第 40 回数学教育論文発表会論文集
論文発表の部

一筆がき問題に関する教材研究
～中学・高等学校向け離散グラフ教材～

生野 隆
花木 良
早稲田大学大学院 教育学研究科

本研究の目的は，一筆がき問題の教材にさまざまな利用価値および教育的価値があることを示すことである．一筆がき問題の教材は，現代化の時代には位相的見方という観点で中学校の教科書に載っており，最近では数学的モデル化を中心としたアメリカの教科書に載っている．本教材では，それらの教材の価値に加え，一筆がき問題の解決は数学的活動を通して行うことができることや，一筆がき問題はさまざまな現実場面に利用できることを示す．また，一筆がき問題はグラフ理論の起源と云われている問題であり，本教材によって，数学の誕生する瞬間や発展する場面をみることもできる．本教材は，中学生・高校生の各過程で楽しめる．さらに，数学的帰納法の新たな見方にも触れる．

キーワード：一筆がき，離散グラフ，数学的モデル化

１．グラフとは

グラフ（離散グラフ）G とは，空でない頂点集合 V と辺集合 E（$V \cap E = \emptyset$），接続関数 $\phi : E \to \{ (u, v) \mid u, v \in V, (u, v) = (v, u) \}$ で定義されるものである．直感的にいうと，頂点という点があって，それらの頂点が辺で結ばれている図形である(図 1)．本論文では，グラフを図形で定義をし，図 1 のように辺同士の交わりのない平面グラフのみをグラフとして扱う．また，グラフはすべて連結[1]であることも仮定する．

このようなグラフは，路線図などに見られる身近な図形である．

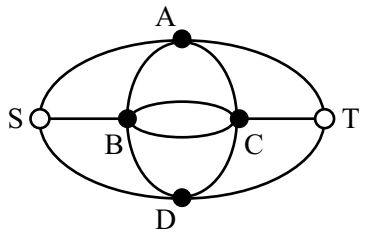

図１　グラフ（離散グラフ，平面グラフ）

２．先行研究と研究の目的

一筆がき問題を数学とし解決したのは，オイラーであり，そのことは『位置の幾何学に関する問題に対する解』（1736 年）と題した論文に書かれている．この論文は位相幾何学とグラフ理論の起源の論文であるとも云われている．また，一筆がき問題は，多くの数学やパズルの本に見られる話題であり，その教育的価値が書かれているもの（仲田・吉村（1982），和田（1977））もあり，位相的な見方という観点から，現代化の時代には教科書にも取り上げられていた．最近では，アメリカの教科書（Arthur（1998））に，「念入りな計画」と題された章で，一筆がきの問題が，学校のロッカーにペンキを効率よく塗るにはどうしたらよいかという現実的な問題を解決するために利用され，取り上げられている．

日本でも最近，離散数学を中等教育に取り入れようという動きが盛んであり，日本数学教育学会（2006）に『数学の新しい分野の出現に対応し，現行でも一部扱われている「グラフ理論」を項目として導入し，オプション科目の中に配置したい』とあり，この分野の教材研究が重要であることがわかる．先行研究としては，西村（2007），長尾・景山・長崎（2006），鈴木（1998, 2005）や花木（2005，2006，2007）などがある．西村は，生徒が離散グラフを用いて実社会の問題を解決する学習の中で，『その有効性として，既存の数学的知識に左右されずに，数学的モデル化過程を通した問題解決が実現できること，数学の社会的有用性の感得に貢献できること，数学的に考えを伝え合う活動を促進することを指摘した．また，アルゴリズムを批判的に検討する力が十分ではないことがわかった』[2] としている．

本論文では，先行研究やアメリカの教科書（Arthur（1998），Nancy（2006））を参考にしながら，グラフ理論の入門と位置づけられる教材として，一筆がき問題を紹介する．教材は，現実場面から数学的モデルをつくり，数学を創るところから始める．さらに，一筆がき問題をいろいろな現実場面で活用する中で，数学を発展させていく．このことで，数学の縮図をみることができる．また，グラフ理論の定理は，グラフを描くこと，観察すること，操作することなどの数学的活動を通して創られることが多く，それらの活動が証明に繋がることも多い．そこで，本教材では，そのような活動に重点にも重点をおく．

３．教材１（郵便配達の経路を考えよう）

問題１

ある村に郵便局があり，ひとりの郵便配達員がいました．村は図 2 の地形で，郵便配達員は郵便局から道沿いに立ち並ぶすべての家に郵便物を毎日届けなくてはなりません．そのとき，どのような経路を通って郵便物を届けると，無駄がなく，効率的ですか？

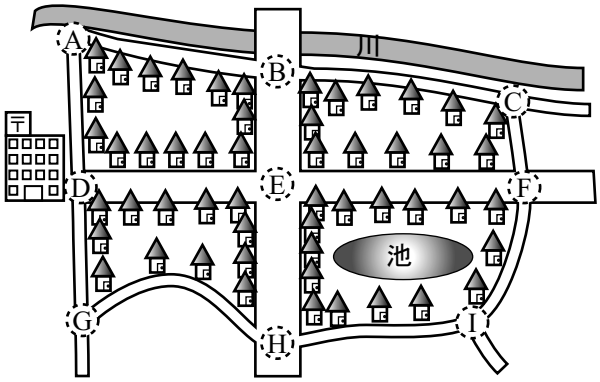

図２　問題１の村の図

この問題では，地図から必要な部分と不必要な部分を考えさせ，理想化，図形化させる．予想される図形としては，図 3 の a，b，c が考えられる．次に，それぞれの図形を描いた理由を考えさせる．c に関しては，通る必要のない無駄な道があることに気づかせる．a，b に関しては，a は，BE 間などの道の両側にある家に対して，両側の家に交互に配っていこうという考えが現れていること，b は道の片側ずつに配っていこうという考えが現れて

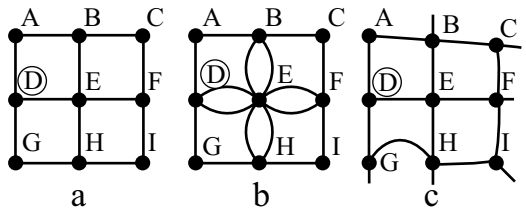

図３　予想される図形

いることをよみとらせる．この図において，道を忠実に表現する必要性はあるのかということも考えさせ，位相的な見方もさせる．

次に，この図形において，一筆がきが一番効率的な配達経路であることに着目させる．そして，図 3 a，b において一筆がきが可能であるかを考察させる．すると，すぐに a は一筆がきが不可能で，b は可能であることがわかる．

そこで，一筆がき可能な図形と不可能な図形の特徴を考えさせる．ここで，一筆がき不可能な図 3 a において，D（郵便局）から一筆がきを試みようとすると，どの点において一筆がきが途切れてしまうのかを観察させ，B，F，H で一筆がきが途切れてしまうこと，それらの点では点から線が 3 本（奇数本）出ていることに気づかせる．また，A, C, E, G, I のように偶数本の線が出ている点では，一筆がきは途切れないことにも気づかせ，それらの頂点の特徴を考察させる．さらに他の図も描かせて図を考察させ，信憑性を増す．このような数学的活動によって，奇点・偶点の違いに気づかせ，それにより法則を見つけさせる．これらの活動は，法則の証明にも繋がる．ここで，これらの問題の考察からグラフを導入し，数学を創る．

４．グラフの導入

図 3 a，b のように，点と，それらの点を結ぶ線でできた図を，グラフと呼び，その点を頂点，線を辺と呼ぶ．図 3 c はグラフではない，なぜなら B や G から出ている辺で頂点を結んでいないものがあるからである．また，頂点から出ている辺の本数を次数と呼び，奇数本の辺が出ている頂点を奇点，偶数本の辺が出ている頂点を偶点と呼ぶ．このとき，一筆がきのできる図形に関して，次のことがいえることに気づかせる．

A．始点と終点が同じ一筆がきができるとき，すべての頂点が偶点である

B．始点と終点が異なる一筆がきができるとき，出発点と終点は奇点で，他の頂点は偶点である

これらの理由は，一筆がきを試みる活動のなかから見つけさせたい．また，A. に関しては，どの頂点を始点にしてもその頂点に戻ってくる一筆がきが可能で，B. に関しては，奇点を始点にしてもう一方の奇点を終点とする一筆がきが可能であることにも気づかせる．証明は，図 4 のように始点，通過点，終点の様子を考えれば十分である．さらに，一筆がきについては逆がいえることも考えさせる．

A'．すべての頂点が偶点であるグラフは，始点と終点が同じ一筆がきができる

B'．奇点が 2 個で，他の頂点が偶点であるグラフは，どちらかの奇点を始点とし，もう一方の奇点を終点とする一筆がきができる

きちんとした証明をするには，背理法や数学的帰納法を必要とする．ここでは，これらのグラフが与えられたときに，どのようにしたら一筆がきを見つられるかを考えさせ，A'．の条件を満たすグラフに対して，次のことを考えさせ，アルゴリズムをつくらせる．一度に一筆がきをしようとしてできなかった

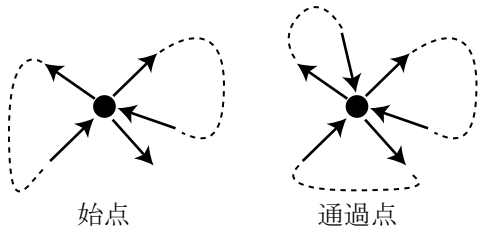

図４　始点，通過点の様子

場合，それを延ばしていく方法はあるかという点である．そして，次のアルゴリズム１を得るであろう．ここで，回路とは始点と終点が同じで, 同じ辺を 2 度通らない経路である．

アルゴリズム１

① 1 つ頂点を選び S とし，S を始点と終点とする回路を，S から辺に色を塗りながら作り，K とする

②与えられたグラフのすべての辺に色が塗られていれば，⑦へ行く

③ K 上の頂点で，まだ色を塗られていない辺と接続しているものを選び，V とする

④ V を始点と終点とする回路を，V から辺に色を塗りながら作り，その回路を K' とする

⑤ K と K' を頂点 V でつなげて新しい回路を作り，この新しい回路を改めて K とする

⑥②へ戻る

⑦ K は，このグラフの一筆がきである

このアルゴリズムを批判的に検討させる．次の点がポイントである．①で回路は必ず S に戻ってくることができるのか，④でも回路は必ず V に戻ってくることができるのかである．

①に関しては，ある頂点から始めて，すべての頂点が偶点であるから入ったら必ず出て行く辺があり，途切れることなく，始めの頂点 S に戻ることができる．このことは，図 3 a の A, C, E, G, I では一筆がきが途切れなかったことや，一度に一筆がきをしようとするとき始点に必ず戻ることからもわかる．

④に関しては，回路 K の辺を除いたグラフもすべての頂点が偶点であることから，①と同様に V に戻る回路があることがわかる．また，このように K の辺を除いたグラフ（このグラフが連結とは限らない）もすべての頂点が偶点であることは，数学的帰納法を使うための本質的な条件である．

５．教材２（展示の経路を設計しよう）

問題２

文化祭でお菓子の歴史についての展示をすることになり，お菓子の歴史を歴史順に展示し，見てもらうことになった．教室のレイアウトの候補が 4 つある（図 5）．この中で一番適切なレイアウトを選択し，経路を設計しよう．

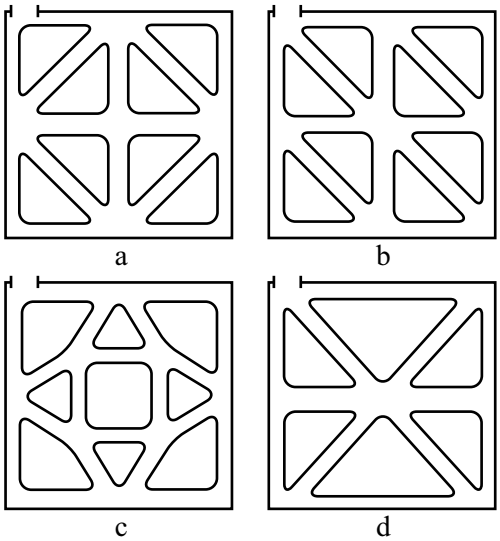

図５　レイアウト

展示物を一度だけ見てすべてを回れるような経路を設計すればよいので，この問題も一筆がきと同じであることに気づく．そこで，図 5 のレイアウトをグラフ化して考える．すると，b と c は一筆がきができることがわかる．しかし，b は奇点が 2 つあるので，左上と右下を始点と終点とする一筆がきしかができず，右下には扉がないことから，このレイアウトは適さない．そして，c が一番適切なレイアウトであることがわかる．

経路を設計させる．ここで，経路の順序がわかるようにするために，辺に向きや数字を入れることにする．

設計した経路の問題点を検証する．一筆がきの道に交差がある経路（図 6）をとりあげ，問題点を考えさせる．問題 1 と違って，たくさんの人が経路を同時に動くので，図の点線の丸に囲まれているところでは，人が交差し

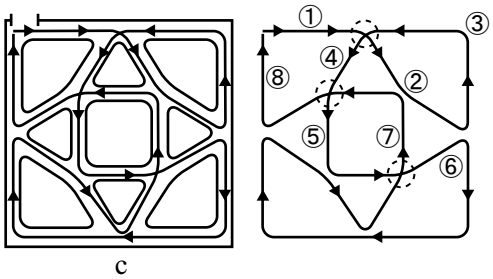

図６　道の交差のある経路

てすれ違い，ここに問題があることに気づかせる．そして，このような問題点のない一筆がきは存在するかを考えさせる．このグラフでそのような一筆がきができたら，一般に「すべての頂点が偶点であるグラフでは，交差のない一筆がきが存在するか」を考えさせる．この問題点は，各頂点のところで起きているので，各頂点での辺の選び方を考えさせる．すると，各頂点で，辿ってきた辺と隣り合っている辺を選べば，交差のない回路ができることに気づく．このように辺を選び一筆がきを作ったときに，それがすべての辺を含んでいればいいが一般には含んでいない．そこで，含んでいないときには，残りの辺とその回路を道に交差がないように繋げて延長することを考えないといけない．そして，これらのことを考慮して，アルゴリズム１に書き加えると次の道の交差のない一筆がきを得るアルゴリズムができる．

アルゴリズム２

① 1 つ頂点を選び S とし，S を始点と終点とする回路を，S から辺に色を塗りながら，各頂点では隣り合い色の塗られていない辺を選んで作り，K とする

②与えられたグラフのすべての辺に色が塗られていれば，⑦へ行く

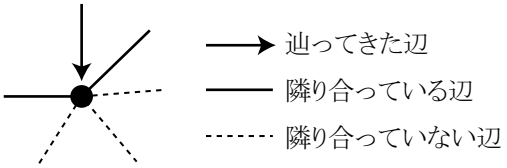

図７　隣り合っている辺

③ K 上の頂点で，まだ色を塗られていない辺と接続しているものを選び，V とする

④ V を始点と終点とする回路を，V から辺に色を塗りながら，各頂点では隣り合う色の塗られていない辺を選んで作り，K' とする

⑤ K と K' を頂点 V で，交差がないようにつなげて新しい回路を作り，この新しい回路を改めて K とする

⑥②へ戻る

⑦ K は，このグラフの回路の交差のない一筆がきである

このアルゴリズムを批判的に検討させる．次の点がポイントである．①で回路は必ず S に戻ってくることができるのか，隣り合い色の塗られていない辺が存在するか，④でも①とどのようなことがいえるかである．

①に関しては，ある頂点から始めて，各頂点で隣り合い色の塗られていない辺が存在することは，色を塗られていく辺はイメージとして端から塗られていくことからわかり，このことにより，必ず S に戻ってくることもわかる．

④に関しては，回路 K の辺を除いたグラフもすべての頂点が偶点であり，色の塗られていない辺がすべて隣り合っていることから，①と同様のことがいえることがわかる．このことも，数学的帰納法を使うための本質的な条件である．

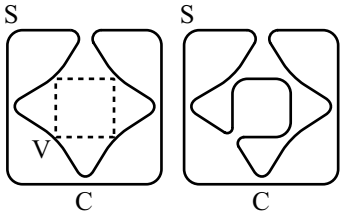

図８　交差のない一筆がき

６．まとめ

このように一筆がきの問題は，さまざまな現実場面に利用でき，数学的活動を通してそれらを解決することができることもわかる．これらのアルゴリズムの創造や記述は中学生ならできるであろう．また高校生なら，本論文では厳密に書かなかった「すべての頂点が偶点であるグラフは，始点と終点が同じ一筆がきができる」や「すべての頂点が偶点であるグラフは，始点と終点が同じ経路の交差のない一筆がきができる」ということを，数学的帰納法を用いて示すことができるであろう．このことにより，数学的帰納法と一筆がきをみつけるアルゴリズムとの密接な関係もわかり，数列とは違った数学的帰納法の意味や役割がみえる．

これらの学習は，グループ学習や課題学習にも適しているので，さまざまな利用価値もある．今後，これらのことを踏まえ，実践研究を行っていく．

注

１）連結とは，任意の頂点から任意の頂点まで辺を通っていけることである

２）西村（2007）の pp.8 より引用

引用・参考文献

Arthur F. Coxford, et al（1998）“Contemporary Mathematics in Context”,Course1 PartA, McGraw-Hill

Nancy Crisler, Gary Froelich（2006）“Discrete Mathematics Through Applications（Third Edition）”, W H Freeman & Co.

N. ハーツフィールド・G. リンゲル著，鈴木晋一訳（1992）『グラフ理論入門』サイエンス社

鈴木晋一（1998）「幾何教材としてのグラフ理論」早稲田大学数学教育学会誌 1998 第 16 巻 第 1 号，pp.6-43

鈴木晋一（2005）「中学・高等学校の幾何教材の研究」早稲田大学数学教育学会誌 2005 第 23 巻 第 1 号，pp.16-25

長尾篤志・景山三平・長崎栄三編（2006）『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』国立教育政策研究所科研研究成果報告書

仲田紀夫・吉村啓（1982）『数学科での教材開発 教職数学シリーズ 実践編⑤』共立出版

西村圭一（2007）「中等教育における離散グラフを用いた数学的モデル化に関する研究」日本数学教育学会誌『数学教育』第 89 巻第 3 号，pp.8-16

日本数学教育学会(2006)『新しい時代の算数・数学教育を目指して―算数・数学科学習指導要領改訂についての要望―』

花木良（2005）「グラフ理論の教材化の試み～中学・高校の離散数学教材～」第 38 回数学教育論文発表会論文集，pp.649-654

花木良（2006）「中学・高校数学におけるグラフ理論の活用」2005 年度早稲田大学大学院修士論文

花木良（2007）「最短経路問題に関する教材研究～中学・高等学校向け離散グラフ教材～」第 40 回数学教育論文発表会論文集（予定）

彌永昌吉ほか（1972）『新しい数学３』東京書籍

和田義信編著（1977）『教育学研究全書 第 13 巻 考えることの教育』第一法規