体公式とは，平面に辺の交差なく描かれたグラフ（平面グラフ）や多面体において，

(頂点の数) − (辺の数) + (面の数) = 2

が成り立つというものである．多面体は平面に辺の交差なく描かれたグラフに対応させることができる．例えば，この対応は多面体の面を一つ取り除いて，位相的に（伸縮）変形し，平面に描く方法が知られている（図 8）．このとき，平面グラフにおいて一番外に無限に広がる面も面を扱う．この面は取り除いた

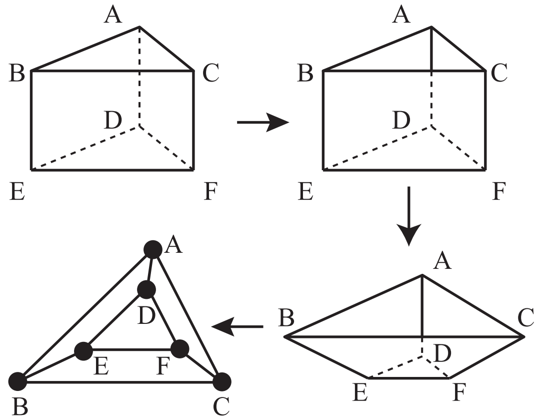

図 8　多面体から平面グラフへの対応

面と対応している．これにより，頂点と辺と面の関係や数，多面体の面が何角形であるかという情報は完全に平面グラフに移される．そして，オイラーの多面体公式の証明は，平面グラフにおいて辺の数に関する数学的帰納法を用いて行われるものが初等的である．

高等学校の新学習指導要領では，数学Aの空間図形において，『多面体に関する基本的な性質としては，オイラーの定理を用いて正多面体が5種類しかないことを扱うことなどが考えられる。』としている．しかし，これはユークリッド原論にあるように一つの頂点に集まる面の角度の総和を考えれば示すことが容易にできる．ここでは，次の2つの問題に応用があることを挙げ，教材として提案する．

問題1　5つの都市があり，それらの各2つの都市を直接結ぶ高速道路を建設したい．このとき，立体交差を作ることなく，建設することは可能か．

問題1が不可能であることを示すために平面グラフの性質を調べさせる．

平面に n 個（$n \geqq 3$）の頂点を置き，自分自身を結ぶ辺や同じ頂点の組を結ぶ辺が2本以上にならないように，辺の交差なく辺をなるべく多く加えていくと，最大何本まで辺を描き加えられるかを考えさせる．これは頂点の数が3, 4, 5, 6個までで辺の数を数え，帰納的に考察することで，以下の関係が導き出せると考える．

辺の数＝3×(頂点の数)－6

さらに，このとき各面は3本の辺で囲まれていることも体験的にわかり，これは証明に繋がる．これを形式化すると，次の定理が得られる．

定理1　頂点数が3個以上の平面グラフを考える．そのグラフの頂点の数を p，辺の数を q，面の数を r とすると，次が成り立つ．

$$q \leqq 3p - 6$$

証明．どの面も少なくとも3本の辺をもっており，どの辺も2つの面と接しているので，

$$3r \geqq 2q \quad \Leftrightarrow \quad r \geqq (2/3)q$$

となり，これをオイラーの多面体公式に代入すると，

$$p - q + (2/3)q \geqq 2 \quad \Leftrightarrow \quad q \leqq 3p - 6 \quad ■$$

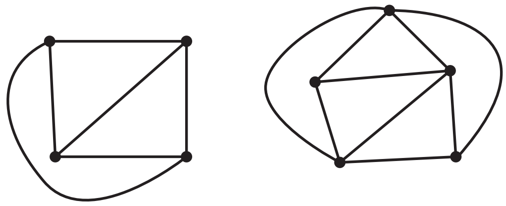

図9　なるべく辺を加えると

これを活用すると，問題1が解ける．必要な高速道路の本数は ${}_5C_2 = 10$ 本である．したがって，問題は「5個の頂点と10本の辺をもつ平面グラフを描くことができるか」という問題に帰着され，この値は不等式を満たさないので，平面に描くことができないことがわかる．ここで，この不等式は平面に描くための必要条件であって十分条件にはなっていないことに注意が必要である．

問題2　10個の5角形のみで構成される多面体が存在するか．

問題2の解答を導くためには，次の定理が必要である．この定理を見出しすのは難しいであろう．そこで，この定理を読むことで，問題2の解答を考えさせたい．

定理2　4個以上の頂点をもち各頂点からは辺が3本以上出ている平面グラフに対して，頂点の数を p，辺の数を q，面の数を r とする p_i を頂点から i 本の辺が出ている頂点の数とすると，次が成り立つ．

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 \geqq 12 + p_7 + 2p_8 + 3p_9 + 4p_{10} + \cdots$$

証明．頂点数の関係から，

$$p = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + \cdots$$

辺の数と次数の関係から，

$$2q = 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + \cdots$$

定理 1 より

$q \leqq 3p - 6 \quad \Rightarrow \quad 2q \leqq 6p - 12$

である．この式に上の 2 式を代入すると，

$3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + \cdots$
$\leqq 6(p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + \cdots) - 12$

この式を整理すると，

$3p_3 + 2p_4 + p_5$
$\geqq 12 + p_7 + 2p_8 + 3p_9 + 4p_{10} + \cdots$ ■

この式を読ませ，問題の解決を図りたい．多面体の面の関係図は平面グラフであり，その頂点から出ている辺の数はその面が何角形であるかを表している．したがって，10 個の 5 角形で構成される多面体は存在するとすると，頂点から辺が 5 本出ている 10 個の頂点で構成される平面グラフが存在することになり, これは定理 2 に矛盾する．このように，定理 2 は多面体における面の形の制約と考えることができる．実は，面の関係図は多面体の平面グラフの双対なグラフになっている．双対なグラフ（多面体）とは, 各面（の重心）に頂点をとり，面が辺を共有しているときに限りそれらの頂点を結び，できる新たな多面体をいう（図 10）．正六面体は正八面体の双対であり, 正八面体は正六面体の双対である．一般に，双対の双対は元の多面体に相似である．さらに，正十二面体と正二十面体も双対の関係である．双対な正多面体は同じ数の展開図をもつことが知られていて，それを教材化したものとしては，坪田（2006）がある．定理 2 から，次のことがいえることも読み取らせたい．

1. 多面体には必ず三角形，四角形，五角形のいずれかの面が存在する（六角形だけでできている多面体は存在しない）
2. 四角形だけでできている多面体は，面の数が 6 個以上ある
3. 五角形だけでできている多面体は，面の数が 12 個以上ある

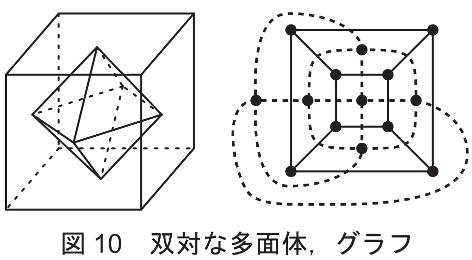

図 10　双対な多面体，グラフ

3．おわりに

今後は実践研究を行い，上記の教材を洗練させたり効果を明らかにしたりしていきたい．

参考文献

河野 芳文（2000），「グラフ理論入門－一筆がきとオイラーの定理－」，広島大学附属中・高等学校研究紀要 第 46 号，pp. 31-37

生野隆，花木良（2007）「一筆がき問題に関する教材研究～中学・高等学校向け離散グラフ教材～」第 40 回数学教育論文発表会論文集 pp.277-282

杉山吉茂，俣野博ほか（2006），新しい数学 2，東京書籍

鈴木晋一（1998）「幾何教材としてのグラフ理論」早稲田大学数学教育学会誌 1998 第 16 巻 第 1 号，pp.6-43

鈴木晋一（1992）『グラフ理論入門』，サイエンス社

花木良 (2008)「一筆がき問題に関する教材について」第 41 回数学教育論文発表会論文集，pp.225-230

花木良（2009），「多面体の展開図におけるグラフの活用について」，2009 年度数学教育学会 秋季例会発表論文集 pp.91-93.

坪田耕三（2006）『坪田式算数授業シリーズ③ オープンエンド』，教育出版

長尾篤志・景山三平・長崎栄三編（2006）『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』国立教育政策研究所科研研究成果報告書

西村圭一（2007）「中等教育における離散グラフを用いた数学的モデル化に関する研究」日本数学教育学会誌『数学教育』第 89 巻第 3 号，pp.8-16

文部科学省（2009），高等学校学習指導要領解説 数学，http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/1282000.htm

文部科学省（2008），中学校学習指導要領解説 数学編，教育出版

文部科学省（2008），小学校学習指導要領解説 算数編，東洋館