二重手錠グラフの初等集合について

早稲田大学大学院教育学研究科
花木 良

1 はじめに

有限グラフを G とし，自然に位相空間と考えます．G から 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ への埋め込みを，**G の空間埋め込み（spatial embedding）**といい，その像を**空間グラフ（spatial graph）**といいます．f, f' を G の空間埋め込みとしたとき，f と f' が**同値（equivalent）**であるとは，$h(f(G)) = f'(G)$（f と f' の像が重なる）となる $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への（向きを保存しなくてもよい）自己同相写像 h が存在するときをいいます．f が**自明（trivial）**であるとは，f と同値な G から $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\mathbb{R}^2$ への空間埋め込み f' が存在するときをいいます．

G から $\mathbb{R}^2$ への連続写像 φ が G の**射影（projection）**であるとは，φ の多重点が有限個の頂点以外の横断的な二重点のみのときをいいます．このとき，射影の像を**射影像**といい，$\widehat{G} = \varphi(G)$ で表します．φ が**空間埋め込み f の射影**であるとは，f と同値な $\varphi = \pi \circ f'$ となる空間埋め込み f' が存在するときをいいます．ここで π は $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^2$ への自然な射影です．このとき，f は φ **から得られる**といいます．射影 φ が**自明（trivial）**であるとは，φ から得られる空間埋め込みが自明なものだけのときをいいます．

G の非自明な空間埋め込みの集合 $\mathcal{E}$ が **G の初等集合（elementary set）**であるとは，G の任意の非自明な射影は $\mathcal{E}$ の少なくとも一つの元の射影となっていて，$\mathcal{E}$ の真部分集合はこの性質をもたないときをいいます．一般に，$\mathcal{E}$ は G から一意的に決まりません．G の初等集合の元の数の最小値を **G の初等数（elementary number）**といい，$elm(G)$ で表します．

先行研究として，$G = \mathbb{S}^1$ のとき，初等集合は三葉結び目の元だけで構成される集合で，$elm(G) = 1$ であること [4] がわかっており，$G = \mathbb{S}^1 \amalg \mathbb{S}^1$ のとき，初等集合は三葉結び目と自明な結び目の分離和，ホップ絡み目の元で構成される集合で，$elm(G) = 2$ であること [5] がわかっています．また，G が θ 曲線のとき，図 1 で描かれた元で構成される集合は初等集合で，$elm(G) = 3$ であること [3, 2] がわかっており，G が手錠グラフのとき，図 2 で描かれた元で構成される集合は初等集合で，$elm(G) = \infty$ であること [6] がわかっています．

2 結果

図 3 で描かれた 4 個の頂点と 6 本の辺をもつグラフを**二重手錠グラフ（double-handcuff graph）**と呼びます．このグラフは，手錠グラフに 1 本の辺を加えた

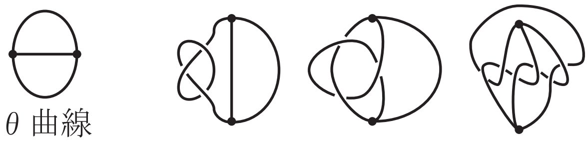

図 1: θ 曲線とその初等集合

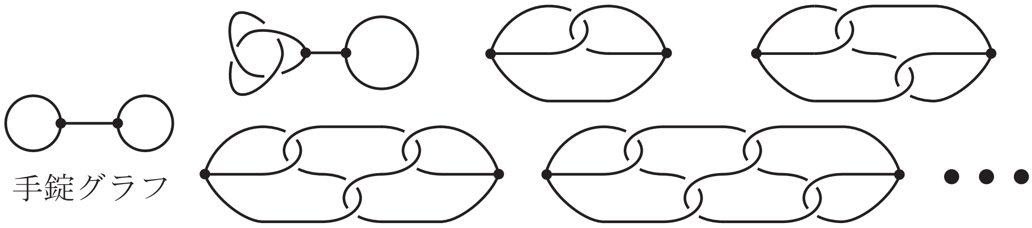

図 2: 手錠グラフとその初等集合

グラフとも，θ 曲線に 1 本の辺を加えたグラフともみることができます.

定理 2.1 $\mathcal{E}$ を図 3 で描かれた二重手錠グラフの非自明な空間埋め込みの集合とすると，$\mathcal{E}$ は二重手錠グラフの初等集合であり，$elm(H) = 7$ である.

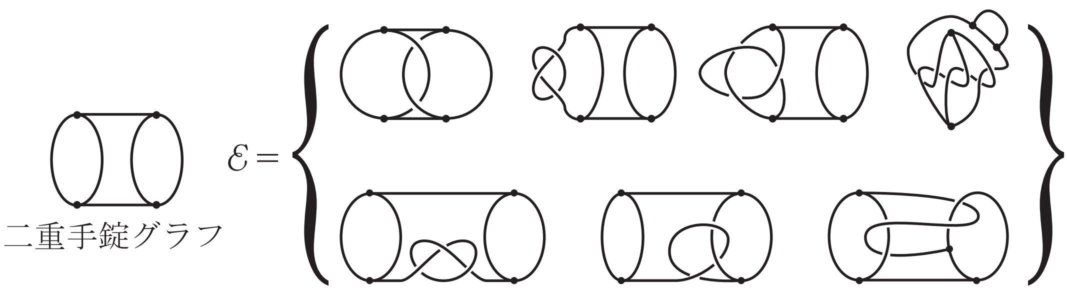

図 3: 二重手錠グラフとその初等集合

参考文献

[1] R. Hanaki, Regular projections of knotted double-handcuff graphs, to appear in *J. Knot Theory Ramifications.*

[2] Y. Huh, G. T. Jin, and S. Oh, An elementary set for θ_n-curve projections, *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), 1243–1250.

[3] S. Kinoshita and J. Mikasa, On projections of spatial theta-curves, Kwansei Gakuin University (1993) In Japanese.

[4] K. Taniyama, A partial order of knots, *Tokyo J. Math.* **12** (1989), 205–229.

[5] K. Taniyama, A partial order of links, *Tokyo J. Math.* **12** (1989), 475–484.

[6] K. Taniyama and C. Yoshioka, Regular projections of knotted handcuff graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **13** (1998), 509–517.