

最短経路問題に関する教材研究 ～中学・高等学校向け離散グラフ教材～

花木 良
早稲田大学大学院 教育学研究科

最近, 中等教育のカリキュラムに離散数学 (グラフ理論, アルゴリズムなど) を導入しようという動きが見られ, さまざまな先行研究がある. 離散数学は, コンピュータとの相性のよさから, 近年, 数学の研究も盛んな分野でもある. また, 情報処理技術者試験¹には, 離散グラフを使って解く問題が毎回出題されている.

その中で, 本論文では, 最短経路問題を取り上げる. この問題は, 現実場面での実用性も高く, それらの問題はパズルの発想で解くことができる. そこで, 本教材はそのような視点で開発をした. また, さまざまな応用例や解法の紹介もする.

キーワード: 離散グラフ, アルゴリズム, パズル

1. グラフとは

グラフ (離散グラフ) G とは, 空でない頂点集合 V と辺集合 E ($V \cap E = \emptyset$), 接続関数 $\phi: E \rightarrow \{(u, v) \mid u, v \in V, (u, v) = (v, u)\}$ で定義されるものである. 直感的にいうと, 頂点という点があって, それらの頂点が辺で結ばれている図形である (図 1). このグラフは, 定義からわかるように単純な構造をしていることから, 非常に汎用性が高く, さまざまな現実的な問題や数学的な問題に利用す

ることが可能であり, 図に容易に描くことができることから視覚的にも理解しやすいものである.

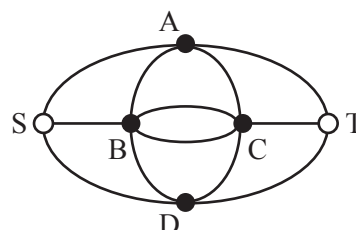


図 1 グラフ (離散グラフ)

2. 研究の目的と方法

グラフ理論やアルゴリズムは、コンピュータサイエンスにとって重要な分野であり、実生活（カーナビのルート検索など）とも密接に関係していることも多く、近年数学として研究が盛んな分野である。そんな中で、離散数学を中等教育に取り入れようという動きも盛んであり、日本数学教育学会（2006）に『数学の新しい分野の出現に対応し、現行でも一部扱われている「グラフ理論」を項目として導入し、オプション科目の中に配置したい』とあり、この分野の教材研究が重要であることがわかる。先行研究としては、西村（2007）、長尾・景山・長崎（2006）、秋山・酒井（2006）、根上（1999）、鈴木（1998）、生野・花木（2007）や花木（2005, 2006）などがある。情報処理技術者試験¹にも、離散グラフを使って解く問題が毎回出題されている。

本論文では、最短経路問題の教材を、予備知識のない生徒が、パズル感覚で自ら無理なく問題を解くことができるような教材の配列や視点で提案する。また、これらの教材を通して、グラフがさまざまな現実問題に役に立つことを実感させたり、現実問題の中には、数学化するとまったく同じ構造になっているものがあることに気づかせ、数学として定式化しておくことのよさに気づかせたりすることができる。また、秋山・酒井では、離散数学を学ぶことで「知識に頼らず、自力で考える力」が身につくことを主張し、例として最小全域木を求めるアルゴリズムは、生徒自ら考え出し証明することができるとしている。西村は、生徒が離散グラフを用いて実社会の問題を解決する学習の中で、『その有効性として、既存の数学的知識に左右されずに、数学的モデル化過程を通した問題解決が実現できること、数学の社会的有用性の感得に貢献できること、数学的に考えを伝え合う活動を促進することを指摘した。また、アルゴリズムを批判的に検討する力が十分ではないこと

がわかった²』としている。本教材においては、それらの点についても考慮した。

3. 原始問題

（1）問題 1³

図 2-a のようなチェス盤があり、ナイトが図の位置にある。ナイトは、図 2-b で示すように、一手で○印のところには移動できる。ここで、図 2-a の状態から、ナイトが各マス目に移動するための最小の手数を考える。このとき、最小の手数が最大になるマス目は、どこで何手かかるか。

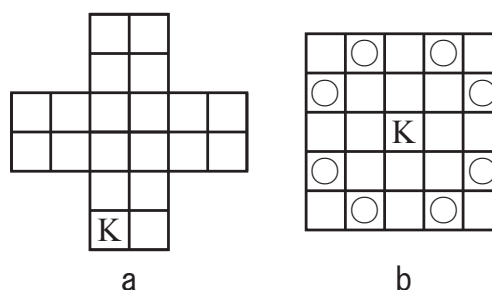


図 2 チェス盤とナイトの動き

この問題は、一手で行けるマス目から順にラベルしていけば解くことができる。まず一手でいけるマス目すべてに 1 とラベルし、次に 1 とラベルされたマス目から一手でいけるマス目すべてに 2 とラベルすればよい。あとはこの操作を繰り返せばよい。

したがって、この問題に手がつかない生徒に対しては、「どこが一手でいけますか？すべてチェックしなさい」という発問が有効であろう。

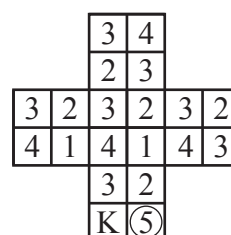


図 3 問題 1 の解答

(2) 問題 2

図 4 のような碁盤目の道があり，A 町から B 町まで最短距離で行く経路は何通りありますか．

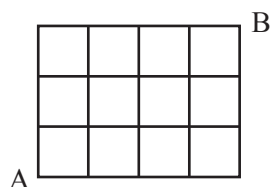


図 4 碁盤目の道，A 町と B 町

高等学校の教科書には、『コンビネーションを使って， ${}_7C_3 = 35$ と解く』と書かれている．しかし，この解法は一般化をするには向かないし，生徒自らがこの解法を発見することは稀であろう．したがって，この解法は取り上げず，次にあげる問題 1 と同じような考えで思いつく解法を考える．

この問題においても，「すぐに最短経路の数がわかる交差点はどこですか？」という発問が有効であり，その考えによって，それらの交差点に最短経路の数をラベルする．図 4 では，A の上にある 3 つの交差点と A の右にある 4 つの交差点がそれにあたり，最短経路の数は明らかに 1 である（図 5）．これらの交差点の最短経路の数がわかることにより，次に * への最短経路の数が求められることがわかり（図 5），* への最短経路の数は，その下と左を通ってくる 2 通りがあるので，下の交差点への最短経路の数と左の交差点への最短経路の数の和， $1 + 1 = 2$ となる．

このように最短経路の数がわかるところか

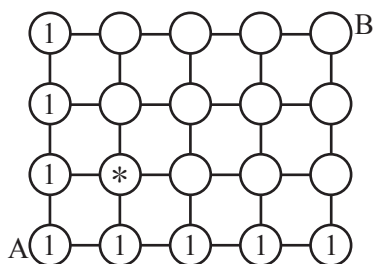


図 5 各交差点の最短経路の数

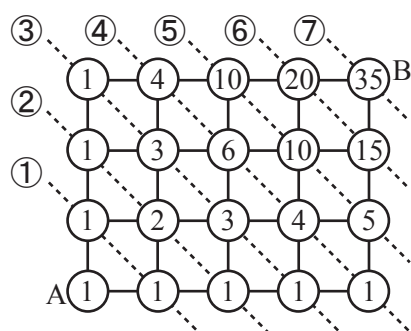


図 6 A からの距離

ら，順序をふみ，各交差点への最短経路の数を数えていくと，次のようになる（図 6）．

4. 問題 2 の解法を振り返る

始めに最短経路の個数を入れたのは，A と，すぐに求めることができる A の上と右にある交差点であった．ここからの操作で，次のことを振り返る．

- ① どのような順番で各交差点への最短経路の個数を求めていったか
- ② その交差点への最短経路の数を求めるときには，何の和をとったか

① は，A からの距離が近い順であることがわかる．図 6 において○囲みの数が A からの距離である．

② は，求める交差点に繋がっていて，A に 1 つ近い交差点の最短経路の数の和をとっていた．これらの振り返りは，次の問題を解くときに役に立つ．

5. 一般化された最短経路問題

(1) 問題 3

都市 $s, a, b, c, \dots, g, t$ があり， s から t に電子機器を飛行機で運びたい．主要な直通路線は次の都市の空港間である． $s-a, s-b, a-b, a-c, a-d, a-e, b-d, b-e, c-d, c-g, c-t, d-f, d-t, e-t, e-g, f-g, f-t, g-t$ の 18 路線である．このとき，積替えが大変なことから，最小の飛行機の数で， t まで電子機器を運びたい．最

小何機でtに運べますか？そのルートは何通りありますか？

この問題は、都市を頂点、路線を辺として、グラフ表現をすることができる。このグラフから最小の飛行機の数、問題1と同様な考えで解くことができる。また、グラフを図7のようにsから近い順に左から並べたり、最小でtに向かうために使われる辺だけを太くしたりしておくと、状況が見やすくなり、ルートの数も数えやすくなる。

ルート数は、問題2とその振り返りから同じように解くことができ、5通りあることがわかる(図7)。

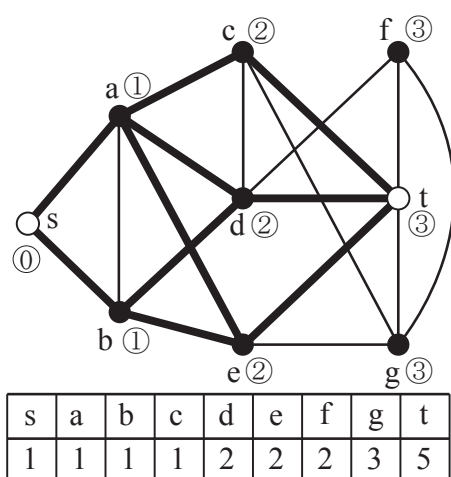


図7 問題3のグラフと解答

(2) 問題4

問題3と同様に、sからtに電子機器を運びたい。しかし、今回はなるべく短時間

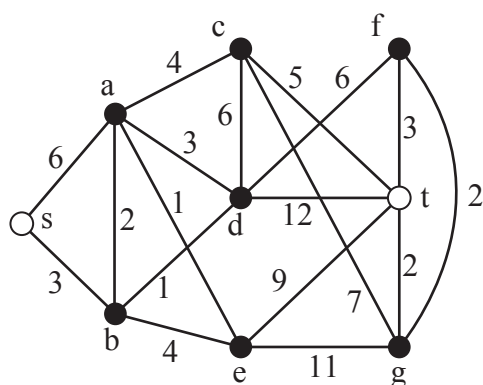


図8 問題4

間でtに運びたい(図8)。図の辺に書かれた数字は、その区間の移動にかかる時間である。このとき、最短の時間でtまで運べますか？また、そのルートは何ですか？

この問題も、sから近い頂点順に最短経路を見つければよい。

sから直接行ける頂点はa, bだけであり、どこに行くにもa, bを通ることになる。またすべての辺の数が正なので、辺を通るたびに経路は大きくなる。saの距離は6, sbの距離は3であるので、sから一番近い頂点はbだとわかり、最短経路を決定できる。

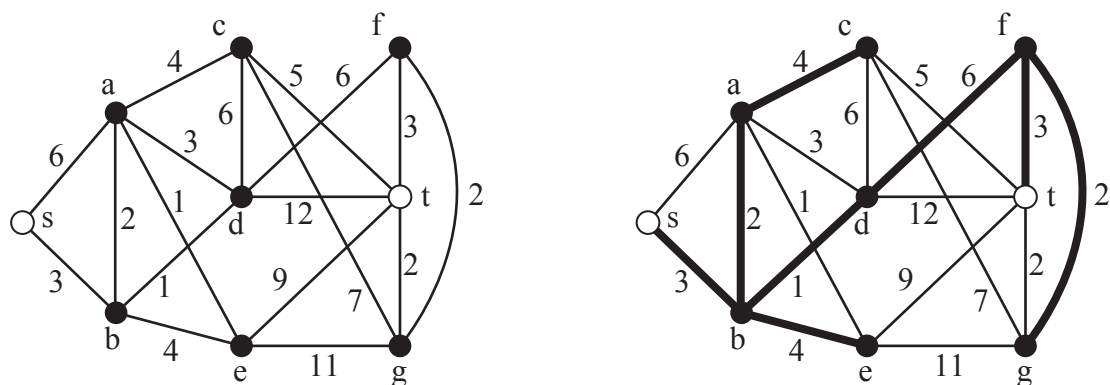
次は、sからの最短経路が決定したbを基点に各頂点への経路を考える。aに対しては経路sa(6)より経路sba(5)の方が短いので、最短経路の候補はsbaになる。bと隣接したdとeについては、経路sbd, sbeが与えられ、それぞれ $3 + 1 = 4$, $3 + 4 = 7$ が最短経路の距離の候補となる。そして、最短経路の候補の中で距離が最小のdは、最短経路が決定する。

上の下線部のポイントを考えさせるためには、「s以外にどこの頂点への最短経路は、すぐに決定できますか？それは、なぜですか？」などの発問がある。

このようにsからの距離が近い頂点を順番に見つけ、その頂点を通る経路とそれまでの最短経路の候補を比較して、決定していけばよいことがわかる。これらのことから、暫定的最短経路の距離と候補、最短経路が決定している都市、のリストが必要であることもわかる。

最終的には、次のようなアルゴリズム(ダイクストラのアルゴリズム)をつくらせる。図9のように、sへの距離、決定していない都市、sからの経路をリストする表をつくり、次のような手順を考える。

① sからの距離を、sは0とし、s以外の頂点は ∞ とする



s からの距離									決定していない都市									s からの経路									
s	a	b	c	d	e	f	g	t	s	a	b	c	d	e	f	g	t	s	a	b	c	d	e	f	g	t	
①	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	⑤	a	b	c	d	e	f	g	t	s									
	6	③	∞	∞	∞	∞	∞	∞		a	⑥	c	d	e	f	g	t		sa	sb							
	5		∞	④	7	∞	∞	∞		a		c	④	e	f	g	t		sba			sbd	sbe				
	⑤		10		7	10	∞	16		①		c		e	f	g	t		sba			sbd	sbe	sbdf		sbdt	
			9		⑥	10	∞	16				c		e	f	g	t					sbd	sbe	sbdf		sbdt	
			⑨			10	17	15				③		f	g	t					sbdc		sbae	sbdf	sbacg	sbact	
						⑩	16	14						⑦	g	t							sbdf	sbacg	sbact		
							⑫	13							⑧	t								sbdf	sbact	sbact	
								⑬								⑨	t								sbdf	sbact	sbact
																	⑩	t								sbdf	

図 9 問題 4 の解答

② s からの距離が最短の頂点を，決定していない頂点リストの中から，決定し丸をつける

③ ②で決定した頂点が t なら，これで s から t への最短経路で決定する

④ ②で決定した頂点と隣接している頂点について，②で決定した頂点を通る経路と現段階での s からの経路を比べる．そして，小さいほうを s からの経路とする

⑤ 決定していない都市のリストから，②で決定した頂点を削除し，②へ再び進む

これらの各ステップの意味を考える．①で s からの距離が ∞ というのは，s からの経路がまだないことを意味する．②では，どの頂点が最短経路を決定できるかを決めている．

また，このアルゴリズムの正当性は，すべての辺が正の数であることを使い，背理法で②で決定している頂点が最短であることを示すことができる．

6. おわりに

問題 4 において，最短時間を最小コストや最短距離としても同様に解くことができる．それらをグラフなしに出題し，グラフ化させることで数学としてはまったく同じになることに気づき，数学の有用性がわかるであろう．これらによって，カーナビの仕組みや電車の乗換案内の仕組みを知ることでもある．

また，バスの運行経路を考えるとときに辺に利用者数を書き，どの経路を通りたくさんの人に利用してもらうかを考える最大経路問題や，マイナスの数がついた辺のあるグラフも，次のようにして，前のアルゴリズムに帰着させて解くことができる．最大経路問題は，与えられた辺の中で最大の数を M とし，各辺の数を，M + 1 からその辺の数を引いた数にすれば，最短経路に帰着させられる．マイナスの辺があるグラフは，各辺の数に，最小の辺の数の反数 + 1 を加えればよい．

辺に数を書いてある最短経路問題を，数の書いてない問題に帰着させる方法もある．そ

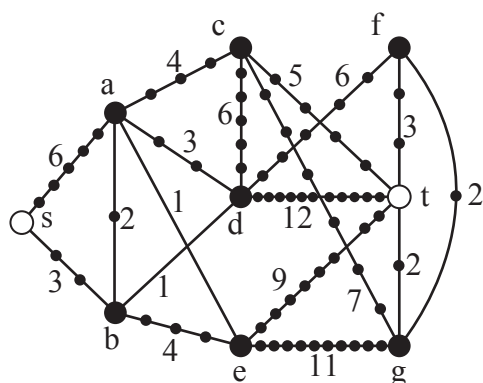


図 10 辺を細分したグラフ

れは、図 10 のように、各辺をその数にあうように細分すればよい。

このように、パズルの思考や離散グラフは実社会に役に立つことがわかる。今後、実践研究も行っていく予定である。

注

- 1) 『情報処理技術者試験は、「情報処理の促進に関する法律」に基づき経済産業省が、情報処理技術者としての「知識・技能」の水準がある程度以上であることを認定している国家試験です。』 (http://www.jitec.jp/1_08gaiyou/_index_gaiyou.html)
- 2) 西村 (2007) の pp.8 より引用
- 3) この問題は、藤村・田村 (1982) pp.13 より引用

引用・参考文献

- John Clark, Derek Allan Holton (1991) “A FIRST LOOK AT GRAPH THEORY”, World Scientific
- Nancy Crisler, Gary Froelich (2006) “Discrete Mathematics Through Applications (Third Edition)”, W H Freeman & Co.
- 秋山仁・酒井利訓 (2006) 「離散数学を高校カリキュラムに導入すべし」教育開発 第 1 号, pp75-90
- 飯高茂・松本幸夫ほか (2005) 『数学 A』東京書籍

柴岡泰光 (1985) 『数学はともだち』岩波ジュニア新書

生野隆・花木良 (2007) 「一筆がき問題に関する教材研究～中学・高等学校向け離散グラフ教材～」第 40 回数学教育論文発表会論文集 (予定)

鈴木晋一 (1998) 「幾何教材としてのグラフ理論」早稲田大学数学教育学会誌 1998 第 16 巻 第 1 号, pp.6-43

鈴木晋一ほか (2002) 『新数学 A』啓林館

長尾篤志・景山三平・長崎栄三編 (2006) 『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』国立教育政策研究所科研研究成果報告書

西村圭一 (2007) 「中等教育における離散グラフを用いた数学的モデル化に関する研究」日本数学教育学会誌『数学教育』第 89 巻第 3 号, pp.8-16

日本数学教育学会 (2006) 『新しい時代の算数・数学教育を目指して—算数・数学科学習指導要領改訂についての要望—』

根上生也 (1999) 「離散数学で変わる数学教育」算数・数学カリキュラムの改革へ—日本の算数・数学教育〈1998〉日数教 YEARBOOK, 産業図書, pp129-146

花木良 (2005) 「グラフ理論の教材化の試み～中学・高校の離散数学教材～」第 38 回数学教育論文発表会論文集, pp.649-654

花木良 (2006) 「中学・高校数学におけるグラフ理論の活用」2005 年度早稲田大学大学院修士論文

藤村幸三郎・田村三郎 (1982) 『数学アイディアパズル』講談社

横森貴 (2005) 『アルゴリズム データ構造 計算論』サイエンス社