絡み目の結び目解消数と交点数の間の等式について

早稲田大学大学院教育学研究科
京 淳介，花木 良

向きのついた結び目および絡み目を考えます．射影図〔diagram〕の交点のうちのいくつかを交差交換すると，射影図は自明な絡み目を表すことが知られています．射影図 D と絡み目 L に対して，次を定義します．

$$u(D) = \min\{n | D \text{ のある } n \text{ 個の交点を交差交換すると自明な絡み目の射影図になる}\},$$

$$u(L) = \min\{u(D) | D \text{ は } L \text{ の射影図}\}.$$

そして，$u(D)$ ($u(L)$) を射影図 D (絡み目 L) の**結び目解消数〔unknotting number〕**と呼びます．射影図 D の交点の数を $c(D)$ で表し，

$$c(L) = \min\{c(D) | D \text{ は } L \text{ の射影図}\}$$

と定義します．次の命題が成り立つことが知られています．

命題 1 D を絡み目の射影図とすると，$u(D) \leq \dfrac{c(D)}{2}$ が成り立ち，D' を交点をもつ結び目の射影図とすると，$u(D') \leq \dfrac{c(D')-1}{2}$ が成り立つ．また，L を絡み目とすると，$u(L) \leq \dfrac{c(L)}{2}$ が成り立ち，K を非自明な結び目とすると，$u(K) \leq \dfrac{c(K)-1}{2}$ が成り立つ．

谷山氏は，[4] で，上の等号が成立する場合の射影図と結び目，絡み目の特徴づけを行いました．$u(D') = \dfrac{c(D')-1}{2}$ が成り立つための必要十分条件は，D' が図 1 の射影図の一つであることを示しました．

今回，次の定理を得ました．

定理 2 (1) $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_\mu$ を μ 成分の絡み目 L の射影図とする．$u(D) = \dfrac{c(D)-1}{2}$ が成り立つための必要十分条件は，$D_1, D_2, \ldots, D_\mu$ のうち一つが図 1 の射影図の一つで，それ以外の各成分は単純閉曲線で，各 i, j に対して D_i と D_j の間の交点は，すべて正であるか，すべて負であるか，または存在しないことである．ここで，交点の符号は図 2 のように定義する．加えて，$u(D) = \dfrac{c(D)-1}{2}$ ならば，$u(L) = u(D)$ が成り立つ．

(2) L を $u(L) = \dfrac{c(L)-1}{2}$ である絡み目とし，D を $c(D) = c(L)$ である L の射影図とすると，$u(D) = \dfrac{c(D)-1}{2}$ が成り立つ．

例としては，図 2 の射影図が挙げられます．

$c(D) = c(K)$ かつ $u(D) = u(K)$ となる射影図 D をもたない結び目 K が存在することが [3, 1] で知られていますが，次の系が成り立つことがわかりました．

系 3 L を $u(L) \geq \dfrac{c(L)-2}{2}$ である絡み目とし，D を $c(D) = c(L)$ である L の射影図とすると，$u(L) = u(D)$ が成り立つ．

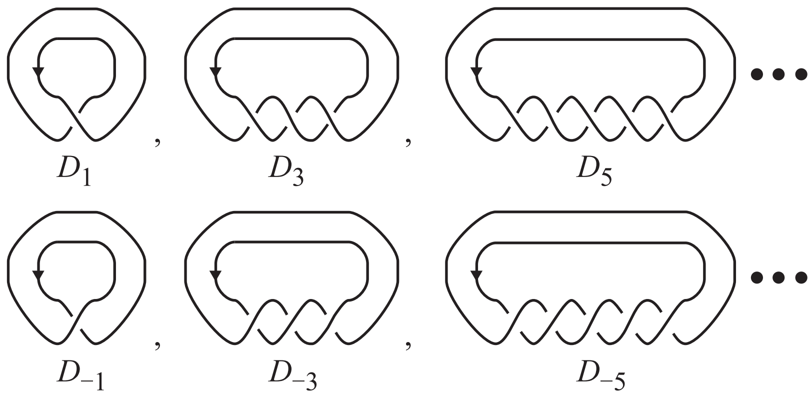

図 1: $u(D') = \dfrac{c(D')-1}{2}$ である結び目の射影図 D'

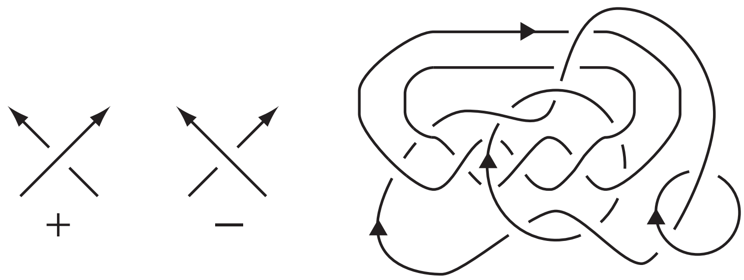

図 2: $u(D) = \dfrac{c(D)-1}{2}$ である絡み目の射影図 D

参考文献

[1] S. Bleiler, A note on unknotting number, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **96** (1984), 469–471.

[2] R. Hanaki and J. Kanadome: On an inequality between unknotting number and crossing number of links, to appear in *J. Knot Theory Ramifications.*

[3] Y. Nakanishi, Unknotting numbers and knot diagrams with the minimum crossings, *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.*, **11** (1983), 257–258.

[4] K. Taniyama: Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded, to appear in *J. Knot Theory Ramifications.*