# 結び目または完全3成分絡み目内在グラフについて

花木 良（奈良教育大学教育学部） 新國 亮（東京女子大学現代教養学部）
谷山 公規（早稲田大学教育学部） 山崎 晶子（東京女子大学大学院理学研究科）

グラフ $H$ がグラフ $G$ の**マイナー**であるとは, $G$ のある部分グラフ $G'$ が存在して, $H$ は $G'$ の幾つかの辺を縮約して得られるときをいい, 特に $H \neq G$ のとき**プロパーマイナー**であるという. グラフ $G$ が性質 $\mathcal{P}$ に関して**マイナーミニマル**であるとは, $G$ は性質 $\mathcal{P}$ を持つが, その任意のプロパーマイナーは性質 $\mathcal{P}$ を持たないときをいう. グラフ $G$ は, その 3 次元球面への任意の埋め込みが 2 成分非分離絡み目を含むとき**絡み目内在**, また非自明結び目を含むとき**結び目内在**と呼ばれ, 例えば $n$ 頂点完全グラフ $K_n$ において, $K_6$ は絡み目内在 [8, 1], $K_7$ は結び目内在である [1]. $K_6$ から有限回の $\triangle Y$ 変換及び $Y\triangle$ 変換 (図 1) で得られるグラフの同型類の集合を **Petersen 族**といい, これらはマイナーミニマルな絡み目内在グラフの全てである [7]. 一方, $K_7$ から有限回の $\triangle Y$ 変換及び $Y\triangle$ 変換で得られるグラフの同型類の集合を **Heawood 族**といい, これは $K_7$ から有限回の $\triangle Y$ 変換で得られる 14 個のグラフと, $K_7$ から有限回の $\triangle Y$ 変換のみでは得られない 6 個のグラフから成る (図 2). 前者 14 個はマイナーミニマルな結び目内在グラフであり [6], 一方後者 6 個の中には結び目内在でないものが少なくとも 1 つ存在することが知られていた [2](図 2 の $N'_{10}$). また, Heawood 族に属さないマイナーミニマルな結び目内在グラフも存在する [3, 4].

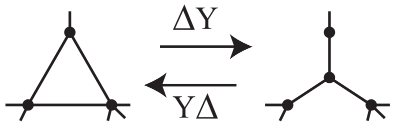


図 1: ΔY 変換と YΔ 変換

今回, Heawood 族に属するグラフがいつ結び目内在となるかを, 以下のように完全に決定した.

**定理 1** ([5]) Heawood 族に属するグラフ $G$ に対し, 以下は同値である.
(1) $G$ は結び目内在である.
(2) $G$ は $K_7$ から有限回の $\triangle Y$ 変換で得られる.
(3) $G$ は 3 つのサイクルの非交和を含まない.

即ち, $K_7$ から有限回の $\triangle Y$ 変換のみでは得られない 6 個のグラフは全て結び目内在ではない. 更にいま, グラフ $G$ が**結び目または完全 3 成分絡み目内在である**とは, その 3 次元球面への任意の埋め込みが非自明結び目, もしくはどの 2 成分部

分絡み目も非分離な 3 成分絡み目を含むときと定義する．結び目内在ならば結び目または完全 3 成分絡み目内在であることに注意せよ．このとき, 以下の結果を得た．

**定理 2** ([5]) Heawood 族に属する任意のグラフ $G$ は, マイナーミニマルな結び目または完全 3 成分絡み目内在グラフである．

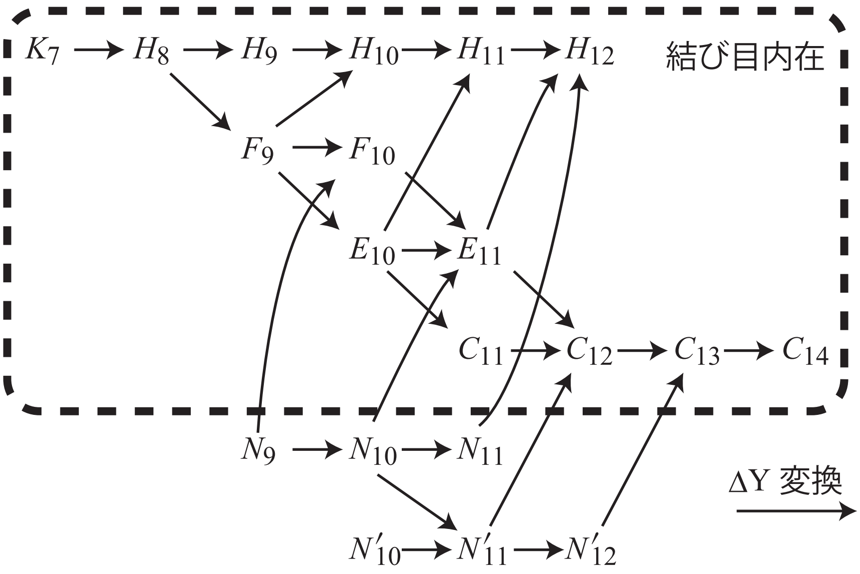


図 2: Heawood 族

# 参考文献


[1] J.H. Conway and C.McA. Gordon, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 445–453.

[2] E. Flapan and R. Naimi, The Y-triangle move does not preserve intrinsic knottedness, *Osaka J. Math.* **45** (2008), 107–111.

[3] J. Foisy, Intrinsically knotted graphs, *J. Graph Theory* **39** (2002), 178–187.

[4] J. Foisy, A newly recognized intrinsically knotted graph, *J. Graph Theory* **43** (2003), 199–209.

[5] R. Hanaki, R. Nikkuni, K. Taniyama and A. Yamazaki, On intrinsically knotted or completely 3-linked graphs, preprint. (arXiv:math.`1006.0698`)

[6] T. Kohara and S. Suzuki, Some remarks on knots and links in spatial graphs, *Knots 90 (Osaka, 1990),* 435–445, *de Gruyter, Berlin,* 1992.

[7] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, Sachs' linkless embedding conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 185–227.

[8] H. Sachs, On spatial representations of finite graphs, *Finite and infinite sets, Vol. I, II (Eger, 1981),* 649–662, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **37**, *North-Holland, Amsterdam,* 1984.