結び目，絡み目及び空間グラフの準射影図について

早稲田大学大学院教育学研究科
花木 良

1　はじめに

結び目，絡み目及び空間グラフを，3 次元球面 $\mathbf{S}^3$ に埋め込まれた円周，何個かの円周の直和やグラフとします．**射影像〔projection〕**とは，結び目，絡み目及び空間グラフを 2 次元球面 $\mathbf{S}^2$ へ自然に射影したときの像で，その多重点は辺の横断的な二重点のみであるものです（図 1）．**射影図〔diagram〕**とは，それらすべての二重点に上下の情報が入ったものです．射影図は，一意に結び目，絡み目及び空間グラフを表しています．また，二重点で上下の情報が入っているものを交点と呼びます．

射影像だけを見て，もとの結び目，絡み目及び空間グラフが自明（非自明）であるかどうかを判定することは，特別な場合を除いて，できません．それは，各二重点に上下どちらの情報が入るかわからないためです（図 1）．

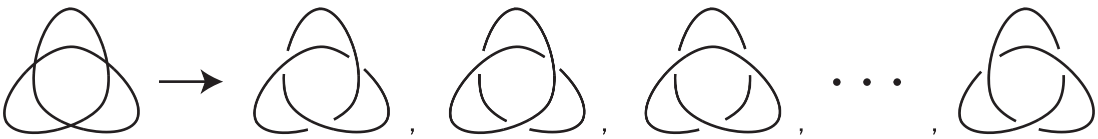


図 1: 射影像とそれから得られる射影図

そこで，本研究では，射影像に対して，どの二重点の，どのような上下の情報さえわかれば，その他の二重点の上下の情報に依らず，自明（非自明）であると判定できるかを考察します．ここで，一部の二重点には上下の情報が入っているものを**準射影図〔pesudo diagram〕**と定義します（図 2）．この研究を始める契機としては，DNA 結び目の研究もあります．それは，DNA 結び目の実際の写真を見たとき，二重点の上下がはっきりわかる部分とわからない部分が存在していたこと，交差交換（二重点の上下の入れ換え）の役割を果たす酵素（DNA トポイソメラーゼ）の存在が知られていることです．

射影像に対して，最小で何個の，どの二重点に，どのような上下の情報がわかれば（どの二重点をうまく交点に変えれば），自明（非自明）であると判定できる準射影図が得られるかを考えます．その最小の交点数を**自明化数〔trivializing**

number〕（**非自明化数〔knotting number〕**）と呼びます．図 1 の射影像から図 2 の自明であると判定できる準射影図が得られ，自明化数 1 である射影像は存在しないことがわかるので，図 1 の射影像の自明化数は 2 となります．

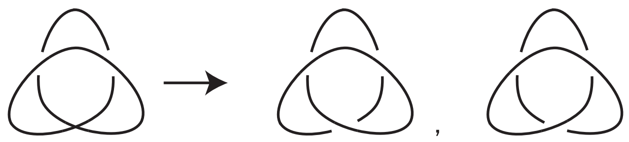


図 2: 準射影図とそれから得られる射影図

2　主結果

結び目の射影像について，次の 4 つの命題を得ました．

命題 2.1 任意の偶数 n に対して，自明化数 n となる射影像が存在する

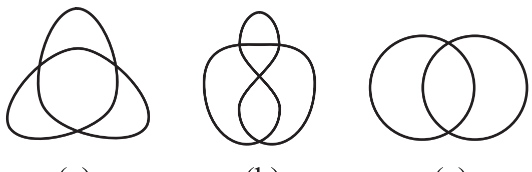
命題 2.2 任意の $n \geq 3$ に対して，非自明化数 n となる射影像が存在する

命題 2.3 任意の n に対して,（自明化数）−（非自明化数）$> n$ となる射影像が存在する

命題 2.4 任意の n に対して,（非自明化数）−（自明化数）$> n$ となる射影像が存在する

絡み目の射影像について，次の定理を得ました．

定理 2.5 （非自明化数）＝（二重点の数）となる射影像は，図 3 の 3 つの射影像のどれか 1 つに自明なサークルを加えたものに限る



(a)　(b)　(c)

図 3: （非自明化数）＝（二重点の数）となる射影像

参考文献

[1] R. Hanaki: Psuedo Diagrams of Knots, Links and Spatial Graphs, preprint.