An elementary set for double-handcuff graph projections

花木 良*
早稲田大学大学院教育学研究科

概 要

グラフ G の非自明空間埋め込みの集合 $\mathcal{E}$ が初等集合（elementary set）であるとは，G の任意の非自明空間埋め込みの射影が，少なくとも $\mathcal{E}$ の 1 つの元の射影となっていて，その性質をもつ極小の集合であるときをいいます．結び目や 2 成分絡み目，手錠グラフ，θ_n 曲線では，初等集合がわかっています．本文では，2 つのサイクルを 2 本の辺で繋いだグラフを二重手錠グラフ（double-handcuff graph）と名づけ，その初等集合について紹介します．

1 序章

1.1 定義

有限グラフを G とし，自然に位相空間と考えます．G から 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ への埋め込みを，**G の空間埋め込み（spatial embedding）**といい，その像を**空間グラフ（spatial graph）**といいます．f, f' を G の空間埋め込みとしたとき，f と f' が**同値（equivalent）**であるとは，$h(f(G)) = f'(G)$（f と f' の像が重なる）となる $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への（向きを保存しなくてもよい）自己同相写像 h が存在するときをいいます．f が**自明（trivial）**であるとは，f と同値な G から $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\mathbb{R}^2$ への埋め込み f' が存在するときをいいます．

G から $\mathbb{R}^2$ への連続写像 φ が G の**射影（projection）**であるとは，φ の多重点が有限個の辺の横断的な二重点のみのときをいいます．このとき，

*r.t@fuji.waseda.jp

射影の像を**正則射影像（regular projection）**といい，$\hat{G} = \varphi(G)$ で表します．同様に G の部分空間 A の像を $\hat{A} = \varphi(A)$ で表します．二重点を**交差点（crossing）**といい，さらにある 1 本の辺の像の二重点を**自己交差点（self-crossing）**といいます．φ が**空間埋め込み f の射影**であるとは，f と同値な $\varphi = \pi \circ f'$ となる f' が存在するときをいいます．ここで π は $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^2$ への自然な射影です．このとき，f は φ **から得られる**といいます．射影 φ が**自明（trivial）**であるとは，φ から得られる空間埋め込みが自明のものだけのときをいいます．

G の非自明な空間埋め込みの集合 $\mathcal{E}$ が G **の初等集合（elementary set）**であるとは，G の任意の非自明な射影は $\mathcal{E}$ の少なくとも一つの元の射影となっていて，$\mathcal{E}$ の真部分集合はこの性質をもたないときをいいます．一般に，$\mathcal{E}$ は G から一意的に決まりません．G の初等集合の元の数の最小値を G **の初等数（elementary number）**といい，$elm(G)$ で表します．

1.2 先行研究

[9] において，$G = \mathbb{S}^1$ のとき，初等集合は三葉結び目の元だけで構成される集合で，$elm(G) = 1$ であることがわかっています．[10] において，$G = \mathbb{S}^1 \amalg \mathbb{S}^1$ のとき，初等集合は三葉結び目と自明な結び目の分離和，ホップ絡み目の元で構成される集合で，$elm(G) = 2$ であることがわかっています．これらの場合は，初等集合は唯一であることもわかっています．[5], [3] において，G が θ 曲線のとき，図 1 で描かれる元で構成される集合は初等集合で，$elm(G) = 3$ であることがわかっています．一般化した結果として，[3] において，G が θ_n 曲線のとき，図 2 で描かれる元で構成される集合は初等集合で，$elm(G) = n$ であることがわかっています．[11] において，G が手錠グラフのとき，図 3 で描かれる元で構成される集合は初等集合で，$elm(G) = \infty$ であることがわかっており，切断辺をもつ連結グラフ（切断辺を除いたグラフの各連結成分にはサイクルが含まれる）に関しても $elm(G) = \infty$ となることがわかっています．

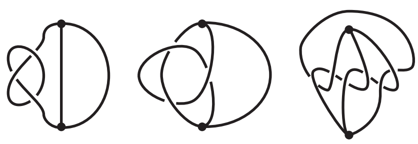

図 1: θ 曲線の初等集合

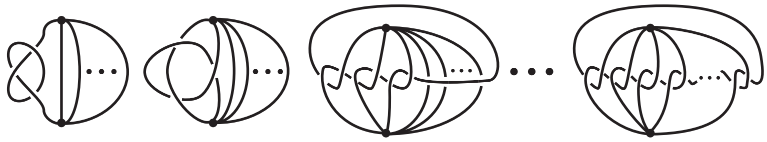

図 2: θ_n 曲線の初等集合

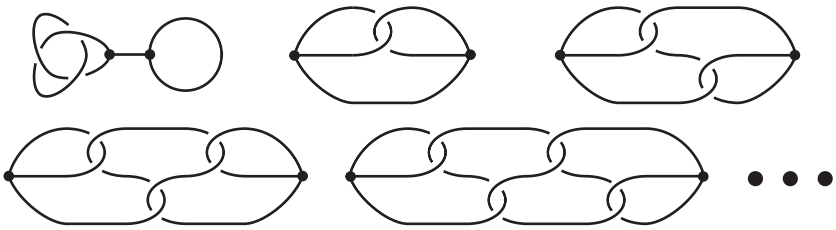

図 3: 手錠グラフの初等集合

2　主定理

図 4 で描かれた 4 個の頂点と 6 本の辺をもつグラフを**二重手錠グラフ（double-handcuff graph）**と呼び，H で表します．このグラフは，手錠グラフに 1 本の辺を加えたグラフとも，θ 曲線に 1 本の辺を加えたグラフともみることができます.

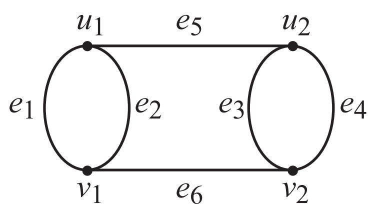

図 4: 二重手錠グラフ

定理 2.1 $\mathcal{E}$ を図 5 で描かれた二重手錠グラフの非自明な空間埋め込みの集合とすると，$\mathcal{E}$ は二重手錠グラフの初等集合であり，$elm(H) = 7$ である.

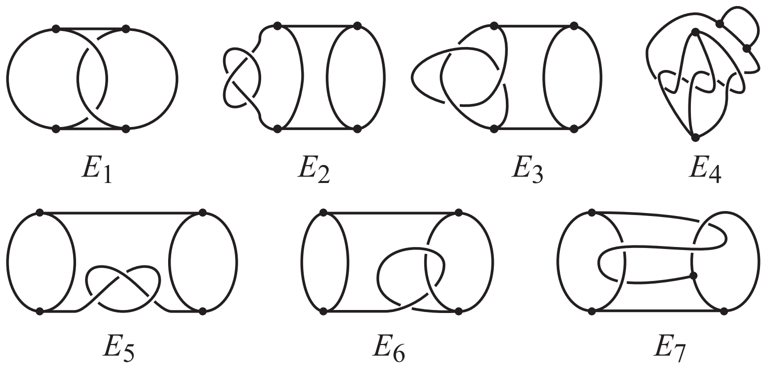

図 5: 二重手錠グラフ

この定理2.1から，初等数が無限である手錠グラフを部分グラフとして含んでいるグラフでも，初等数は有限になることがわかります．小沢誠氏から「2連結グラフなら初等数は有限になるのですか？」という質問を受けましたが，そのようなことはわかっていません．

3　証明の概略

定理の証明は，次に紹介する補題3.2, 3.3, 3.4, 3.5で，H の任意の非自明な射影 φ は少なくとも一つの $\mathcal{E}$ の元の射影となっていること，すなわち $elm(H) \leq 7$ であることを示し，補題3.6で，$elm(H) \geq 7$ であることを示すことで完了します．補題を紹介する前に，正則射影像の研究をする上でよく知られた命題を紹介します．

正則射影像 $\hat{P}$ 上の交差点 c が**本質的でない（nugatory）**とは，$\hat{P}-c$ の連結成分数が $\hat{P}$ より多くなるときです．正則射影像 $\hat{P}$ が**既約（reduced）**であるとは，$\hat{P}$ が本質的でない交差点をもたないことです．

命題 3.1　任意の正則射影像 $\hat{P}$ に対して，$\mathrm{EMB}(\hat{P}) = \mathrm{EMB}(\hat{P}')$ となるような既約な正則射影像 $\hat{P}'$ が存在する．ここで，$\mathrm{EMB}(\hat{P})$（$\mathrm{EMB}(\hat{P}')$）は $\hat{P}$（$\hat{P}'$）から得られる空間埋め込みの同値類の集合である．

（証明）　$\hat{P}_1$ を本質的でない交差点をもつ連結成分とし，$\hat{T}_1$ と $\hat{T}_2$ をその一部分とし，図6のような $\hat{P}_2$ を考える．すると，$\mathrm{EMB}(\hat{P}_1)$=$\mathrm{EMB}(\hat{P}_2)$ であることがわかり，この操作を繰り返し，本質的でない交差点を取り除くことができる．□

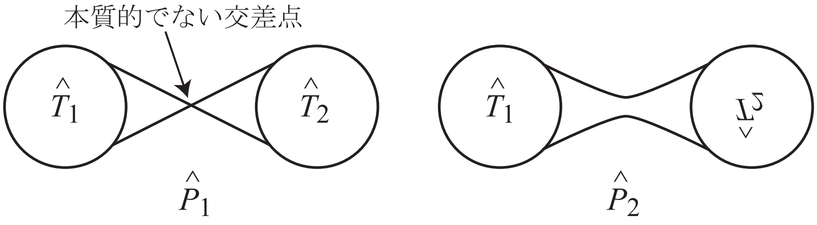

図 6: 本質的でない交差点を取り除く

この命題から，与えられた正則射影像は既約であると仮定することができるので，φ は既約であると仮定します.

補題 3.2 $(\hat{e}_1 \cup \hat{e}_2) \cap (\hat{e}_3 \cup \hat{e}_4) \neq \emptyset$ であるならば，φ は E_1 の射影である.

次の定義の前に，分離サークルというものを正則射影像上に定義します．正則射影像上のサークル S が**分離サークル**であるとは，S が e_5 と e_6 とそれぞれ 1 点で横断的に交わっているときにいいます.

補題 3.3 分離サークル S が存在するならば，φ は E_2，E_3，E_4，E_5 または E_6 の射影である.

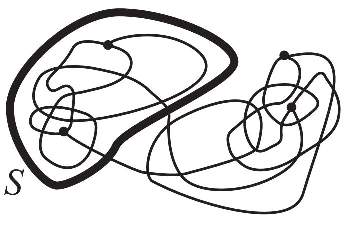

図 7: 補題 3.3 のイメージ

この補題 3.3 の仮定を満たすときは，S で囲まれた領域を十分小さく縮めて考えることにより，この正則射影像は θ 曲線のものであるとみなすことができ，この考え方により証明をします.

補題 3.4 $\hat{e}_5$ または $\hat{e}_6$ が自己交差点をもつならば，φ は E_5 または E_6 の射影である.

最後に，補題 3.2，3.3，3.4 の仮定を満たさない場合を証明します.

補題 3.5 $(\hat{e}_1 \cup \hat{e}_2) \cap (\hat{e}_3 \cup \hat{e}_4) = \emptyset$ であり，分離サークル S が存在せず，$\hat{e}_5$ も $\hat{e}_6$ も自己交差点をもたないならば，φ は E_6 または E_7 の正則射影像である．

補題 3.6 $elm(H) \geq 7$

（証明のスケッチ） P_i を図 8 で描かれた正則射影像とする（$i = 1, 2, \ldots, 7$）．NE(P_i) をそれぞれ P_i から得られる非自明な空間埋め込みの同値類の集合とする．そして，NE$(P_i) \cap$ NE$(P_j) = \emptyset (i \neq j)$ を示す．これは部分グラフを見ると容易にわかる．このことから，各 P_i に対して少なくとも 1 つの非自明な空間埋め込みが必要になることがわかる．□

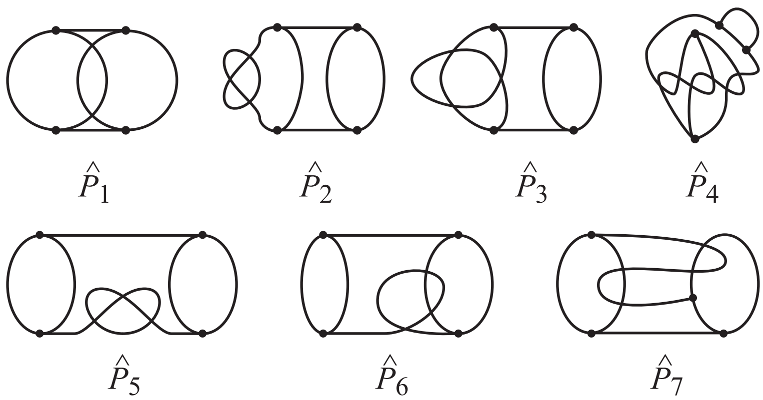

図 8: 正則射影像 $P_i (i = 1, 2, \ldots, 7)$

4　系

まず定義と知られている定理について紹介します．グラフ G の非自明な空間埋め込み f が**強概自明（strongly almost trivial）**であるとは，G の任意の真部分グラフ H に対して $\hat{f}|_H$ が自明となる f の射影 $\hat{f}$ が存在するときをいいます．例えば，θ 曲線は強概自明な空間埋め込みをもつことが知られています（図 9）．

そして，グラフが強概自明な空間埋め込みをもたないことの十分条件として次の定理が知られています．

図 9: θ 曲線の強概自明な空間埋め込み

定理 4.1 ([4], Theorem 1.1) G を，各頂点の次数が 3 以上で，切断頂点をもたない，連結な平面的グラフとする．G が次の 3 つの条件

(1) G は多重辺をもたない

(2) G の交わりのない 2 辺 e_1, e_2 に対して，それぞれ e_1, e_2 を含むような交わりのない 2 つのサイクルが存在する

(3) G の和集合が道と同相となるような 3 辺 e_1, e_2, e_3 に対して，それらを含むサイクルが存在する

を満たすとき，

G は強概自明な空間埋め込みをもたない．

二重手錠グラフは，定理 4.1 の (1) と (2) の条件を満たしません．しかし，二重手錠グラフの初等集合の特徴から，次のことがいえます．

系 4.2 二重手錠グラフ H は，強概自明な空間埋め込みをもたない．

補題 4.3 H を二重手錠グラフとし，$\mathcal{E}$ を定理 2.1 での初等集合とする．このとき，$\mathcal{E}$ の各元 f に対して，$f|_{H'}$ が非自明な埋め込みとなるような H の真部分グラフ H' が存在する．

（証明） 図 10 の太線になっている部分グラフよりわかる．□

（系 4.2 の証明） f を H の非自明な空間埋め込みとし，$\hat{f}$ を f の任意の射影とする．ここで $\hat{f}$ は非自明な射影であるので，定理 2.1 によって，$\hat{f}$ から得られる $\mathcal{E}$ の元 g が存在する．そして，補題 4.3 によって，$g|_{H'}$ は非自明な埋め込みとなる H の真部分グラフ H' が存在する．したがって，$\hat{f}|_{H'}$ は非自明な射影となる．□

5 謝辞

この研究結果を出すにあたり，鈴木晋一先生，谷山公規先生には，日々指導をして頂き，感謝致します．新國亮氏には，系に関する指摘をして

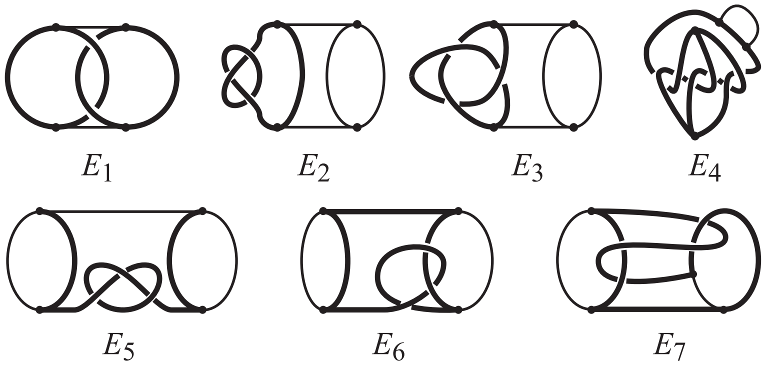

図 10: $\mathcal{E}$ の各元の非自明な真部分グラフ

頂き，感謝致します．最後になりましたが，大山淑之先生には，発表の場を与えて頂き，感謝致します．

参考文献

[1] R. Hanaki: Regular projections of knotted double-handcuff graphs, preprint.

[2] Y. Huh, G. T. Jin, and S. Oh: Strongly almost trivial θ_n-curves, J. Knot Theory Ramif 11 (2002), 153-164.

[3] Y. Huh, G. T. Jin, and S. Oh: An elementary set for θ_n-curve projections, J. Knot Theory Ramif 11 (2002), 1243-1250.

[4] Y. Huh and S. Oh: Planar graphs producing no strongly almost trivial embedding, J. Graph Theory. 43 (2003), 319-326.

[5] S. Kinoshita and J. Mikasa: On projections of spatial theta-curves, Kwansei Gakuin University (1993) In Japanese.

[6] 小林一章: 空間グラフの理論（培風館, 1995）

[7] R. Nikkuni: A remark on the identifiable projections of planar graphs, Kobe J. Math. 22 (2005), 65-70.

[8] 鈴木晋一: 結び目理論入門（サイエンス社, 1991）

[9] K. Taniyama: A partial order of knots, Tokyo J. Math. 12 (1989), 205-229.

[10] K. Taniyama: A partial order of links, Tokyo J. Math. 12 (1989), 475-484.

[11] K. Taniyama and C. Yoshioka: Regular projections of knotted handcuff graphs, J. Knot Theory Ramif. 13 (1998), 509-517.

〒 169-8050 東京都 新宿区 西早稲田 1-6-1 早稲田大学 教育学部 数学科