多面体の展開図におけるグラフの活用について

早稲田大学教育学部　花木 良
E-mail：r.t@fuji.waseda.jp

概要：空間図形（多面体），特に展開図の学習にグラフを用いることを提案する．ここで，グラフとは頂点と呼ばれる点とそれらを結ぶ辺で構成されるもの（図形）である．グラフを用いて，面のつながりを表現することによって，空間図形の見方や表現力を豊かにしたり直観力がついたりすることが期待できることを示す．

検索語：グラフ理論，離散数学，展開図，空間図形

１．はじめに

グラフとは，頂点と呼ばれる点とそれらを結ぶ辺で構成されるもの（図形）である．グラフは，与えられた情報をビジュアル化するために用いられたり，図形とみて位相的観点から考察するときに用いられたりする．

近年，情報科学の礎となる離散数学（グラフ理論）を学校教育に導入しようとする動きが盛んであり（[長]），教材研究は重要である．グラフ理論に関する話題は，現代化の時代に位相的な見方として，一筆がき問題やオイラーの多面体公式などが取り上げられていた．多面体公式の証明は，立体である多面体のまま示すことは困難である．しかし，多面体から面を 1 個除いて，頂点・辺・面の関係を変えず変形して平面に描くと，数学的帰納法を用いて多面体公式が成り立つことを示すことができる．しかし，現代化の失敗とともに，位相的な見方を強調する教材は消えてしまった．

筆者は，小学校からグラフを用いて物事を表現したり考察したりすることは大切であり，位相的な見方をすることも図形の見方を豊かにする上で必要であると考えている．本論文では，このような観点で，多面体の展開図におけるグラフの活用を提案する．

２．グラフの用い方

多面体において，面のつながり方に着目し，グラフを構成する．各面に名前をつけ頂点とし，面と面が繋がっているときに限りそれらの面を表す頂点を辺で結び，グラフをつくり，これを面のつながり方グラフと呼ぶ（図１）．このグラフでは，対応がわかりやすいように頂点を面の形にし，繋がっている辺を辺で結んである．

図１のグラフにおいて，頂点から出ている辺の本数が辺を共有している面の数や面の形を表していること，グラフの辺で囲まれている領域が多面体の頂点に集まっている面の数を表していること，向かい合う平行な面は辺で結ばれていないこと，グラフの辺の数は多面体の辺の数と等しいこと（つまり，多面体の辺は面と面をつなげることで生まれる）などをよませたい．

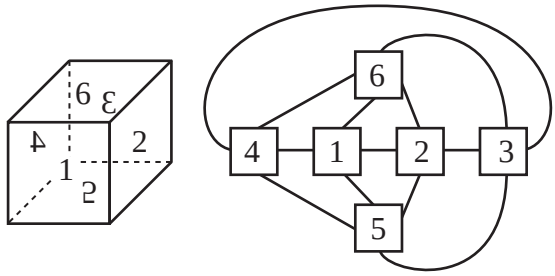

図１　多面体と，面のつながり方グラフ

展開図のグラフは，展開図で繋がっている面を表している頂点を辺で結び，グラフをつくる（図２）．どの展開図のグラフにも，無限

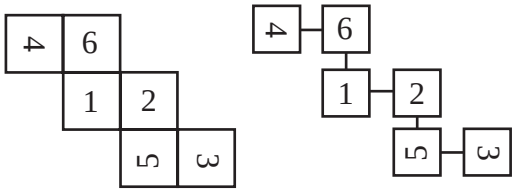

図２　展開図とグラフ

に広がる領域しかなく，（頂点の数）＝（辺の数）＋1 が成り立っていることがわかる．

３．グラフを用いることのよさ

グラフを用いることで，面のつながり方を明確に認識することが可能になる．その結果，以下のような利点が考えられる．

・展開図の組み立て方がわかる

展開図を組み立てたときに，どの辺がどの辺と重なるかは，多面体の面のつながり方に注目すればわかる．例えば，図２の立方体の展開図では，面 1 と 4，1 と 5，2 と 6，2 と 3 が辺を共有することがわかり，さらに立方体のグラフでは各領域が３辺形であることを考えれば，図３のように各面がつながることがわかる．また，立方体ができるということが予想できない場合でも，面 1 と 4 などが辺を共有することは，面 1,6,4 でできた角には他の面が入らないことからわかる．

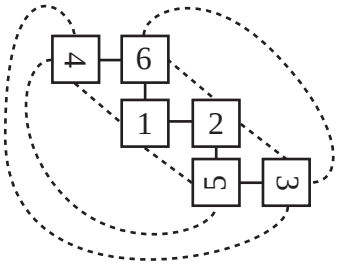

図３　面のつながり方

・複雑な多面体の展開図もつくれるようになる

多面体が与えられたとき，展開図をつくるには，辺を少しずつ切り開いていった様子を想像しながらつくる方法がある．しかし，簡単な多面体は想像することができるが，この方法では複雑な多面体の展開図をつくることは容易ではない．

ここで，想像するのではなく，多面体の面のつながり方グラフを考え，グラフの辺を閉じた領域がなくなるように切っていけば，展開図が得られるという方法を用いれば，複雑な多面体の展開図をつくることができる．または，まず各面をばらばらに考え，順に作りたい多面体の面のつながり方に着目して面をくっつけて展開図をつくるという方法がある．この方法は，多面体の面を表す頂点を辺で結んでいく方法である．

・展開図の重要な構造がわかる

次の教材は，[坪]によるものである．四角錐の展開図とふたのない立方体の展開図の数は同じであり，一対一対応がつくというものである（図 4）．この事実の説明も面のつながり方に着目したグラフを用いると，グラフの形が完全に同じであることから明解に理解することができるであろう．

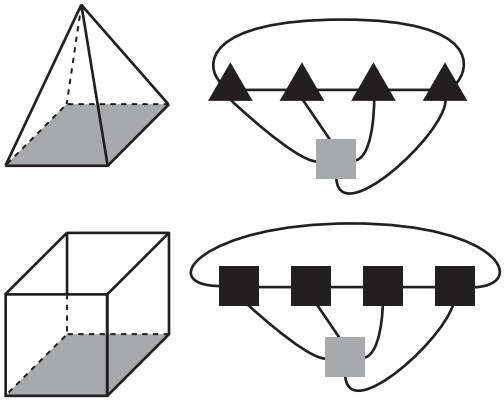

図４　グラフで考える

・必要なのりしろの数がわかる

多面体が与えられたとき，そのどの展開図でも必要なのりしろの数は同じである．この事実もグラフを用いると説明がつく．のりしろが必要な辺は切り開いた辺であるので，切り開く辺の数がどの展開図でも同じであることを示せばよい．展開図のグラフにおいては，常に「（頂点の数）＝（辺の数）＋1」が成り立つことがわかる．つまり，多面体の面の数より 1 小さい辺が展開図では残っている．したがって，展開図を作るには何本の辺を切ればよいかは，（多面体の辺の数）－｛（面の数）－1｝が成り立つことがわかり，常に同じ数ののりしろが必要であることがわかる．

４．付記

グラフを用いて，多面体を考察すると，その他にも多面体に関するたくさんの性質を知ることができる．

奇数角形の面を奇数個もつような多面体は存在しないことを示すこともできる．グラフでは各頂点から出ている辺の本数の総和は，辺の 2 倍，つまり偶数であることがわかり，奇数本の辺が出ている頂点は必ず偶数個存在するからである．このことは偶奇性のよい応

用例である．奇数角形の面を奇数個もつような多面体を作れないことは体験を通しても理解させたい．ポリドロンのような教具を使って，実際にいろいろな多面体を組み立てる活動をし，組み立てられた多面体からいろいろな性質を見出し，説明・証明しようとすることが大切である．

今回紹介した面のつながり方グラフは元の多面体のグラフ（形相図，シュレーゲル図）の双対グラフになっている．ここで，多面体のグラフとは，多面体の一つの面を取り除いて位相的に（伸縮）変形し，平面に描いた図である（図 5）．このとき，このように変形してグラフを描いてもよいし，頂点のつながり方に着目して平面にグラフを描く方法もある．双対グラフとは，平面に描かれたグラフにおいて，元のグラフの面を頂点とし，面と面が繋がっているときに限りそれらの面を表す頂点を辺で結びつくるグラフである（図 6）．

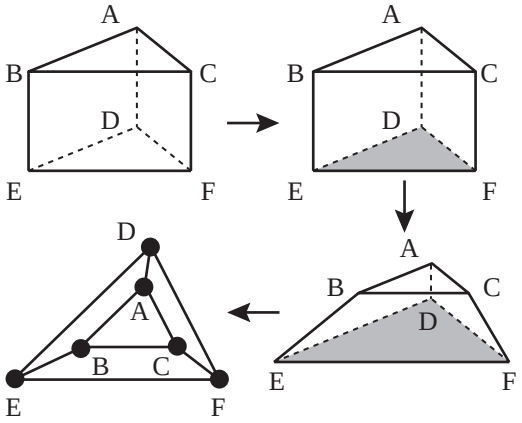

図 5　多面体のグラフ

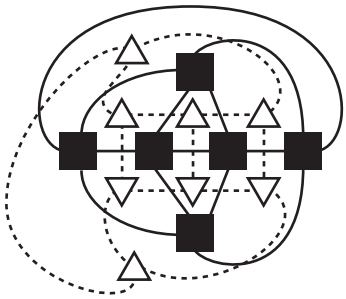

図 6　双対グラフ

多面体のグラフを用いることによって，オイラーの多面体公式，すなわち，どの多面体においても（頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）＝2 が成り立つことを示すことができる．また，立方体と正八面体は双対な関係にあり（図 6），それにより展開図に一対一対応があることが知られている．それらはともに 12 本の辺をもち，立方体の展開図を得るには 7 本の辺を切り開き，正八面体は 5 本の辺を切り開く．このことから切り開く辺と切り開かない辺が対応するであろうと予想され，実際，このことを使って一対一対応を作ることができる．

さらにオイラーの多面体公式を用いると，六角形以上の多角形のみでできる多面体は存在しないことや正多面体が 5 個しかないことなどを示すことができる．これらを示すには，文字式の不等式を扱うので，不等式の応用例となる．

４．終りに

留意点としては，展開図は空間観念や想像力を培う教材でもあるので，初めからグラフを用いるべきではないと考える．グラフは理解を補ったり発展的な扱いをするときに有効である．

上に挙げたように多面体に関する話題は，偶奇性や不等式を応用すると，多面体のいろいろな性質を示すことができる．オイラーの多面体公式は数学的帰納法を学ぶ上でもよい教材である．したがって，多面体に関する教材は，年次さまざまな角度から取り上げられるとよいであろう．

実践研究を行っていないので，今後行い，改良を加えていきたい．

参考文献

[鈴] 鈴木晋一訳，N.ハーツフィールド，G.リンゲル著（1992）グラフ理論入門，サイエンス社

[坪] 坪田耕三（2006）坪田式算数授業シリーズ③ オープンエンド，教育出版

[長] 長尾篤志・景山三平・長崎栄三編（2006）『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』国立教育政策研究所科研研究成果報告書

[村] 村上一三（1982）美しい多面体，明治図書