第 41 回数学教育論文発表会論文集
論文発表の部

一筆がき問題に関する教材について

花木 良
早稲田大学大学院 教育学研究科

数学とは，現実場面における問題から創造され，よりよく解決しようとする中で発展する学問である．生徒にもそのような活動をさせ，数学と現実場面との関連を理解する力，式や図で表現したりよんだりする力，公理的に考える力を身につけさせたい．

本論文では，一筆がきできない場面における教材と，（離散）グラフから行列を導入し計算し,その結果からグラフの幾何的な性質をみる教材を提案する．行列の計算にはテクノロジーを用い，数値化することのよさも感じさせる．

一筆がきに関する教材は，生徒にとって身近であり，現実場面に対して有用であることが多く，その他の離散数学の話題とも関連していることから，豊かで実りのある題材であることが示唆された．

キーワード：一筆がき，離散グラフ，数学的モデル化

１．はじめに

著者は，数学とは現実場面における問題から創造され，よりよく解決しようとする中で発展する学問であると考え，生徒にもそのような活動をさせ，数学と現実場面との関連を理解する力，式や図で表現したりよんだりする力，公理的に考える力をつけさせたいと教材研究を行っている．

一筆がきに関する話題は，たくさんの数学やパズルの本,教科書で取り上げられている．それは，現実場面に関する問題解決に適しており,数学の縮図を短時間で見ることができ,完結できる話題であるからであろう.しかし,そこからさまざまな現実場面に利用しようとしたり，いろいろな問題をそこから見出したりし，数学を発展させていくようなものがあまり見られなかった．そこで,著者らは,[生]において，一筆がきを利用する現実場面とその場面から数学を発展させる教材を開発した．

本論文では，続編として，一筆がきができない現実場面に関する教材と，よりよい解決を目指すために，グラフ[注1]から行列を導入し，演算を自然に定義し，計算結果からグラフの幾何的な性質をみる教材を提案する．さらにテクノロジーを利用し行列の計算をすることでグラフを数値化することのよさも感じさせる．一筆がき問題を現実場面と対応させてよりよい解決を考えると，実に多くの離散数学の話題と関連があることがわかり，豊かで実りある題材であることがわかる．

この分野の先行研究は,［西］,［長］,［鈴 1］,［鈴 2］,［著 1］,［著 2］,［著 3］などやアメリカの教科書（［A］,［N］）がある．［日］においては,『数学の新しい分野の出現に対応し,現行でも一部扱われている「グラフ理論」を項目として導入し，オプション科目の中に配置したい』とあり，時代に合った離散数学の教材研究の重要性が叫ばれている．

本論文では,［生］での教材で,グラフ,次数,偶点や奇点[注2]の定義と，定理としては,「(頂点の次数の総和）＝2 ×（辺の本数)」,「グラフが始点と終点が同じ一筆がき可能な必要十分条件は頂点が偶点のみ」で,「始点と終点が異なる一筆がき可能な必要十分条件は奇点が 2 つでそれらが始点と終点になることである」ことを学んだと仮定し，始める．その他，本教材は，予備知識としては算数程度で十分であるが，議論の複雑さから考えて高校生向けであると考える．また，グループ学習をさせるのもよいと考える．

２. 一筆がきできない問題に関する教材

問　図 1 のような村があります．郵便配達員は，郵便局から毎日図にあるすべての家に郵便物を届けないといけません．そのとき，どのような経路で郵便物を届けると，効率的ですか？

この問題を理想化させ，グラフとして考えると，図 2(1) のようになり（［生］において

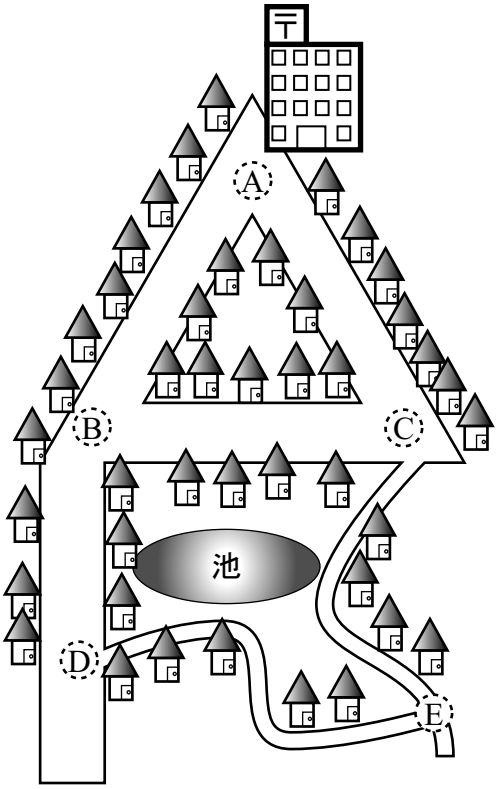


図 1　問題 1 の村の図

大きい道では片側ずつ配るほうがよいという案を得ている)，一筆がきはできない．つまり，2 度通らないといけないところが出てくる．生徒は，人の動きは一筆がきだから，グラフに辺を加えて，一筆がき可能なグラフにする必要があることに気づくであろう．そして，どこに辺を加えたら，効率的であるかを考えるであろう．

この問題のように奇点が 2 つだけなら，それらを結ぶ最小の辺を通る道の辺を 1 本ずつ増やせばよいことがわかり，それを結ぶ最小の辺の数は 2 であり，生徒は，この解答にたどり着くだろう．ここで，BC と BD に辺を加えるか CE と DE に辺を加えるかの選択をしないといけないが，図 1 に戻って考えさせたい．道の長さを図 1 からよみ取ると，BC と BD のほうが短いので，そちらを選び，図 2(2) のような経路のグラフを作るであろう．また，図 2(3) のようなグラフを考えるかもしれない．図 2(1) は BC と BD で道の片側ず

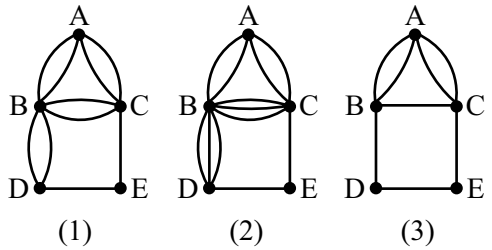


図２　配達経路のグラフ

つ配るときのモデルであるから，BC と BD の道は片側ずつ配るのをやめて，両側を交互に配るようにし，辺を減らすことでグラフを一筆がき可能なものにしている．このようなグラフが生徒から出ない場合は，こちらから提示し，このグラフをよみ取らせたい．

生徒は，この問題から現実場面を考えると同じ 2 本の辺で表されている道でも実際の距離が異なることがあることに気づくであろう．すると，辺に実際の距離の情報も入れたほうがよいのではないかという考えも出て，辺に距離の情報を付加した重みつきグラフ（図 3(1)）を創造するかもしれない．または，距離の長い辺は，辺の数が多くなるように辺の間に頂点を置いて長さを変える方法も考えられる（図 3(2)）．これらのアイデアも出なければ，こちらからグラフを提示し，どのようなことを表しているかを生徒に考えさせたい．

生徒は，グラフが大きくなったとき，正確に 2 つの頂点の間の最短経路（辺の本数が最小の道）を求める方法の必要性を感じるかもしれない．これは，最短経路問題にあたる．この問題については, 重みつきグラフを含め,

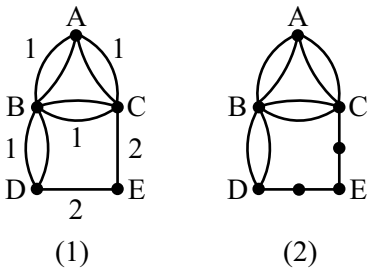


図３　重みつきグラフ

中高生でも理解できる程度のアルゴリズムが知られており，その教材については［著 3］を参照されたい．本論文では，次に紹介する行列を使った計算により最短経路問題を解くことができることを紹介する．

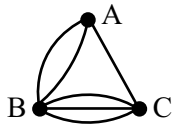
この問題は一筆がき不可能でも，簡単に一筆がき可能にでき解決することができたが，一般には難しい問題[注3]である．生徒には，奇点が 4 個ある場合などを体験させ，難しさを感じさせたい．奇点が 4 個あると，奇点の結び方が ${}_4C_2 \div 2! = 3$ 通りあり，6 組の最短経路の長さを求め，組合せとして最小のものを選ばないといけない．

この問題から, 数学的モデリングを経験し, 現実事象の複雑さや数学化するときの多様さを感じることができ，また，数学を発展させようとすることができる．

３．隣接行列に関する教材

この章では，グラフを数値で表現することを紹介し，さきほどの問題から出てきた最短経路を求める方法を考える．

グラフの頂点を行と列両方に書き，それらを結んでいる辺があるときは，その本数を書き，数を縦横に並べたものを，そのグラフの隣接行列と呼ぶ．グラフの辺は対称的であるから，行列も対称行列になっている．図 4 のようにグラフを隣接行列で数値によって表現することができ，対称行列からグラフを描くこともできる．生徒には，グラフと対称行列（対角成分は 0）が一対一に対応していることを理解させる．隣接行列 1 行 2 列目の数は，A と B を結ぶ辺の数であると同時に，A



$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}$$

図４　グラフの隣接行列表現

からBへ行く長さ1の道の数を表していることにも注意させる．

問　AからAへ行く長さ2の道は何本ありますか？ただし，辺にはラベルがついていると思い，区別します．同様にしてAからB，AからCやその他も考えなさい．

ここで，M^2= 行列（図5）と書いて，行列として長さ2の道の数の書き込みをさせる．このとき，途中式も大切になるので丁寧に書かせる．例えば，AからAへ長さ2で行く道の数は，A→A→A，A→B→AとA→C→Aであるので，0×0＋2×2＋1×1と計算される．次にAからBも同様に計算して，1行2列目に書かせる．他の長さ2で行く道の数も同様にすると，計算の仕方は自然に行列の積の定義になり，グラフを通して，自然に定義することができる．なお，グラフと行列を対応させ，行列の積を理解させ，数学的な表現の「よさ」を感じさせることは，［室］においても提案されている．計算した結果と実際にグラフで数えたときの道の数が一致することから，抽象的な行列の計算の中に幾何的なイメージも沸く．

$$M^2=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0\times0+2\times2+1\times1 & 3 & 6 \\ 2\times0+0\times2+3\times1 & 13 & 2 \\ 1\times0+3\times2+0\times0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array}$$

図5　グラフの長さ2の道を求める

次に長さ3の道をM^3と書くことにし，M^3を求めさせることを生徒に考えさせる．1本の辺を通ることを3度するから，$M^3 = M \times M \times M$と計算されることがわかる．また，長さ3の道は長さ2の道に続いて辺を通っていくとも考えられるので，$M^3 = M^2 \times M$と計算したり，逆に$M^3 = M \times M^2$と計算できることがわかり，結合法則が成り立つことが予想できる．また，行列の積は計算に手間がかかることもわかるだろう．

さらに行列の和を定義するために次の問題を考させる．

問　AからAに行く長さが1または2の道は何通りありますか？同様にしてAからB，AからCやその他も考えなさい．この計算を行列を使って書くにはどうしたらよいかも考えなさい．

すると，行列の和が定義されることになる．これはグラフの連結性の判定するときに使うことになる．

次に，隣接行列からさまざまなグラフの性質をよみ取ることができることを学ばせ，最短経路に関する解決もする．

問　隣接行列だけから，一筆がき可能なグラフであるかどうかの判定することができますか？

生徒は，各行（各列）の数の和がその行（列）が表す頂点の次数になっており，それらの偶奇性を見ればすぐに判定可能であることに気づくであろう．

図2(1)のグラフを行列表現をさせる．そして計算は大変なので，テクノロジーを使って[注4]計算した結果を見せ（図6），次の問を考えさせる．

問　図6の行列から奇点CとDを結ぶ最短の道の長さがよみ取ることができますか？

CとDを結ぶ道の数は，各行列において3行4列目及び4行3列目に表れる数であるの

$$M=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad M^2=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 12 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 9 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^3=\begin{pmatrix} 16 & 32 & 26 & 10 & 8 \\ 32 & 16 & 36 & 28 & 4 \\ 26 & 36 & 16 & 8 & 14 \\ 10 & 28 & 8 & 0 & 10 \\ 8 & 4 & 14 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4=\begin{pmatrix} 116 & 104 & 104 & 72 & 36 \\ 104 & 192 & 100 & 36 & 64 \\ 104 & 100 & 138 & 86 & 24 \\ 72 & 36 & 86 & 66 & 8 \\ 36 & 64 & 24 & 8 & 24 \end{pmatrix}$$

図6　図2(1)のグラフの行列表現

で，M から C と D を結ぶ長さ 1 の道がないことがよみ取れ，M^2 から長さ 2 の道が 4 本あることがよみ取れ，最短の道は長さ 2 の道であることがわかる．このように行列を計算することで最短経路の道の長さを導き出すことができることを理解させ，数値化したことのよさを味わわせる．

計算結果を見るとわかるように，数字がとても大きくなり人間の手で計算することが手間がかかる．そこで，最短の道を見つけたいときに，行列の計算を簡単にできないかを考える．この場合，道の数を省略して，辺や道がある場合は 1 にし，ない場合は 0 に単純化して計算すればよいのではという工夫が考えられるであろう．

4. その他の教材

ループとは，図 7(1) のような同じ頂点を結んだ辺であるが，今までは扱っていなかった．ループという辺を加えてグラフを考えると，今までの定義や定理を見直すことになる．そこで，ループに関して，どのように次数を定義するか行列で表現するかを生徒に考えさせたい．なお，ループも現実場面から導入されるものであるが，ここでは省略をした．

問　ループのないグラフで，（頂点の次数の総和）＝ 2 ×（辺の本数）が成り立っていました．そこでループを加えても，この定理が成り立つようにするには，次数の定義をどのようにしたらよいでしょうか？次数とは頂点から出ている辺の本数でした．

生徒は，辺の本数から，ループは 2 度数えるというようにしたり，頂点の周りから出ている辺の数にしたり，定義を変えないといけないことに気づき，次数の定義を修正するであろう．加えて，次の問題を考えさせる．

問　図 7(2) のグラフには何本の辺がありますか？

グラフでは（頂点の次数の総和）＝ 2 ×（辺の本数）が成り立っているから，辺の本数を数えるには，次数の総和を出して，それを 2 で割れば辺の本数が求まることがわかる．この問から，ループを加えても公式が使えることのよさ，次数とは頂点の周りだけを見て求まる値で，そこから辺の本数を求めらえることができることを伝えたい．

このように定義を修正すると，一筆がきに関する定理も成り立つことがわかる．前にあった公式を成り立たせるように定義を見直し修正する活動は，公理的に考える力をつける上で重要である．

行列でのループの扱いは，各列の数の和が次数であったことから 2 と表すほうがよいと考えられる．辺を 1 本通って戻ってくるのに 2 通りと表していることにもなるが，それはループを右回りするか左回りするかを別に数えていることとよみ取れるだろう．

今までグラフは連結であると常に仮定して考えていた．しかし，一筆がきをするには，たとえすべての頂点が偶点であっても，グラフが連結でないと一筆がきはできない．連結性はグラフを見るとすぐに判断ができることが多いが，行列からでは判断するのが難しい．そこで次の問を考えさせる．

問　図 8 の隣接行列をもつグラフは一筆がき可能ですか？また，グラフを描かず隣接行列を計算し，判定できますか？

連結であるかどうかも，行列からの計算で結論付けるにはどうしたらよいか生徒に考えさせる．連結であれば高々（頂点数－ 1）の長さの道で結ばれているはずであることがわ

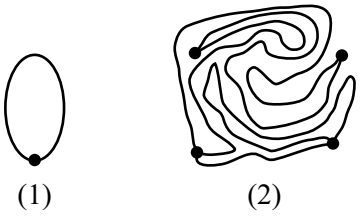


図 7　ループ

$$M=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

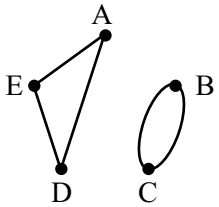


図 8　連結でないグラフ

かり，それの存在を計算で出すには，$M + M^2 + M^3 + \cdots + M^{\text{頂点数}-1}$ の対角成分以外の値が 0 でないことを見ればよいことがわかるであろう．

5. おわりに

実際には，生徒が思いつかないような発想もあるかもしれない．その場合は，教える側がグラフを見せたり行列や式を見せたりして，そこにある発想をよみ取らせ，数学のよさを味わわせたい．ページの関係上，問題やグラフの例は少なく挙げたが，実際に授業でやるときには，たくさんの例を見せたり練習問題をさせたりする必要があると考える．

このように本教材を通して，生徒は数学を創造・発展させる活動を経験し，さまざまな力がつき，その中で数学的表現のよさや公理的に考えることのよさを感じることができるであろう．

注

1）最近では, 離散グラフを呼ばれることもあるが, 本論文ではグラフと呼ぶ

2）グラフとは図 2 にあるような頂点と呼ばれる点と異なる頂点を結ぶ辺でできた図形である．次数とは頂点から出ている辺の本数で，偶点とは次数が偶数の頂点，奇点とは次数が奇数の頂点である

3）中国人郵便配達問題と呼ばれる問題である

4）例えば，エクセルで行列の積の計算ができる

参考文献

［A］Arthur F. Coxford, et al（1998）“Contemporary Mathematics in Context”,Course1 PartA，McGraw-Hill

［J］John Clark, Derek Allan Holton（1991）“A FIRST LOOK AT GRAPH THEORY”, World Scientific

［N］Nancy Crisler, Gary Froelich（2006）“Discrete Mathematics Through Applications（Third Edition）”, W H Freeman & Co.

［NG］N. ハーツフィールド・G. リンゲル著，鈴木晋一訳（1992）『グラフ理論入門』サイエンス社

［生］生野隆，著者（2007）「一筆がき問題に関する教材研究～中学・高等学校向け離散グラフ教材～」第 40 回数学教育論文発表会論文集 pp.277-282

［杉］杉山吉茂（1986）『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』東洋館

［鈴 1］鈴木晋一（1998）「幾何教材としてのグラフ理論」早稲田大学数学教育学会誌 1998 第 16 巻第 1 号, pp.6-43

［鈴 2］鈴木晋一（2005）「中学・高等学校の幾何教材の研究」早稲田大学数学教育学会誌 2005 第 23 巻 第 1 号, pp.16-25

［著 1］著者（2005）「グラフ理論の教材化の試み～中学・高校の離散数学教材～」第 38 回数学教育論文発表会論文集，pp.649-654

［著 2］著者（2006）「中学・高校数学におけるグラフ理論の活用」2005 年度早稲田大学大学院修士論文

［著 3］著者（2007）「最短経路問題に関する教材研究～中学・高等学校向け離散グラフ教材～」第 40 回数学教育論文発表会論文集，pp.853-858

［長］長尾篤志・景山三平・長崎栄三編（2006）『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』国立教育政策研究所科研研究成果報告書

［仲］仲田紀夫・吉村啓（1982）『数学科での教材開発 教職数学シリーズ 実践編⑤』共立出版

［西］西村圭一（2007）「中等教育における離散グラフを用いた数学的モデル化に関する研究」日本数学教育学会誌『数学教育』第 89 巻第 3 号, pp.8-16

［日］日本数学教育学会（2006）『新しい時代の算数・数学教育を目指して―算数・数学科学習指導要領改訂についての要望―』

［室］室岡和彦（1999）『数学科教育』学文社, p.148-159

［和］和田義信編著（1977）『教育学研究全書 第 13 巻 考えることの教育』第一法規