

On strongly almost trivial spatial graphs

花木 良*

早稲田大学大学院教育学研究科

概要

グラフ G の空間埋め込みが、非自明で、 G の任意の真部分グラフ H に対して射影像が自明になる射影をもつとき、その空間埋め込みを強概自明 (SAT) という。SAT な空間埋め込みをもつグラフともたないグラフが存在することが知られており、今までに SAT をもつグラフ、グラフが SAT をもたないための十分条件が知られているが、あまり研究は進んでいない。本文では、新たに発見した SAT をもつグラフおよび SAT をもたないことが示せたグラフの紹介をする。SAT の応用として、IP に関する話題も紹介する。また、グラフが SAT をもつ (もたない) という性質はマイナーに遺伝しないことも示す。

1 はじめに

1.1 定義

有限グラフを G とし、自然に位相空間と考えます。 G から 3 次元空間 \mathbb{R}^3 への埋め込みを、 G の空間埋め込み (spatial embedding) といい、その像を空間グラフ (spatial graph) といいます。 f, f' を G の空間埋め込みとしたとき、 f と f' が同値 (equivalent) であるとは、 $h \circ f = f'$ となる \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への向きを保存する自己同相写像 h が存在するときをいいます。 f が自明 (trivial) であるとは、 f と同値な G から \mathbb{R}^3 の部分空間 \mathbb{R}^2 への埋め込み f' が存在するときをいいます。 G が平面的 (planar) であるとは、 G から \mathbb{R}^2 への埋め込み f が存在するときをいいます¹。したがって、 G が平面的であるときに限り、 G は自明な空間埋め込みをもつこととなります。

G から \mathbb{R}^2 への連続写像 φ が G の射影 (projection) であるとは、 φ の多重点が有限個の辺の横断的な二重点のみのときをいいます。このとき、射影の像を射影像 (regular projection) といいます。二重点を交差点 (crossing) といい、さらにある 1 本の辺の像の二重点を自己交差点 (self-crossing) といいます。 φ が空間埋め込み f の射影であるとは、 f と同値な $\varphi = \pi \circ f'$ となる f' が存在するときをいいます。ここで π は \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^2 への自然な射影です。このとき、 f は φ から得られるといいます。射影 φ が自明 (trivial) であるとは、 φ から得られる空間埋め込みが自明のものだけのときをいいます。

*r.t@fuji.waseda.jp

¹ちなみに、平面的グラフの任意の平面への埋め込み f, f' は、 \mathbb{R}^3 内で同値であることが知られています ([7])。

グラフ G の空間埋め込み f が概自明 (almost trivial) であるとは, G の任意の真部分グラフ H に対して $f|_H$ が自明な空間グラフのときをいいます. 概自明の定義の条件に「 f は非自明である」を加えたものを極小非自明 (minimally knotted) といいます. 図 2 の f は, θ 曲線の極小非自明な空間埋め込みの例です. 絡み目でいうと, Brunnian はこの性質を満たしています (図 1).

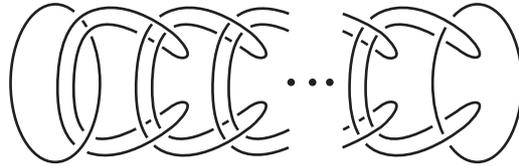


図 1: Brunnian 絡み目

グラフ G の空間埋め込み f が強概自明 (strongly almost trivial) であるとは, f が非自明で, G の任意の真部分グラフ H に対して $\hat{f}|_H$ が自明となる f の射影 \hat{f} が存在するときをいい, 強概自明を省略して SAT と記し, SAT な空間埋め込みを SAT 埋め込みと記します. そのような射影の像を SAT 射影像と記します. 例えば, θ 曲線は SAT 埋め込みをもつことが知られています (図 2).



図 2: θ 曲線の SAT 埋め込み

1.2 SAT と関連すること

グラフ G の射影 φ が特定可能 (identifiable) であるとは, φ から得られるどの空間埋め込みも同値であるときをいいます. 特定可能な射影を IP と記します. 例えば, 平面的グラフの \mathbb{R}^2 への埋め込みは IP です. また, 図 3 も IP です. グラフ G の射影 φ が概特定可能 (almost identifiable) であるとは, G の任意の真部分グラフ H に対して, $\varphi|_H$ が IP であるときをいいます. 概特定可能な射影を AIP と記します. IP なら AIP ですが, 逆は成り立ちません. その反例としては, 図 5, 6, 7 の空間埋め込みの図の上下を忘れて射影像と思ったものがあります.

非平面的グラフは, IP をもたないことが知られています ([2, Proposition 1.1]). そして, 平面的グラフの IP の特徴として, 次の定理が知られています.

定理 1.1 [8, Theorem 1.2] 平面的グラフの射影が IP であるための必要十分条件は, その射影から得られるすべての空間埋め込みが自明であることである.

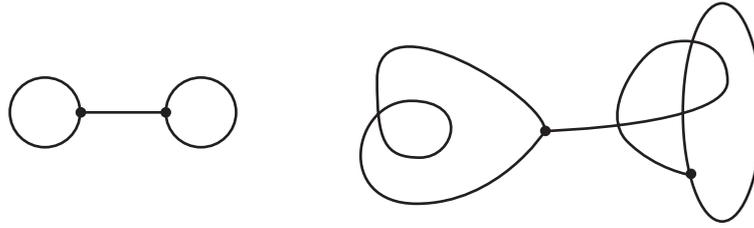


図 3: 手錠グラフの IP

つまり, IP は自明な射影に限るということです. そして, SAT との関連として, 次の定理が知られています.

定理 1.2 [8, Theorem 1.4] 平面グラフ G を SAT 埋め込みをもたないグラフとする. G の射影が IP であるための必要十分条件は, それが AIP であることである.

つまり, SAT 埋め込みをもたないグラフの IP の判定は, 真部分グラフの IP を見ればよいということです. そして, さらにその部分グラフが SAT をもたないなら, IP の判定はその真部分グラフに帰着できます. したがって, SAT をもつグラフともたないグラフが完全に分類されていれば, 特定の (SAT をもつ) 部分グラフから元のグラフの IP が判定できることとなります.

$G = S^1$ (結び目) の IP は, 図 4 のようなものに限られることが知られています ([13]). ここで, 正則射影像 \hat{P} 上の交差点 c で, $\hat{P} - c$ の連結成分数が \hat{P} より多くなる時, c は本質的でない (nugatory) といいます. ですから, 正確には S^1 の IP は, 本質的でない交差点のみをもつものに限られるということです. $G = S^1 \amalg \dots \amalg S^1$ (絡み目) に関しても同様のことがいえます.

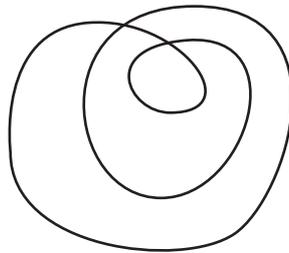


図 4: S^1 の IP

1.3 知られていること

問題 1.3 どのようなグラフが極小非自明な空間埋め込みをもつでしょうか?

この問題には, すべての頂点の次数が 2 以上であるすべての平面的グラフは, 極小非自明な空間埋め込みをもつという結果が知られています ([5], [17]).

このことから, 絡み目では Brunnian があるように, 平面的グラフも同じように極小非自明な空間埋め込みをもつことがわかります.

問題 1.4 どのようなグラフが SAT 埋め込みをもつでしょうか？

こちらは、もつものともたないものが存在することは知られていますが、あまりよくわかっていません。SAT 埋め込みをもつことを知られているグラフは、 θ 曲線と θ_n 曲線 ([11])、手錠グラフ ([15]) くらいです。図 5, 6, 7 が SAT 埋め込みで、これらの図の上下を忘れたものが SAT 射影像になっています。

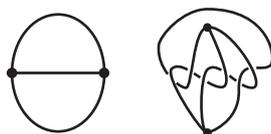


図 5: θ 曲線と SAT



図 6: θ_n 曲線と SAT

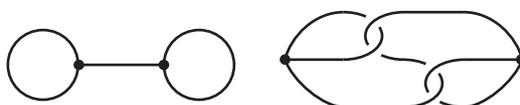


図 7: 手錠グラフと SAT

そして、すべての平面的グラフが SAT 埋め込みをもつというわけではないことが、次の定理とその仮定を満たすグラフの存在からわかります。

定理 1.5 [4, Theorem 1.1] G を、各頂点の次数が 3 以上で、切断頂点をもたない、連結な平面的グラフとする。 G が次の 3 つの条件

- (1) G は多重辺をもたない
 - (2) G の交わりのない 2 辺 e_1, e_2 に対して、それぞれ e_1, e_2 を含むような交わりのない 2 つのサイクルが存在する
 - (3) G の和集合が道と同相となるような 3 辺 e_1, e_2, e_3 に対して、それらを含むサイクルが存在する
- を満たすとき、
 G は SAT 埋め込みをもたない。

この定理の仮定を満たすグラフとしては、図 8 のようなグラフ P_n (n 個の頂点でサイクルを作り、それに北極と南極の頂点を加えてそれらと各サイクルの頂点を結んだグラフ) がありま

す、また、4頂点完全グラフ K_4 は仮定の (2) を満たしません、SAT 埋め込みをもたないことがわかっています ([4])。二重手錠グラフは仮定の (1) と (2) を満たしません、SAT 埋め込みをもたないことがわかっています ([1])。

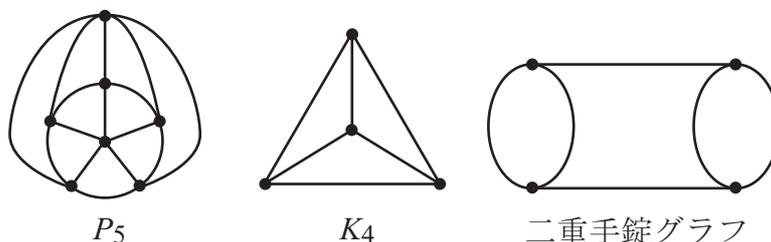


図 8: SAT をもたないグラフ

問題 1.6 G が n 個の S^1 の分離和の場合 (つまり、結び目や絡み目の場合) は、SAT をもつでしょうか？

$n = 1$ のときと $n = 2$ のときは、SAT をもちます。 $n = 1$ のときは、どんな非自明な結び目も SAT 埋め込みです。 $n = 2$ のときは、Hopf 絡み目などが SAT 埋め込みです。 $n \geq 3$ のときは、SAT をもちません。なぜなら、 $n \geq 3$ のとき、SAT をもつとします。1組 S^1 が射影図上で交わっていれば、その部分グラフをとってくると、Hopf 絡み目が得られ矛盾します²し、1組も交わっていなければ、SAT 埋め込みは自明でないことから S^1 のひとつの射影像は自明でなく、その部分グラフをとってくると、自明でない結び目が得られ矛盾します。このように G が n 個の S^1 の分離和の場合だけを考えても、SAT をもつものともたないものがあります。

2 わかったこと

グラフを位相空間として考えているので、次数 2 の頂点はないものとします。ただし、ループ (自分自身を結んだ辺) が 1 本だけ出ている頂点は除きます。

定理 2.1 n -bouquet は、SAT 埋め込みをもつ。ここで、 n -bouquet とは 1 個の頂点とそれを結ぶ n 本のループでできたグラフである。

これは、図 9 で表した空間埋め込みが SAT になっていて、その上下を忘れたものを射影像と思えば、それが SAT 射影像になっています。

次に、グラフ F を林 (forest) とします。ここで、林とは 1 次元ベッチ数が 0 のグラフです。そして、 F の次数 1 の頂点にループをつけたグラフを G_F とします (図 10)。すると、次の定理が成り立ちます。

定理 2.2 $E(F) \neq \emptyset$ ならば、 G_F は SAT 埋め込みをもつ。

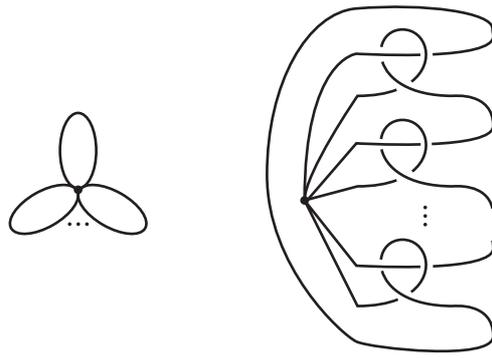


図 9: n -bouquet とその SAT 埋め込み

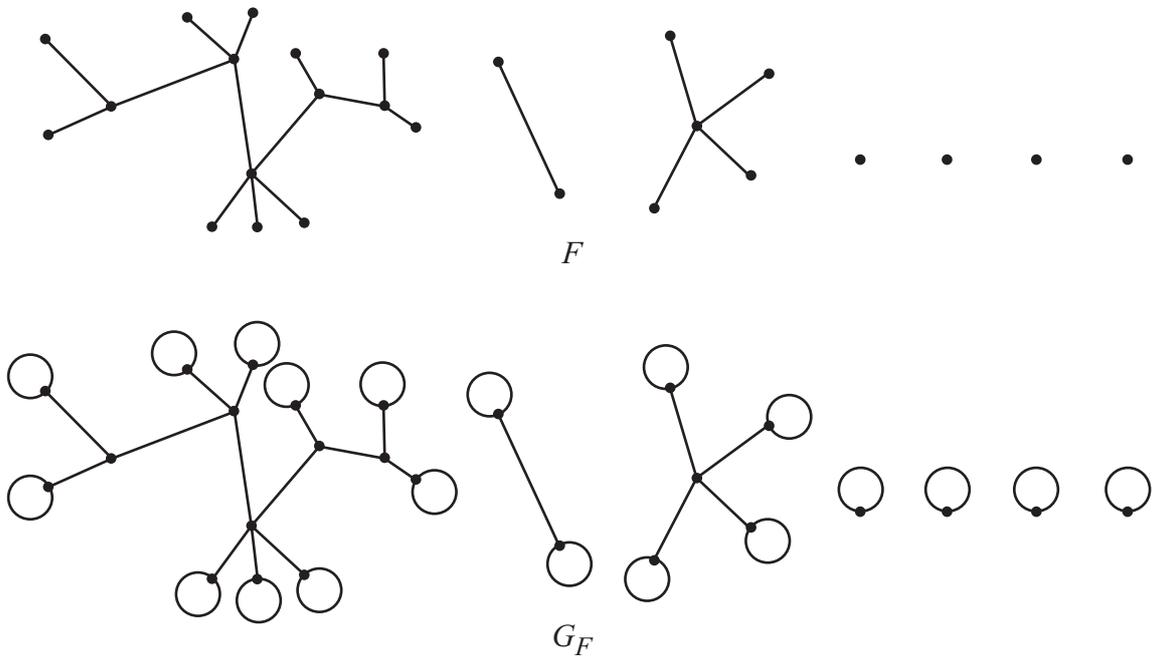


図 10: 林 F と G_F

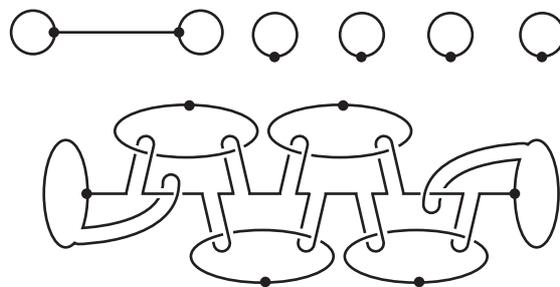


図 11: 定理 2.2 の仮定を満たすグラフと SAT 埋め込み

例えば、 S^1 の 3 個以上の非分離和は SAT 埋め込みをもちませんが、図 11 のように F が 1 本でも辺をもつことで SAT 埋め込みをもつことになります。

さて、ここで図 11 は、いろいろなところにフックをつけた形になっています。これから図の簡略化のためにフックを破線で表すことにします。図 11 を図 12 のように描くことにします。破線で表すことでフックの先端がどちらについているかという曖昧さがありますが、それは同値変形ができます。また、フックの上下の曖昧さもありますが、どちらかが上になっていて引っかかっているということにします。

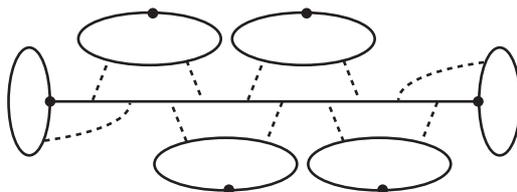


図 12: 図 11 のフック表示

一般に、構成方法は、図 13 の左側のようにループのついていない頂点の周りにフックをつけたり、図の右側のようにフックを増やしたり、図 14 のように連結成分をフックで繋いだりします。具体的には図 15 のようになります。

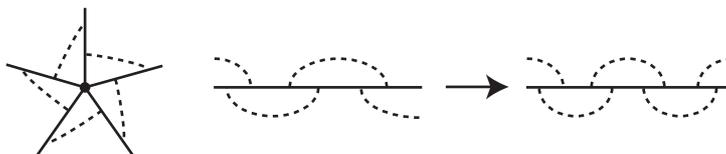


図 13: SAT の構成方法 1

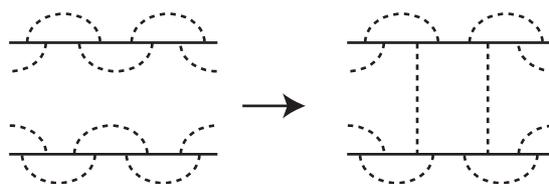


図 14: SAT の構成方法 2

定理 2.3 G は連結で手錠グラフと同相ではないとし、 G が切断辺 e を 1 本もち、 $G - e$ の連結成分を H_1, H_2 とする。このとき、 H_1, H_2 は切断辺をもたず、サイクルをもつならば、 G は SAT 埋め込みをもたない。

この定理から、次の図 16 のようなグラフは SAT 埋め込みをもたないことがわかります。

²ホップ絡み目が得られるという議論は [14] に由ります。

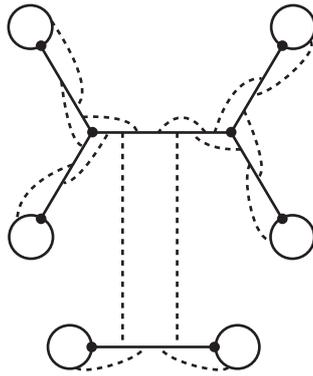


図 15: SAT 埋め込みの具体例

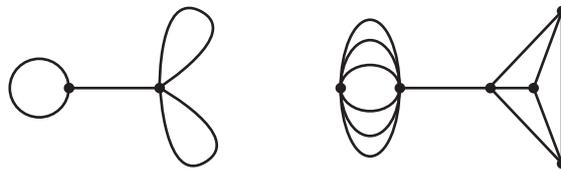


図 16: SAT 埋め込みをもたない, 切断辺をもつグラフ

3 マイナーに関して

グラフ全体の族に, 部分グラフという関係は半順序ですが, グラフの研究をするときには, グラフ全体の族を, これから紹介するマイナーという半順序関係で考えることが有用であることが知られています.

まず, グラフを変形する操作を定義します. G から辺 e を除去とは, G から e のみを取り除くことです. G の辺 e の縮約とは, e の両端点の頂点を縮めて 1 個の頂点にする変形です. ここで, 縮約する辺はループ (自分自身を結んだ辺) ではないことにします.

そして, グラフ G から辺の除去と縮約および孤立点の除去を繰り返して H が得られるとき, H は G のマイナーであるといい, $H \prec_m G$ と記します.

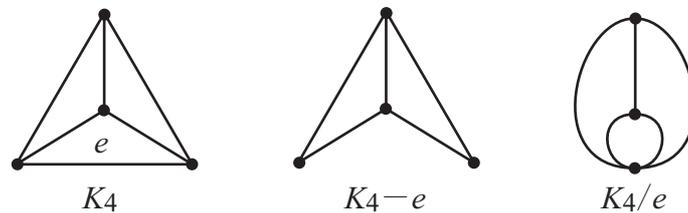


図 17: 辺の除去と辺の縮約

グラフの性質がマイナーに遺伝する (inherit) とは, その性質をもつグラフがあったら, そのグラフのマイナーも同じようにその性質をもつときをいいます. ある性質がマイナーに遺伝するとき, その性質に対する特徴づけが次のように有限個のグラフを用いてできることが知ら

れています ([10])。「グラフがある性質をもつための必要十分条件は、 G_1, G_2, \dots, G_n をマイナーに含まないことである」

例えば、グラフが平面的であるという性質は、マイナーに遺伝し、有名な Kuratowski の定理「グラフが平面的であるための必要十分条件は、 K_5 または $K_{3,3}$ をマイナーに含まないことである」³ という特徴づけがなされています。

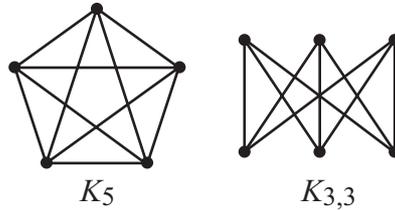


図 18: K_5 と $K_{3,3}$

リマーク 3.1 グラフが SAT 埋め込みをもつ (もたない) という性質はマイナーに遺伝しない。(図 19)

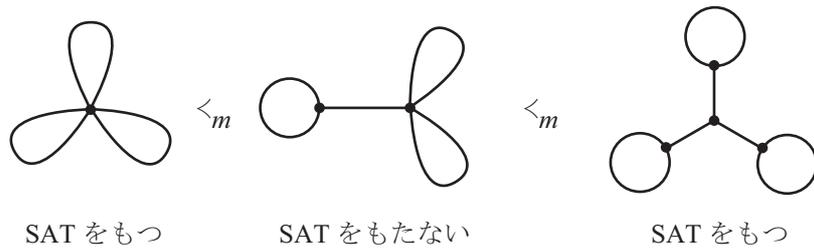


図 19: グラフが SAT 埋め込みをもつ (もたない) ことがマイナーに遺伝しないことを示す例

4 証明方法の一部

定理 2.2 で、得られる SAT 埋め込みが非自明であることを示す方法について紹介します。この方法は、切断頂点か切断辺をもつまたは非連結なグラフの埋め込みの非自明性を示すのに有用です。また、ここではグラフは \mathbb{R}^3 ではなく \mathbb{S}^3 に埋め込まれているものとします。

\mathbb{S}^3 に埋め込まれたグラフが既約 (irreducible) であるとは、その空間グラフは非分離的で、 \mathbb{S}^3 中のグラフと 1 点で交わる任意の 2 次元球面 S に対して、それは 2 次元球面 S で囲まれた 3 次元球体のどちらか一方に含まれるときをいいます。

そこで、切断頂点か切断辺をもつまたは非連結なグラフは、自明な場合には既約ではありませんので、その空間グラフが既約であれば、その空間グラフの非自明性が示せたことになり

³もともとの平面的グラフの特徴づけは、マイナーではなく、「 K_5 または $K_{3,3}$ と同相」という形でしたが、このようにした定理も成り立ちます。

ます．そして，埋め込まれたグラフに対して既約であることを保存する変形が与えられており，それを使うことで，ある空間グラフに対しては非自明性が容易に示せます．

G を S^3 に埋め込まれたグラフとし， S^3 に埋め込まれたディスク D が G にとって良い (good for G) とは， ∂D が G に含まれ， $\text{int}D \cap G$ は多くても有限個の点で，その各点の近傍は図 20 のようになっている場合をいいます．ここで， p と q は自然数です．言い換えると， $\text{int}D$ と G の辺が接してはいけないということです．

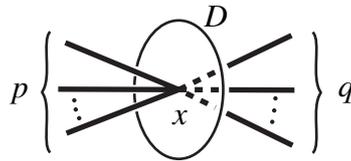


図 20: $\text{int}D \cap G$ の各点の近傍

定理 4.1 ([16]) G を S^3 に埋め込まれたグラフ， D を S^3 に埋め込まれた G にとって良いディスクとする． $\text{int}D \cap G$ が，空集合でないか， $\partial D \cap \text{cl}(G - \partial D)$ が 1 点でないとし， G' を D を 1 点に縮約して G から得られたグラフとする．このとき， G' が既約ならば， G も既約である．

この定理を使うことによって，Borromean 環は，図 21 のようにディスクを縮約していくと (c) が得られ，これは抽象的なグラフとして切断頂点をもたないことから，既約であることがわかり，Borromean 環が非自明であることが示せたこととなります．

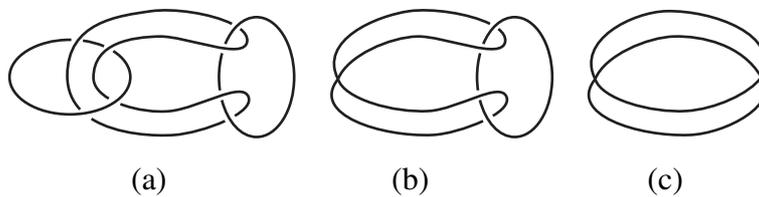


図 21: Borromean 環の非自明性

そして，同様にして，定理 2.2，2.3 に出てくる切断辺をもつグラフの非自明性を証明します．例えば，図 11 は，各ループを縮約すると，図 22 のようになります．得られたグラフは切断頂点をもたないことから，図 11 の空間グラフの非自明性が示せたこととなります．

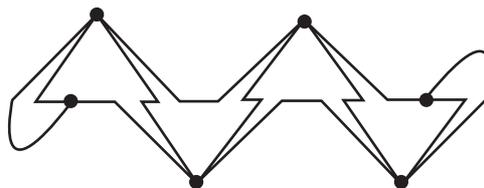


図 22: 図 11 の非自明性

5 謝辞

この研究の契機を与えてくださり，さらに多大な助言をして頂いた新國亮氏に感謝致します．
さまざまなご指摘やご指導をしてくださいました鈴木晋一先生，谷山公規先生，小沢誠先生に
感謝致します．

参考文献

- [1] R. Hanaki: Regular projections of knotted double-handcuff graphs, preprint.
- [2] Y. Huh, K. Taniyama: Identifiable projections of spatial graphs, *J. Knot Theory Ramif* 13 (2002), 991-998.
- [3] Y. Huh, G. T. Jin, and S. Oh: An elementary set for θ_n -curve projections, *J. Knot Theory Ramif* 11 (2002), 1243-1250.
- [4] Y. Huh and S. Oh: Planar graphs producing no strongly almost trivial embedding, *J. Graph Theory*. 43 (2003), 319-326.
- [5] A. Kawachi: Almost identical imitations of $(3, 1)$ -dimensional manifold pairs, *Osaka J. Math.* 26 (1989), no.4, 743-758.
- [6] 小林一章: 空間グラフの理論 (培風館, 1995)
- [7] W. K. Mason: Homeomorphic continuous curves in 2-space are isotopic in 3-space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 142 (1969), 269-290.
- [8] R. Nikkuni: A remark on the identifiable projections of planar graphs, *Kobe J. Math.* 22 (2005), 65-70.
- [9] R. Nikkuni: Regular projections of spatial graphs, *Knot Theory for Scientific Objects*, Osaka City University Advanced Mathematical Institute Studies 1 no. 1, 111-128, Osaka Municipal Universities Press, 2007.
- [10] N. Robertson and P. Seymour, Graph minors XVI. Wagner's conjecture, preprint.
- [11] S. Suzuki: Almost unknotted θ_n -curves in the 3-sphere, *Kobe J. Math.* 1 (1987), 19-22.
- [12] 鈴木晋一: 結び目理論入門 (サイエンス社, 1991)
- [13] K. Taniyama: A partial order of knots, *Tokyo J. Math.* 12 (1989), 205-229.
- [14] K. Taniyama: A partial order of links, *Tokyo J. Math.* 12 (1989), 475-484.
- [15] K. Taniyama and C. Yoshioka: Regular projections of knotted handcuff graphs, *J. Knot Theory Ramif.* 7 (1998), 509-517.
- [16] K. Taniyama: Irreducibility of spatial graphs, *J. Knot Theory Ramif.* 11 (2002), 121-124.
- [17] Y. Q. Wu, Minimally knotted embeddings of planar graphs, *Math. Z.* 214 (1993), 653-658.

〒 169-8050 東京都 新宿区 西早稲田 1-6-1 早稲田大学 教育学部 数学科