Pseudo Diagrams of Knots, Links and Spatial Graphs

花木 良*
早稲田大学大学院教育学研究科

概 要

本研究の目的は，射影像から結び目，絡み目及び空間グラフの自明性及び非自明性を調べることです．そこで，一部の二重点に上下の情報を与えた射影像を準射影図と名づけ，得られた結果を紹介します．

1　はじめに

1.1　定義

有限グラフを G とし，自然に位相空間と考えます．G から 3 次元球面 $\mathbf{S^3}$ への埋め込みを，G **の空間埋め込み（spatial embedding）**といい，その像を**空間グラフ（spatial graph）**といいます．特に，G が一つの円周と同相のとき，その像を結び目，G がいくつかの円周と同相のとき，その像を絡み目といいます．空間グラフ $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ が**同値（equivalent）**であるとは，$h(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$ となる $\mathbf{S^3}$ 上の向きを保存する自己同相写像 h が存在するときをいいます．空間グラフ $\mathcal{G}$ が**自明（trivial）**であるとは，$\mathbf{S^3}$ の部分空間 $\mathbf{S^2}$（2 次元球面）上にある $\mathcal{G}$ と同値な空間グラフ $\mathcal{G}'$ が存在するときをいいます．グラフ G が**平面的（planar）**であるとは，G から $\mathbf{S^2}$ への埋め込みが存在するときをいいます．したがって，グラフ G が自明な空間グラフをもつための必要十分条件は，G が平面的であることになります．そこで，本論文では平面的グラフのみを扱います．

G から $\mathbf{S^2}$ への連続写像 φ が G の**射影（projection）**であるとは，φ の多重点が有限個の辺の横断的な二重点のみのときをいいます．このとき，射影の像を**射影像（projection）**といい，$P = \varphi(G)$ で表します．

射影図（diagram）D とは，各二重点に上下の情報を与えた射影像 P をいいます．このとき，D **は** P **から得られた**といい，射影図は一意的に空間グラフ $\mathcal{G}$ を

*r.t@fuji.waseda.jp

表現しています．このとき，P **は** $\mathcal{G}$ **の射影像である**といいます．また，上下の情報の入った二重点を**交点（crossing）**と呼び，上下の情報の入っていない二重点を**前交点（pre-crossing）**と呼びます．射影図は交点をもつが，前交点をもちません．

1.2 研究動機

はじめに，次の問題を考えます．

問題 1 空間グラフ $\mathcal{G}$ とその射影像 P が与えられているとき，P だけをみて，元の空間グラフが自明であるか非自明であるか判定できるか？

答えは，特別な場合を除いて，できません．それは，各前交点に上下どちらの情報が入るかわからないためです（図 1）．

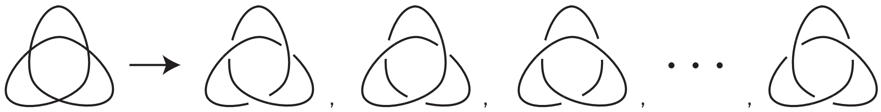


図 1: 射影像とそれから得られる射影図

そこで，次の問題を考え，準射影図の概念を導入します．

問題 2 空間グラフ $\mathcal{G}$ とその射影像 P が与えられているとき，どこの前交点の，どのような上下の情報がわかれば，その他の前交点の上下の情報に依らず，元の空間グラフが自明であるか非自明であるか判定できるか？

この研究を始める契機としては，DNA 結び目の研究もあります．それは，DNA 結び目の実際の写真を見たとき，交点の上下がはっきりわかる部分とわからない部分が存在していたこと，交差交換（交点の上下の入れ換え）の役割を果たす酵素（DNA トポイソメラーゼ）の存在が知られていることです．

1.3 準射影図に関する定義

準射影図（pseudo diagram）Q とは，一部の前交点に上下の情報を入れた射影像 P です．このとき，Q **は** P **から得られる**といいます．準射影図 Q は交点と前交点をもちます．ここで，準射影図は交点をもたないこと，前交点をもたないことも許します．すなわち，準射影図は射影像や射影図であることも許します．準射影図 Q のいくつかの前交点に上下を入れると，他の（同じも許す）準射影図 Q' が得られます．このとき，Q' **は** Q **から得られる**といいます．

準射影図 Q が**自明（trivial）である**とは，Q から得られるすべての射影図が自明な空間グラフを表しているときをいいます．逆に，準射影図 Q が**非自明（knotted）である**とは，Q から得られるすべての射影図が非自明な空間グラフを表しているときをいいます．図 2 で，(a) は自明な準射影図で，(b) は非自明な準射影図で，(c) は自明でも非自明でもない準射影図です．

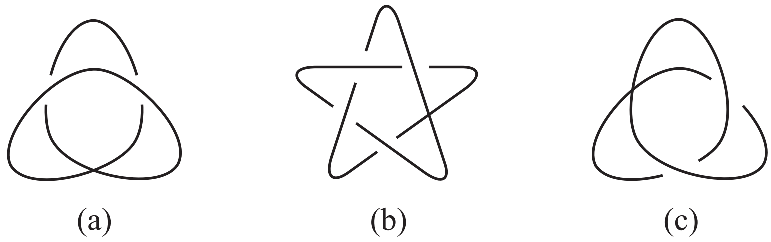


図 2: 準射影図

次に，射影像 P に対して，どれだけ自明に近いか非自明に近いかというような概念を定義します．$tr(P) :=\min\{c(Q)|Q:$ P から得られる自明な準射影図 $\}$ とし，このとき，$tr(P)$ を P の**自明化数（trivializing number）**と呼びます．ここで，$c(Q)$ は Q の交点の集合の濃度とします．逆に，$kn(P) :=\min\{c(Q)|Q:$ P から得られる非自明な準射影図 $\}$ とし，$kn(P)$ を P の**非自明化数（knotting number）**と呼びます．例えば，図 3 において，$tr(P_1) = 2, tr(P_2) = 2, tr(P_3) = 4$ で，$kn(P_1) = 3, kn(P_2) = 4, kn(P_3) = 4$ です．

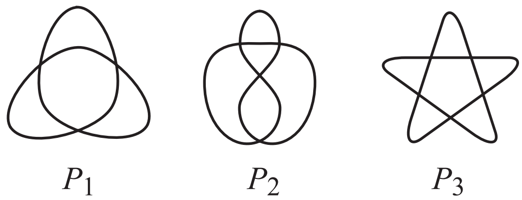


図 3: 自明化数と非自明化数

任意のグラフ G に対して，$kn(P) = \infty$，すなわち，$tr(P) = 0$ となる G の射影像 P が存在します．例えば，G から $\mathbf{S^2}$ への埋め込みの像となる射影像が挙げられます．いくつかの円周の任意の射影像 P は $tr(P) < \infty$ です（このことは任意の絡み目の射影図に対して，交差交換をすることで自明な絡み目を表す射影図が得られることからわかります）．しかし，あるグラフ G に対して，$tr(P) = \infty$，すなわち，$kn(P) = 0$ となる G の射影像 P が存在することが [2] において知られています．例えば，G を正八面体グラフとし，図 4 のような G の射影像 P が挙げられます．

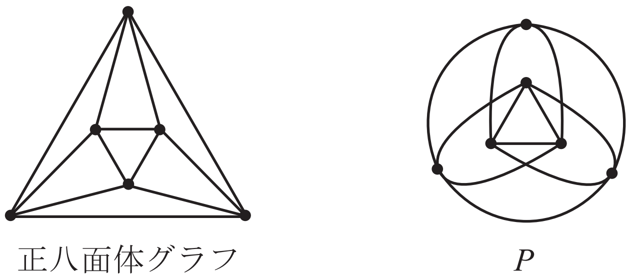


図 4: 正八面体グラフと $kn(P)=0$ となる射影像 P

2 得られた結果

一つの円周（結び目）の射影像に関する結果を中心に，得られた結果を紹介します.

2.1 基本的性質

P を一つの円周の射影像とします．$\mathbf{S^2}$ 上の単純閉曲線 S が P の**分解円周（decomposing circle）**であるとは，P と S との交わりがちょうど 2 つの横断的な二重点のみの集合のときをいいます（図 5）．そして，次の命題が成り立ちます.

命題 1 P を一つの円周の射影像とし，S を P の分解円周とする．$\{q_1, q_2\} = P \cap S$ とし，B_1 と B_2 を $B_1 \cup B_2 = \mathbf{S}^2$ かつ $B_1 \cap B_2 = S$ となる円盤とする．l を q_1 と q_2 を結ぶ S 上の二つの弧の一つとする．$P_1 = (P \cap B_1) \cup l$，$P_2 = (P \cap B_2) \cup l$ とする．このとき，$tr(P) = tr(P_1) + tr(P_2)$，$kn(P) = \min\{kn(P_1), kn(P_2)\}$ が成り立つ.

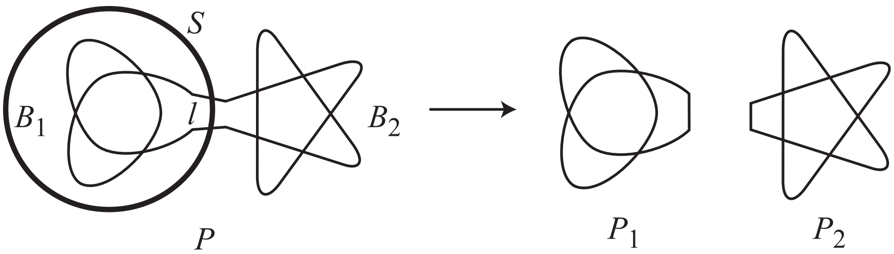


図 5: 分解円周

2.2 自明化数について

自明化数に関する定理や命題などと，一つの円周の射影像の自明化数を求めるコード図を使った方法を紹介します.

定理 2 P を一つの円周の射影像とすると，$tr(P)$ は偶数である．

命題 3 任意の偶数 n に対して，$tr(P) = n$ となる一つの円周の射影像 P が存在する．

命題 3 が成り立つことは，例えば，図 6 の射影像で $m = n + 1$ とすればよいことがわかります．

図 6:

定理 2 の一般化として，次の系が成り立ち，任意のグラフに対しては次の命題が成り立ちます．

系 4 P をいくつかの円周の射影像とすると，$tr(P)$ は偶数である．

命題 5 G を平面的グラフ，P を G の射影像とすると，$tr(P) \neq 1$ である．

系は一般のグラフでは成り立ちません．G を円周とシータ曲線との直和のグラフとすると，$tr(P) = 3$ となる G の射影像 P が存在します（図 7）．さらに，このグラフでは任意の自然数 $n \geq 2$ に対して，$tr(P) = n$ となる G の射影像 P が存在します．

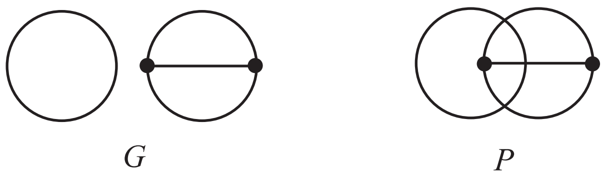
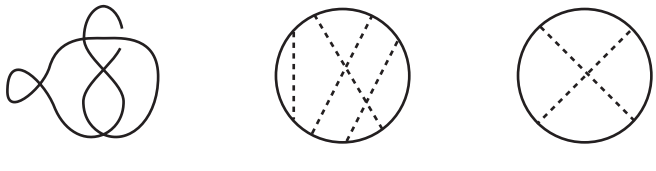


図 7:

次に，コード図とそれを用いて一つの円周の自明化数を求める方法を紹介します．

Q を n 個の前交点をもった一つの円周の準射影図とします．このとき，CD_Q が Q の**コード図**であるとは，CD_Q が各前交点の原像をコードによって結んだ n 個のコードをもつ円周のときをいいます．例えば，図 8 の (a) の準射影図のコード図は (b) です．



(a) (b) (c)

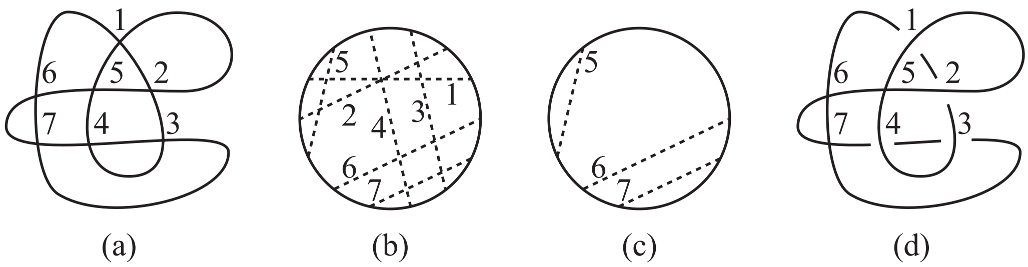
図 8: コード図

補題 6 Q が一つの円周の準射影図とする．CD_Q が図 8(c) のようなコード図を含むなら，Q は自明ではない．

証明. Q' を Q から得られる $CD_{Q'}$ が図 8(c) となる二つの前交点をもつ準射影図とする．p_1, p_2 を Q' の前交点とする．一つの円周に向きを与えて考える．K_1 を D_{++} で表される結び目とする．ここで，$_{++}$ は p_1 と p_2 にどちらの符号の上下の情報を入れたかを表している．K_2, K_3, K_4 をそれぞれ D_{+-}, D_{-+}, D_{--} で表される結び目とする．このとき，$a_2(K_1) - a_2(K_2) - a_2(K_3) + a_2(K_4) = 1$ が成り立つ．ここで，a_2 はコンウェイ多項式の 2 次の係数を表している．したがって，Q から $a_2(K) \neq 0$ となる結び目 K，つまり，非自明な結び目を表す射影図が得られる．
□

補題 7 P を一つの円周の射影像とする．CD を図 8(c) のような部分コード図を含まない CD_P の部分コード図とする．このとき，$CD_Q = CD$ となる P から得られる準射影図 Q が存在する．

この補題の証明は，ここでは省略しますが，構成的にできます．これらの補題から，一つの円周の射影像に対して，コード図を用いて，自明化数とそれを実現する自明な準射影図を求められることがわかります．例えば，図 9(a) の射影像を考えると，そのコード図は (b) です．このコード図からどのように 3 本以下のコードを除いても図 8(c) のようなコード図を含んでしまいますが，4 本のコードを除くと図 9(c) のようなコード図が得られます．したがって，$tr(P) = 4$ であることがわかり，図 9(d) はそれを実現する自明な準射影図です．



(a) (b) (c) (d)

図 9: コード図から自明化数を求める，それを実現する自明な準射影図

そして，補題 6,7 を用いることで，定理 2 を証明することができます．さらに，補題 6,7 を用いることで，次の定理ような射影像の特徴づけをすることができます．

定理 8 P を一つの円周の射影像とする．このとき，$tr(P) = 2$ であるための必要十分条件は，P は図 10(a) の射影像から P の部分弧を図 10(b) のように置き換える操作を何回（0 回も含む）かして得られることであることである．

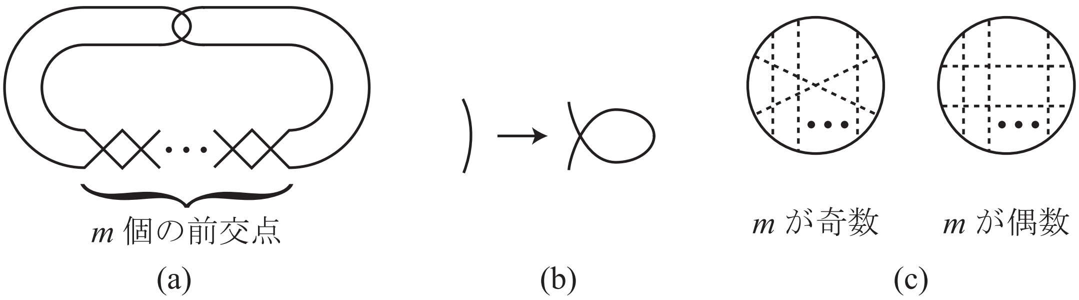


図 10: $tr(P) = 2$ となる一つの円周の射影像とそのコード図

定理 9 P を一つの円周の射影像とすると，$tr(P) \leq p(P) - 1$ が成り立つ．ここで，$p(P)$ は P の射影像の前交点の数である．また，等号が成立するための必要十分条件は，P は図 6 のような射影像であることである．

2.3 非自明化数について

非自明化数に関する命題と $kn(P) = p(P)$ となる射影像の特徴づけの定理を紹介します．

命題 10 $kn(P) \leq 2$ となる一つの円周の射影像 P は存在しない．任意の自然数 $n \geq 3$ に対して，$kn(P) = n$ となる一つの円周の射影像 P が存在する．

存在しないことは，アセンディングを使った議論でわかります．存在することは，例えば，図 6 で $m = 2n - 3$ とすればわかります．

定理 11 P をいくつかの円周の射影像とする．このとき，$kn(P) = p(P)$ であるための必要十分条件は，P が図 11 の射影像の一つから自明な円周を加えることで得られることである．ここで，自明な円周とは，前交点をもたない円周の射影像のことです．

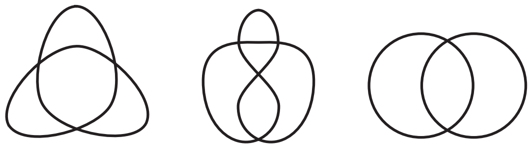


図 11: $kn(P) = p(P)$ となるいくつかの円周の射影像

2.4 自明化数と非自明化数の関係について

次の命題から，自明化数と非自明化数の間には一般的に関係がないことがわかります.

命題 12 任意の偶数 l と任意の自然数 $n \geq 3$ に対して，$tr(P) = l, kn(P) = n$ となる一つの円周の射影像 P が存在する.

このような射影像が存在することは，例えば，図 10(a) の射影像（$m = 2n-5$）を $l/2$ 個連結和すればよいことが，命題 1 を用いてわかります.

3 応用

自明化数と非自明化数の応用を紹介します. P をグラフの射影像とします. $n_{tri}(P)$ を P から得られる自明な空間グラフを表す射影図の数，$n_{nontri}(P)$ を P から得られる非自明な空間グラフを表す射影図の数，とすると，次が成り立ちます.

命題 13 P を $tr(P) \neq 0$ かつ $kn(P) \neq 0$ となるグラフの射影像とすると，$n_{tri}(P) \geq 2^{p(P)-tr(P)+1}$，$n_{nontri}(P) \geq 2^{p(P)-kn(P)+1}$ が成り立つ.

新國氏に質問して頂いたように，この命題と定理 9 から一つの円周の射影像から，自明な結び目を表した射影図が少なくとも 4 個得られることがわかります.

参考文献

[1] R. Hanaki, Pseudo Diagrams of Knots, Links and Spatial Graphs, preprint.

[2] K. Taniyama, Knotted projections of planar graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995), 3357–3579.

〒 169-8050 東京都 新宿区 西早稲田 1-6-1 早稲田大学 教育学部 数学科