

# 結び目の自明化数について

花木 良\*

奈良教育大学教育学部

## 概要

本研究の目的は、射影像から結び目、絡み目及び空間グラフの自明性及び非自明性を調べることです。そこで、一部の二重点に上下の情報を与えた射影像を準射影図と名づけ、得られた結果を紹介します。

## 1 はじめに

自明化数は、射影像に対して、準射影図という概念を通して定義されるものです。この章では、射影像に対する自明化数の定義とわかっている結果を紹介します。

### 1.1 定義

3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内にある有向な結び目〔oriented knot〕を  $K$  を考えます。

自然な射影  $p$  とは、 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x, y)$  である写像をいい、 $p$  が絡み目  $L$  の射影〔projection〕であるとは、 $p|_L$  の多重点が横断的な二重点のみをときをいう（図1）。このとき、この像を射影像という。

射影図〔diagram〕 $D$  とは、各二重点に上下の情報を与えた射影像  $P$  をいいます。このとき、 $D$  は  $P$  から得られたといい、射影図は一意的に結び目を表現しています。このとき、 $P$  は  $D$  の射影像〔the projection of a diagram  $D$ 〕であるといえます。また、上下の情報の入った二重点を交点〔crossing〕と呼び、上下の情報の入っていない二重点を前交点〔pre-crossing〕と呼びます。射影図は交点をもつが、前交点をもちません。

---

\*hanaki@nara-edu.ac.jp

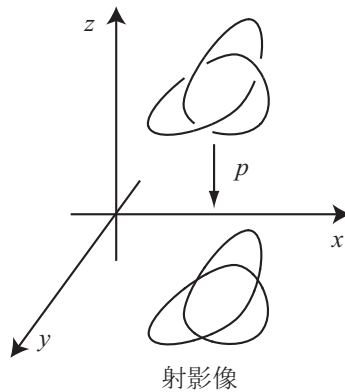


図 1: 結び目の射影像

## 1.2 準射影図の研究動機

次の問題を考えます。

問題 1 結び目の射影像  $P$  が与えられたとき,  $P$  だけを見て, 元の結び目が自明であるか非自明であるか判定できるか?

答えは, 特別な場合を除いて, できません. それは, 各前交点に上下どちらの情報が入るかわからないためです (図 2).



図 2: 射影像とそれから得られる射影図

そこで, 次の問題を考え, 準射影図の概念を導入しました [2].

問題 2 結び目の射影像  $P$  が与えられているとき, どの前交点の, どのような上下の情報かわかれば, その他の前交点の上下の情報に依らず, 元の結び目が自明であるか非自明であるか判定できるか?

## 1.3 準射影図に関する定義

準射影図 [pseudo diagram]  $Q$  とは, 一部の前交点に上下の情報を入れた射影像  $P$  です. このとき,  $Q$  は  $P$  から得られるといいます. 準射影図  $Q$  は交点と前交点をもちます. ここで, 準射影図は交点をもたないこと, 前交点をもたないことも許します. すなわち, 準射影図は射影像や射影図であることも許します. 準射影図  $Q$  のいくつかの前交点に上下を入れると, 他の (同じも許す) 準射影図  $Q'$  が得られます. このとき,  $Q'$  は  $Q$  から得られるといいます.

準射影図  $Q$  が自明 [trivial] であるとは,  $Q$  から得られるすべての射影図が自明な空間グラフを表しているときをいいます. 逆に, 準射影図  $Q$  が非自明 [knotted] であるとは,  $Q$  から得られるすべての射影図が非自明な空間グラフを表しているときをいいます. 図 3 で, (a) は自明な準射影図で, (b) は非自明な準射影図で, (c) は自明でも非自明でもない準射影図です.

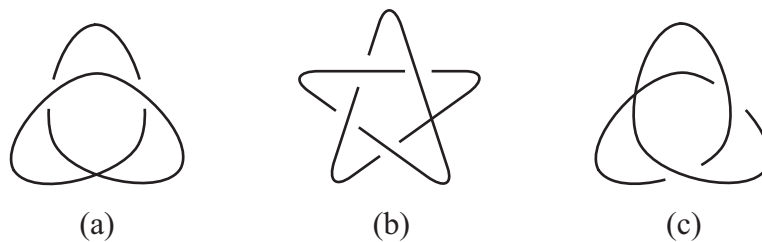


図 3: 準射影図

次に, 射影像  $P$  に対して, どれだけ自明に近い非自明に近いかというような概念を定義します.  $\text{tr}(P) := \min\{c(Q) \mid Q : P \text{ から得られる自明な準射影図}\}$  とし, このとき,  $\text{tr}(P)$  を  $P$  の自明化数 [trivializing number] と呼びます. ここで,  $c(Q)$  は  $Q$  の交点の数とします. いくつかの円周の任意の射影像  $P$  は  $\text{tr}(P) < \infty$  です (このことは任意の絡み目の射影図に対して, 交差交換をすることで自明な絡み目を表す射影図が得られることからわかります). 逆に,  $\text{kn}(P) := \min\{c(Q) \mid Q : P \text{ から得られる非自明な準射影図}\}$  とし,  $\text{kn}(P)$  を  $P$  の非自明化数 [knotting number] と呼びます. 例えば, 図 4 において,  $\text{tr}(P_1) = 2, \text{tr}(P_2) = 2, \text{tr}(P_3) = 4$  で,  $\text{kn}(P_1) = 3, \text{kn}(P_2) = 4, \text{kn}(P_3) = 4$  です.

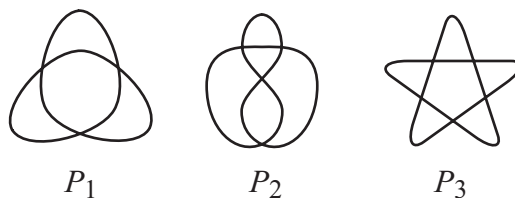


図 4: 自明化数と非自明化数

## 1.4 結び目の射影像の自明化数

結び目の射影像に関する結果を中心に, 得られた結果を紹介します.

## 1.5 基本的性質

$P$  を結び目の射影像とします.  $S^2$  上の単純閉曲線  $S$  が  $P$  の分解円周 [decomposing circle] であるとは,  $P$  と  $S$  との交わりがちょうど 2 つの横断的な二重

点のみの集合のときをいいます (図 5) . そして , 次の命題が成り立ちます .

命題 1  $P$  を結び目の射影像とし ,  $S$  を  $P$  の分解円周とする .  $\{q_1, q_2\} = P \cap S$  とし ,  $B_1$  と  $B_2$  を  $B_1 \cup B_2 = S^2$  かつ  $B_1 \cap B_2 = S$  となる円盤とする .  $l$  を  $q_1$  と  $q_2$  を結ぶ  $S$  上の二つの弧の一つとする .  $P_1 = (P \cap B_1) \cup l$  ,  $P_2 = (P \cap B_2) \cup l$  とする . このとき ,  $\text{tr}(P) = \text{tr}(P_1) + \text{tr}(P_2)$  ,  $\text{kn}(P) = \min\{\text{kn}(P_1), \text{kn}(P_2)\}$  が成り立つ .

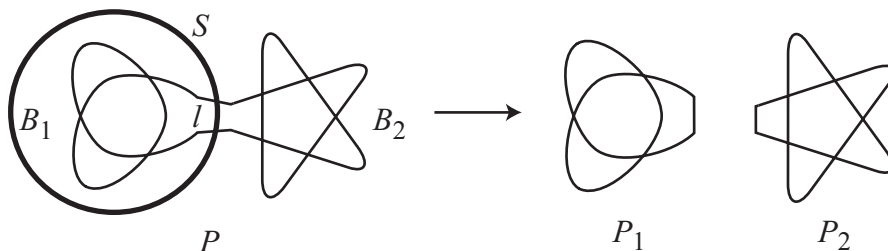


図 5: 分解円周

### 1.5.1 自明化数について

自明化数に関する定理や命題などと , 結び目の射影像の自明化数を求めるコード図を使った方法を紹介しします .

定理 2  $P$  を結び目の射影像とすると ,  $\text{tr}(P)$  は偶数である .

命題 3 任意の偶数  $n$  に対して ,  $\text{tr}(P) = n$  となる結び目の射影像  $P$  が存在する .

命題 3 が成り立つことは , 例えば , 図 6 の射影像で  $m = n + 1$  とすればよいことがわかります .



図 6:

次に , コード図とそれを用いて結び目の自明化数を求める方法を紹介しします .

$Q$  を  $n$  個の前交点をもった結び目の準射影図とします . このとき ,  $CD_Q$  が  $Q$  のコード図であるとは ,  $CD_Q$  が各前交点の原像をコードによって結んだ  $n$  個のコードをもつ円周のときをいいます . 例えば , 図 7 の (a) の準射影図のコード図は (b) です .

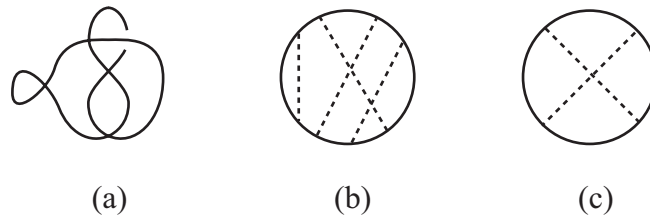


図 7: コード図

補題 4  $Q$  が結び目の準射影図とする.  $CD_Q$  が図 7(c) のようなコード図を含むなら,  $Q$  は自明ではない.

証明.  $Q'$  を  $Q$  から得られる  $CD_{Q'}$  が図 7(c) となる二つの前交点をもつ準射影図とする.  $p_1, p_2$  を  $Q'$  の前交点とする.  $K_1$  を  $D_{++}$  で表される結び目とする. ここで,  $++$  は  $p_1$  と  $p_2$  にどちらの符号の上下の情報を入れたかを表している.  $K_2, K_3, K_4$  をそれぞれ  $D_{+-}, D_{-+}, D_{--}$  で表される結び目とする. このとき,  $a_2(K_1) - a_2(K_2) - a_2(K_3) + a_2(K_4) = 1$  が成り立つ. ここで,  $a_2$  はコンウェイ多項式の 2 次の係数を表している. したがって,  $Q$  から  $a_2(K) \neq 0$  となる結び目  $K$ , つまり, 非自明な結び目を表す射影図が得られる.  $\square$

補題 5  $P$  を結び目の射影図とする.  $CD$  を図 7(c) のような部分コード図を含まない  $CD_P$  の部分コード図とする. このとき,  $CD_Q = CD$  となる  $P$  から得られる準射影図  $Q$  が存在する.

この補題の証明は, ここでは省略しますが, 構成的にできます. これらの補題から, 結び目の射影図に対して, コード図を用いて, 自明化数とそれを実現する自明な準射影図を求められることがわかります. 例えば, 図 8(a) の射影図を考えると, そのコード図は (b) です. このコード図からどのように 3 本以下のコードを除いても図 7(c) のようなコード図を含んでしましますが, 4 本のコードを除くと図 8(c) のようなコード図が得られます. したがって,  $\text{tr}(P) = 4$  であることがわかり, 図 8(d) はそれを実現する自明な準射影図です.

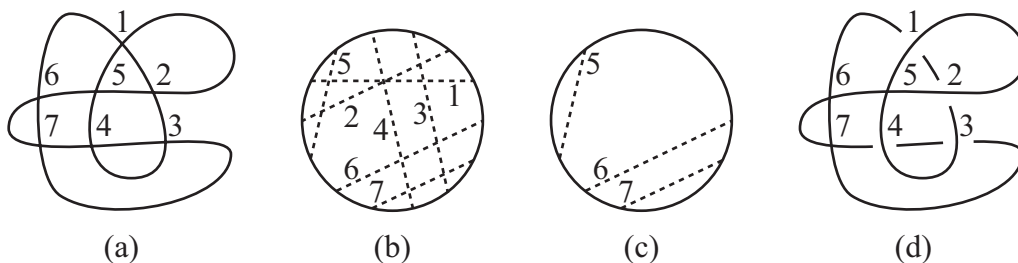


図 8: コード図から自明化数を求める, それを実現する自明な準射影図

そして, 補題 4,5 を用いることで, 定理 2 を証明することができます. さらに, 補題 4,5 を用いることで, 次の定理のような射影図の特徴づけをすることができます.

定理 6  $P$  を結び目の射影像とする．このとき， $\text{tr}(P) = 2$  であるための必要十分条件は， $P$  は図 9(a) の射影像から  $P$  の部分弧を図 9(b) のように置き換える操作を何回（0 回も含む）かして得られることであることである．

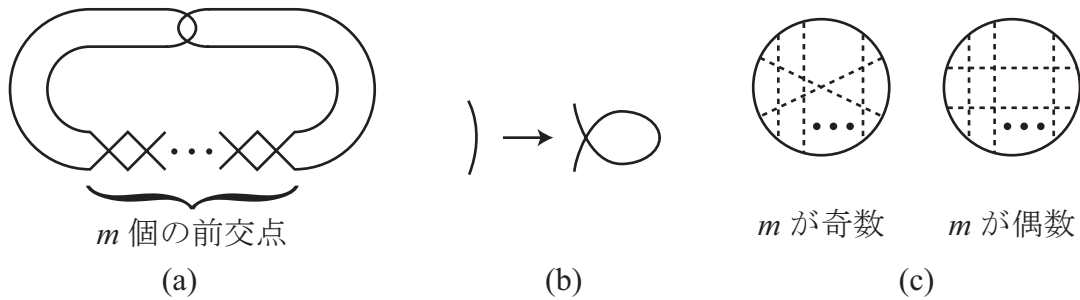


図 9:  $\text{tr}(P) = 2$  となる結び目の射影像とそのコード図

定理 7  $P$  を結び目の射影像とすると， $\text{tr}(P) \leq p(P) - 1$  が成り立つ．ここで， $p(P)$  は  $P$  の射影像の前交点の数である．また，等号が成立するための必要十分条件は， $P$  は図 6 のような射影像であることである．

## 2 結び目の自明化数

この章では，結び目に対して自明化数を定義し，得られた結果を紹介します．

### 2.1 結び目の自明化数の定義

$D$  を射影図とし， $P$  を  $D$  の交点の上下の情報をなくして得られる射影像とし， $\text{tr}(D) = \text{tr}(P)$  と定義します．結び目  $K$  に対しては，

$$\text{tr}(K) = \min\{\text{tr}(D) \mid \text{射影図 } D \text{ は } K \text{ を表す}\}$$

と定義します．

### 2.2 自明化数と結び目解消数，種数の関係

結び目の自明化数は，結び目のよく知られた不変量と以下のような関係があります．

命題 8 [1, 3]  $K$  を結び目とすると， $u(K) \leq \frac{\text{tr}(K)}{2}$  が成り立つ．ここで， $u(K)$  は  $K$  の結び目解消数である．

定理 9 [3]  $K$  を結び目とすると,  $g(K) \leq \frac{\text{tr}(K)}{2}$  が成り立つ. ここで,  $g(K)$  は  $K$  の結び目の種数である.

ここで, 定理 9 は, ザイフェルトのアルゴリズムから得られるキャノニカルな種数 [canonical genus] でも成り立ちます. 命題 8 と定理 9 を用いて下から評価を行い, 最小交点数の射影像で自明化数を求めることで, 10 交点以下の自明化数を求め, 次の命題を得ました.

命題 10 [1]  $K$  を 10 交点以下の正結び目とすると,  $\text{tr}(K) = 2u(K)$  が成り立つ. さらに  $K$  の正射影図は,  $K$  の自明化数を実現する.

ここで, 10 交点以下の正結び目は, 42 個あることが知られています [4]. そして, 次の予想をしました.

予想 1  $K$  を正結び目とすると  $\text{tr}(K) = 2u(K)$  が成り立ち,  $K$  の任意の正射影図  $D$  において  $\text{tr}(D) = 2u(K)$  である.

この予想の部分的な解答として次を得ました.

定理 11 [1]  $K$  を正組紐結び目とすると,  $\text{tr}(K) = 2u(K)$  が成り立つ. さらに  $K$  の正組紐射影図は,  $K$  の自明化数を実現する.

この定理の証明には, 次の定理を用います.

定理 12 [4, 5]  $D$  を正射影図とし,  $D$  によって表される正結び目とすると, 次が成り立つ.

$$2g_4(K) = 2g(K) = c(D) - O(D) + 1$$

ここで,  $g_4$  は 4 次元種数を,  $O(D)$  は  $D$  のザイフェルト円周の個数である.

$s(K) = c(D) - O(D) + 1$  は正結び目  $K$  と  $K$  の正射影図  $D$  に対する, ラスムッセン不変量 [Rasmussen invariant] である. また, 4 次元種数と結び目解消数の間には次の命題が成り立つ.

命題 13  $K$  を結び目とすると, 次が成り立つ.

$$u(K) \geq g_4(K)$$

定理 11 の証明 .  $D$  を正  $m$  組紐射影図とし ,  $P$  を  $D$  の射影像とする . 命題 8 と 13 , 定理 12 より ,

$$\text{tr}(P) \geq \text{tr}(K) \geq 2u(K) \geq 2g_4(K) = c(D) - O(D) + 1$$

が成り立つ . また ,  $m$  組紐射影図のある  $m - 1$  個の交点をスムージングすると ,  $m$  成分絡み目の射影図になるので , 補題 4 と 5 より ,

$$\text{tr}(P) \leq c(D) - O(D) + 1$$

であることがわかる . したがって ,

$$\text{tr}(K) = 2u(K)$$

である . □

すべての結び目は , 最小交点数の射影図で自明化数を実現するかという問題に対しては , 否定的な解答が得ました .

命題 14  $11_{550}$  は最小交点数の射影図で自明化数を実現せず , 12 交点の正射影図で自明化数を実現する .

この正結び目  $11_{550}$  は最小交点数の射影図として図 10 しかもたず , 最小交点数で正射影図をもたないこと , そして , 12 交点で正射影図をもつことが [6] で知られています .

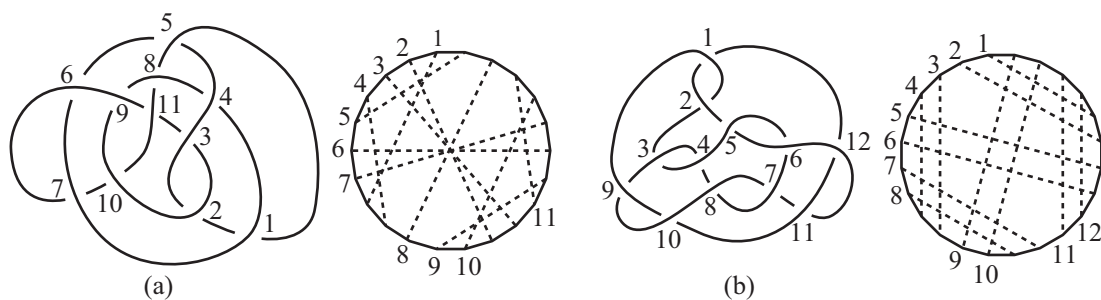


図 10:  $11_{550}$  の最小交点数の射影図と自明化数を実現する正射影図

また , 異なる自明化数をもつ最小交点数の射影図をもつ結び目も存在します . 例えば ,  $10_{161}$  を表すペルコ対 [Perko's pair] は正射影図でない図 11(a) は自明化数を 8 で , 正射影図である 11(b) は自明化数が 6 でこの結び目の自明化数を実現しています .

射影像の結果を用いることで , 次の定理を得ました .



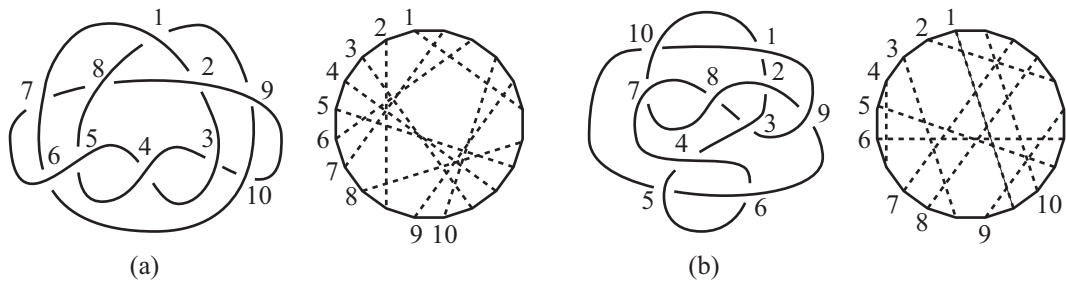


図 11: ペルコ対

定理 15 [1]  $K$  を非自明な結び目とすると,  $2 \leq \text{tr}(K) \leq c(K) - 1$  が成り立つ. ここで,  $c(K)$  は結び目  $K$  の最小交点数である. 等号が成立のための必要十分条件は,  $K$  が  $(2, p)$  トーラス結び目であることである. ここで,  $p$  は奇整数である.

定理 16 [1]  $\text{tr}(K) = 2$  であるための必要十分条件は,  $K$  がツイスト結び目であることである.

## 参考文献

- [1] R. Hanaki, *Trivializing number of knots*, preprint.
- [2] R. Hanaki, *Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs*, Osaka J. Math **47** (2010), 863–883.
- [3] A. Henrich, N. Macnaughton, S. Narayan, O. Pechenik and J. Townsend, *Classical and virtual pseudodiagram theory and new bounds on unknotting numbers and genus*, preprint, arXiv:math.GT/0908.1981v2.
- [4] T. Nakamura, *Four-genus and unknotting number of positive knots and links*, Osaka J. Math. **37** (2000), 441–451.
- [5] J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, to appear in Invent. Math.
- [6] A. Stoimenow, *On the crossing number of positive knots and braids and braid index criteria of Jones and Morton-Williams-Franks*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 3927–3954.