第 42 回数学教育論文発表会論文集
論文発表の部

数学的帰納法の証明をよむ活動について

花木 良
早稲田大学大学院 教育学研究科 院生

数学的帰納法は，生徒や学生にとって理解しづらいものの一つであることが知られており，これまでに教材研究や指導法が研究されている．これらは，導入過程で生徒が具体例を通して帰納や推測をする活動を行うとよいとし，いろいろな具体的な教材や事例を挙げている．本論文では，数学的帰納法の仕組みや働きの理解を促し，良さを味わうために，数学的帰納法の証明をよむ活動を新たに提案し，その活動に適した教材及び指導法を紹介する．この活動は，与えられた自然数に対してどのように働くことで成り立つことが示されているのかをよみ取ること，どのような仕組みですべての自然数に対して成り立つことが示されているのかをよみ取ることである．この活動は，自分で証明を与える際や，与えられた証明を理解しようとする際にも有効である．

キーワード：数学的帰納法，証明法，離散数学

１．はじめに

数学的帰納法の良さは，無限にある命題を有限で示すことができる点にある．この証明法の正当性は，自然数の公理（ペアノの公理）で保証されている．現在，数学 B の「数列」の単元で，数学的帰納法は指導されており，大学入試でも使われることが多い．しかし，数学的帰納法は，生徒や学生にとって理解しづらいものの一つであることが知られており，これまでに教師や研究者により教材研究や指導法が研究されている（飛岡，1992；ファミーン他，1998；間瀬，1990；室岡，1993；村上，1990；山本，1998）．これらの先行研究の共通点として，数列以外の教材を取り入れ数学的帰納法の理解のためには，導入過程で生徒が具体例を通して帰納や推測をする活動を行うとよいとし，いろいろな具体的な教材や事例を挙げている．この活動は生徒に主体的な学習を促す点や数学的帰納法の用い方を習得する上で効果的である．秋山

は，数学的帰納法を使う例題及び解法の発想法を挙げ,その使い方を紹介している（秋山，1989）．本橋は，現在の教科書について厳密な論理的考察を行っている（本橋，2002）．

本論文では，数学的帰納法の仕組みや働きの理解を促し，良さを味わうために，数学的帰納法の証明をよむ活動を新たに提案し，その活動に適した教材を紹介する．先行研究のような導入指導が行われ，数学的帰納法の証明法を指導した後，これは行われると効果的であると考える．この活動は，与えられた自然数に対してどのように働くことで成り立つことが示されているのかをよみ取ること，どのような仕組みですべての自然数に対して成り立つことが示されているのかをよみ取ることである．この活動を行うことで数学的帰納法で示される命題の正しさを実感することもできる．数学的帰納法の学習は，近年学校教育に積極的に取り入れようとされている離散数学（整数論やグラフ理論）の中でも中心的な役割を果たし，重要性が増している．

２．動機

著者は，理系学部生７名に次のような問を出題し，解答から学生が数学的帰納法の仕組みや働きを理解できていないことがわかった．始めに命題及び数学的帰納法の証明を与えた．

命題　どこか１マスが欠けている $2^n \times 2^n$ マスの正方形の部屋がある．そこに図１のような３マスを埋めるようなＬ字のタイルを重なることなく，部屋に敷き詰めることができる．

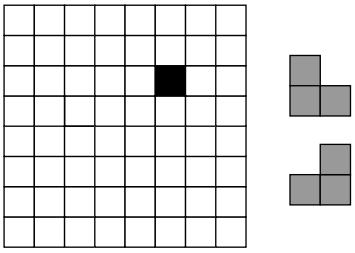

図１　１マス欠けた部屋と敷き詰めるタイル

（証明）$n = 1$ のときは，１マスが欠けている 2×2 の部屋は図２のいずれかであり，どの場合も敷き詰めることができる．

図２　$n = 1$ の場合

「$n = k$（$k \geqq 1$）のとき，どこか１マスが欠けている $2^k \times 2^k$ 部屋はＬ字のタイルで敷き詰めることができる.」と仮定する．このとき，$2^{k+1} \times 2^{k+1}$ の部屋も敷き詰めることができることを示す.

図３のように $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ の部屋を４つの $2^k \times 2^k$ の部屋に分けて考える．ここで，１つの部屋は１マスが欠けている．数学的帰納法の仮定に帰着させるため（他の３つの部屋も１マスが欠けるようにするため）に，図３のようにマスが欠けていない３つの $2^k \times 2^k$ の正方形の部屋が１マスずつ欠けるように，真ん中にタイルを１つ敷く．すると，４つの１マスが欠けている $2^k \times 2^k$ の部屋は，数学的帰納法の仮定により敷き詰めができる．よって，$2^{k+1} \times 2^{k+1}$ マスの部屋も敷き詰めができる．■

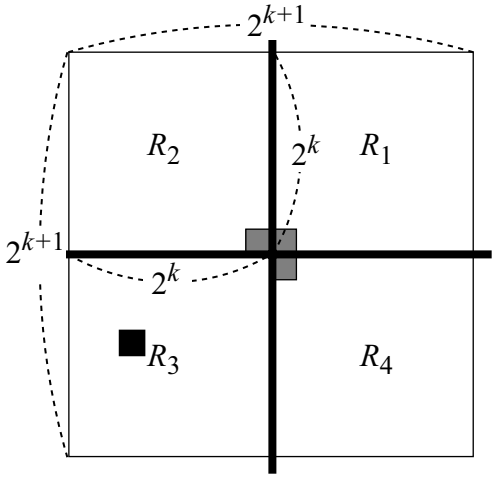

図３　$n = k + 1$ の場合

そして，次の問に答えさせた．

問　図４のように１マスが欠けている $2^4 \times 2^4 = 16 \times 16$ マスの部屋がある．このとき，数学的帰納法の証明を使う

ことで，L 字のタイルを敷き詰めなさい．

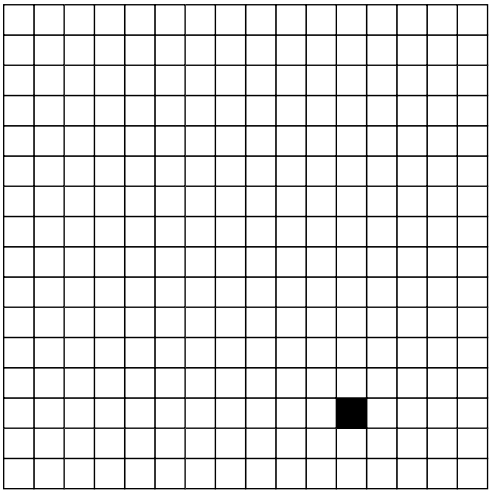

図 4　1 マスが欠けている 16 × 16 の部屋

この問の解答は，証明のように 8 × 8 の部屋に分けて考え，8 × 8 の部屋が 1 マスずつ欠けるように，真ん中にタイルを 1 つ敷く．同様に，8 × 8 の部屋を 4 × 4 の部屋に分けて考え，4 × 4 の部屋が 1 マスずつ欠けるように，真ん中にタイルを 1 つ敷く．これを繰り返すと，図 5 のように敷き詰めることができる．

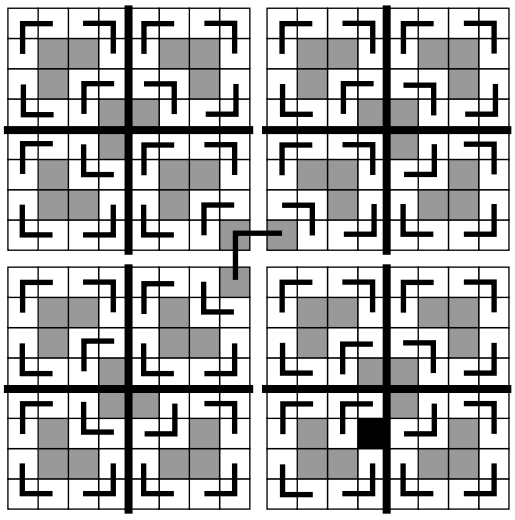

図 5　数学的帰納法の証明に従って敷き詰める

7 名の学生のうち，2 名は解答通りに敷き詰めることができたが，残りは 8 × 8 の部屋に分けて考え中心にタイルを敷くことまでは証明に従って行うことができたが，それらをさらに 4 × 4 の部屋に分割し同様に敷き詰めようという姿勢はみられなかった．

数学的帰納法の証明において，$n = 1$ が成り立つことを示し，$n = k$ を仮定して $n = k + 1$ で成り立つことを示すことにより，$k = 1$ のとき $n = 2$ の場合が成り立つことが保証され，同様にして $n = 3$ の場合が成り立つことが保証されていく．逆に与えられた自然数 m に対して，m のときに成り立つ保証は $m - 1$ が成り立つことにあり，$m - 1$ のときに成り立つ保証は $m - 2$ が成り立つことに因っている．しかし，上の学生の反応からこの事実が理解されていないようである．また，k は 1 つの自然数を表すのではなく，すべての自然数を表しているという点も意識できていないようである．このように高等学校では，形式的に使えるようになっているだけで，数学的帰納法による証明の正しさを納得したり仕組みや働きを理解したりできていないことがわかった．

３．教材と指導法

この章では，数学的帰納法の証明をよむ活動に適した三つの教材と指導法を提案する．

一つ目の教材は，先に挙げたタイルを敷き詰める命題である．最初から命題と証明を与えるのではなく，先行研究，特にこの教材を取り上げているフォミーンらと同様に，次の問から始める．この指導法は室岡が効果的であることを示した再帰的な考えにも基づいている．

問　どこか 1 マスが欠けている 16 × 16 マスの正方形の部屋があります．そこに 3 マスを埋めるような L 字のタイルを重なることなく，部屋に敷き詰めることができますか．

この問を与えた上で，16 × 16 は大きくてすぐには解けないので，2 × 2 を考えさせる．次に 4 × 4 を考えさせ，2 × 2 の部屋に分け

られ帰着できることに気づかせる．3 × 3 の部屋は，マスが 3 × 3 − 1 ＝ 8 で 3 で割り切れないことから敷き詰められないことがわかる．次は 8 × 8 を考えればよいことにも気づかせ，問を解決させ，32 × 32 についても成り立つことを予想させたい．そして，一般に $2^n \times 2^n$ で成り立つことが予想させ，同様に示せることを理解させたい．ここで，このような証明法，数学的帰納法を紹介する．

自然数 n に関する命題がすべての自然数 n に対して成り立つことを証明するには，次の 2 つのことを示せばよいことが知られている．

(1)　$n = 1$ のとき，成り立つ

(2)　$n = k$ のとき成り立つと仮定すると，
　$n = k + 1$ のときにも成り立つ

(1) を数学的帰納法の出発点，(2) をステップと呼ぶ．この数学的帰納法の仕組みを図で表すと図 6 のようになる．この図が意味していることは，(1) より $n = 1$ が成り立ち，(2) より $n = k = 1$ が成り立つから $n = 2$ が成り立ち，再び (2) より $n = k = 2$ が成り立つから $n = 3$ のときが成り立つといった具合で，(2) は矢印を表している．

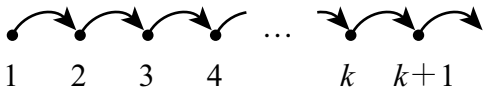

図 6　数学的帰納法の仕組み図

上の命題が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明すると，前のページの証明のようになることを紹介し，証明をよませ，働きを理解させるために次の問をする．

問　この証明は，具体的に 1 マス欠けた $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ マスの部屋があったとき，どのように敷き詰めていけば，全体が敷き詰められると主張していますか？

この問に対して，先の学生のように $2^k \times 2^k$ の部屋に分割し中心にタイルを敷くことまでは証明に従って行い，そこで止まっている生徒がいたら，「$2^k \times 2^k$ の部屋に対してはどのように敷き詰めたらよいといっていますか？ 2^k が 2^{k+1} であると考えると，どのように敷き詰めたらよいということになりますか？」と問うとよいであろう．この問は抽象的かもしれないので，1 マス欠けた $2^5 \times 2^5$ の部屋を具体的に与えてもよいだろう．ここで，証明に従って敷き詰めると与えられた部屋に対して一意的に敷き詰めが決まるが，証明に従わなければ別の敷き詰め方でも敷き詰めが可能な場合があることに注意する．

この問により，証明の前に帰納したことが証明の中でどのように表れているかが理解される．$2^k \times 2^k$ の部屋に対しても同様に敷き詰めたらよいということは，k は 1 以上のすべての自然数で成り立つことからわかる．さらに，この操作を繰り返すと k が最終的に 1 となり，敷き詰めが完了することがわかる．この数学的帰納法では，どの k に対しても最終的に 1 に行き着くことに注意させ，(1) の必要性も感じさせたい．

この例の良い点は，数学的帰納法の証明が敷き詰めの方法を表している点である．これにより具体的に与えられた部屋に対して簡単に敷き詰めることができ，数学的帰納法で示された事実の正しさが実感できる．同様の例として，次を挙げる．

二つ目の教材は，k を仮定して $k + 1$ を示すのではなく，k を仮定して $k + 2$ を示すものである．先に挙げた数学的帰納法ではうまく行かないことに気づき，異なった形の数学的帰納法を作り上げさせ，数学的帰納法の仕組みを理解できるようにしたい．次の問は問の時点から一般の場合を問う．これは生徒に自発的に帰納の考えを使えるようにするねらいがある．

問　4 以上の自然数は，2 と 5 をいくつか加えた和として表すことができることを示しなさい．

この問に対しても小さい値から帰納的に考

えることが大切である．$4 = 2 + 2$，$5 = 5$，$6 = 2 + 2 + 2$，$7 = 2 + 5$ と表されることはすぐにわかる．そして，k は，2 を用いて，$k = 2 + (k - 2)$ と見ることができるかがカギである．そして，次のような数学的帰納法を用いて，この問は証明される．

（証明）$n = 4, 5$ のとき，$4 = 2 + 2$，$5 = 5$ と表され，成り立つ．

$n = k$（$k \geqq 4$）のとき，「k は 2 と 5 をいくつか加えた和として表すことができる」と仮定する．$n = 2 + k$ のとき，$2 + k$ の k の部分は帰納法の仮定より，2 と 5 をいくつか加えた和と表されるので，$2 + k$ も 2 と 5 をいくつか加えた和で表される．■

この数学的帰納法の仕組みは図 7 のようになる．この証明から数学的帰納法の出発点についての理解を深めたい．例えば，$n = 4$ だけを数学的帰納法の出発点とすると図 7 からもわかるように n が偶数の場合しか示されないことになることに気づかせたい．逆に与えられた自然数 n に対して，証明をよむことで，n が偶数の場合は $n = 4$ に帰着され，奇数の場合は $n = 5$ に帰着されることも理解させたい．具体的には，$9 = 2 + 7 = 2 + (2 + 5)$ となり，$12 = 2 + 10 = 2 + (2 + 8) = 2 + 2 + (2 + 6) = 2 + 2 + 2 + (2 + 4) = 2 + 2 + 2 + 2 + (2 + 2)$ となる．

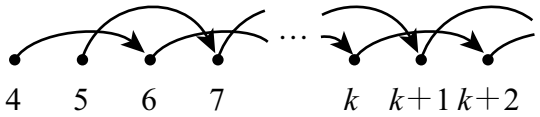

図 7　数学的帰納法の仕組み図

この問は，$n = 4, 5, 6, 7, 8$ を数学的帰納法の出発点，$n = k$ を仮定し $n = 5 + k$ が成り立つことをステップとして示してもよい．この証明に従うと，$12 = 5 + 7 = 5 + 5 + 2$ となり，上の証明とは異なる和の表し方になり，仕組みや働きがも異なる．

類題として「8 以上の自然数は，3 と 5 をいくつか加えた和として表すことができる」などが挙げられる．

将棋倒しを数学的帰納法のイメージとして挙げる場合があるが，この例題のように k に関する命題が $k - 1$ の命題からではなく $k - 2$ の命題から成り立つことを示す場合もあるので，将棋倒しの例は不適であると考える．

三つ目の例は，また異なった形の数学的帰納法を使う問題である．

問　$x = t + (1/t)$ とし，$P_n = t^n + (1/t^n)$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）とおく．このとき，P_n は x の整式で表されることを示しなさい．

この問も帰納的に考えさせ，自然数 k が何に帰着されるかを証明の前に考察させたい．これは $n = 3, 4$ の場合までは求めれば，わかるであろう．

（証明）　$n = 1, 2$ の場合，$P_1 = t + (1/t) = x$，$P_2 = t^2 + (1/t^2) = \{t + (1/t)\}\{t + (1/t)\} - 2 = x^2 - 2$ となり，x の整式で表される．

$n = k, n = k + 1$（$k \geqq 1$）のとき P_n は x の整式で表されると仮定する．

$n = k + 2$ のとき，$P_{k+2} = \{t + (1/t)\}\{t^{k+1} + (1/t^{k+1})\} - \{t^k + (1/t^k)\} = xP_{k+1} - P_k$ となり，x の整式で表される．■

この数学的帰納法の仕組みは図 8 のようになる．この問では，$n = 3$ を証明するのに $n = 1$ の場合と $n = 2$ の場合の両方を必要としている．前の問と同様に出発点として 2 つの自然数に対して命題が成り立つことを示したが，仕組みとしては異なっていることに注意させたい．

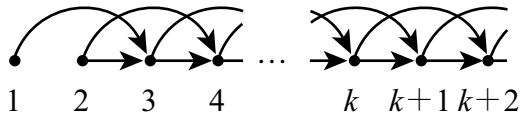

図 8　数学的帰納法の仕組み図

この証明も，与えられた自然数に対して，具体的な整式の形を表現している．例えば，$P_5 = xP_4 - P_3 = x(xP_3 - P_2) - (xP_2 - P_1) = x(x(xP_2 - P_1) - P_2) - (xP_2 - P_1) = (x^3 -$

$2x)P_2 - (x^2 - 1)P_1 = (x^3 - 2x)(x^2 - 2) - (x^2 - 1)x$ となることを意味している．また，この問題は漸化式が与えられれば，（一意性は自明ではないが）数列が決まるということを表している例でもある．

４．注意

上で述べたように数学的帰納法は，タイルの敷き詰め方や整数を 2 と 5 のいくつか加えた和で表す方法などを意味している. しかし，背理法では同様のことを意味しないことに注意が必要である[注1]．例えば，素数は無限に存在することの証明は，「素数が有限個しかないとし，それらを $2, 3, 5, \cdots, p$（p は最大の素数）とする．$q = 2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p + 1$ とすると，q は p より大きい素数となり，矛盾し，素数は無限に存在する.」である．この素数を集めて積をとり 1 を足すという操作は素数を作るとは限らない．実際，$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031 = 59 \times 509$ となる．

５．終わりに

このような数学的帰納法の証明をよむ活動が行われれば，帰納的に考えたことがどのように証明に表れるのか表れているのかをよみ取れ，自分が与えた証明の理解や与えられた証明の理解が促され，示した事実に実感をもてる．上に挙げたように，数学的帰納法の学習が数列以外のさまざまな単元で扱われると，数列では見えにくかった数学的帰納法の本質を見ることができる．このような活動や教材が数学的帰納法の導入時に取り入れられることを望む．今後，実践研究を行い，有効性を示していきたい．また，この視点においてよい教材を開発していきたい．

付記　本研究は，早稲田大学特定課題研究「結び目，絡み目及び空間グラフの射影像に関する研究，及びグラフ理論教材の開発」の援助を受けている．

注 1．芳沢光雄『算数・数学が得意になる本』の「矛盾」が出てきたときの扱い方として，この証明は素数の作り方を主張していないことが紹介されている．

参考文献

秋山仁（1998），『数学の証明のしかた』，駿台文庫.

荻原季弘（2007），「離散数学で論証を学ぶ」，高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究 最終報告書，pp.115-127.

飛岡正治（1992），「数学的帰納法の導入法とその応用例」，日本数学教育学会誌，第 74 巻第 5 号，pp.22-28.

D. フォミーン・S. ゲンキン・I. イテンベルク，志賀浩二・田中紀子訳（1998），『数学のひろばⅡ』，岩波書店.

G. ポリア，柴垣和三男訳（1959），『帰納と類比』，丸善.

間瀬友典（1990），「数学的帰納法の指導についての二, 三の提言」, 日本数学教育学会誌，第 72 巻第 3 号，pp.35-48.

室岡和彦（1993），「再帰関係による数学的帰納法の学習指導」，日本数学教育学会誌，第 75 巻第 11 号，pp.23-30.

村上一三（1990），「数学的帰納法の理解の困難点について」，日本数学教育学会誌，第 72 巻第 11 号，pp.38-46.

本橋信義（2002），『数学と新しい論理－数学的帰納法をめぐって－』，遊星社.

山本忠（1998），「数学的帰納法の概念の受容と指導法の影響」，第 31 回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，pp.299-304.

芳沢光雄（2006），『算数・数学が得意になる本』，講談社現代新書.