岐阜数学教育研究
2024, Vol.23, 1–17

身近な事象の問題を数学で解決する教材の開発と実践

田口未来之[1]，菱川洋介[2]，日比光治[3]

本研究では，現実の問題を数理的にモデル化して問題解決する教材を開発し，高校生を対象に実践を行った。その目的は，現実の問題を数学的に解決して現実に戻すサイクルを授業設計して実践することで，数学を学ぶ価値を生徒が感じられるとともに，生徒の学習意欲の向上に繋げられるかどうかを調べることである。そのために，本研究ではバス停を配置する問題について調べ，教材開発を行った。

＜キーワード＞最適施設配置問題，数理モデル，２次関数の最大値，問題発見・解決の過程

1. はじめに

本研究では，日頃から学習している数学の有用性を生徒が感得することのできる教材の開発を行った。

令和５年度全国学力学習状況調査報告書（中学校数学）[2] の教科に関する調査の各問題の分析結果と課題によると，事象を数学的に解釈し，問題解決の方法を数学的に説明することに引き続き課題があることを指摘している。実際に，対応する問題の正答率は 42.9 %であり，高い正答率であるとは言い難い。その結果を受け，具体的な場面において，事象を理想化したり単純化したりして日常生活や社会の事象における数学の問題として捉え，数学を活用して解決できるように指導することが大切であると述べられている。また，国際数学・理科教育動向調査（TIMSS2019）のポイント [3] によると，「数学を勉強すると，日常生活に役立つ」「数学を使うことが含まれる職業につきたい」と答えた生徒の割合が国際平均と比べて低くなっている。さらに，いずれにおいても肯定的な解答と平均得点の高さについては正の関連が見られたとの報告がある。これらの調査結果は小学生と中学生を対象としているので，高等学校に進学してくる生徒の実態として読み替えることができる。

また，各調査から述べられている事柄は，筆頭著者が岐阜大学大学院教育学研究科（教職大学院）における実習で観察した高等学校の生徒の実態にも現れていた。実習校では総合的な探究の時間に教科の学習を応用したり探究したりすることを位置づけていた。しかし，数学に関わる探究を扱う生徒はほとんどいなかった。日頃の数学の授業を参観するにつれて，その要因が数学の学習内容が身近に役立っていることを生徒が感じる機会が少ないことにあると推察するに至った。実際に，授業では，解法や公式を暗記させることが多かった。また，数学が得意な生徒であっても例題を理解できたことに満足し，より深く学ぼうと意欲的に取り組む姿を見ることは少なかった。

さらに，学習指導要領解説 [1] においても，数学の学習過程と日常生活の問題解決の接続の必要性を指摘している。このような実態と経緯を踏まえ，生徒の数学を学ぶ有用性の感得と主体的に学習に向かう生徒の態度の涵養を目指し，日常生活と数学を関連付けた高校生を対象とした教材を開発するとともに，授

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部
[3]兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科

業の実践を通して検証を行った。

2. 教材の研究

2.1. 最適施設配置問題について

日常生活と数学を関連付けた題材として，本研究では最適施設配置問題を取り上げた。岡部・鈴木 [8] では,「地域に施設をどのように配置したら最もよいか」という問題を数理的に考える問題と述べ，施設配置の最適化に関する問題を数多く扱っている。また，田中 [9] は，施設配置に関する問題を，施設を設置する最適な場所を決定するための数理モデルと定めている。数理的に問題を扱う利点は，数学的に評価することができ，理論的に最適解を導くことができることである。さらに，数学的に評価した結果を，日常や他分野の研究に戻したとき，数学的に解決した事柄が主張の根拠として扱われたり，計算機による処理のプロセスに扱われたりする。

また，最適施設配置問題を扱った教材研究に関して，伊藤・柘植は [6] でバス停の配置，[5] で屋台の配置に関する問題を扱っている。

2.2. バス停の最適配置問題

2.1 で述べた背景を踏まえ，本研究では，高校生が日頃使用しているであろうバス停の最適配置を題材に，高校生向けの教材開発を行うこととした。

まず，現実の問題として，次の問題 1 を考える。

問題 1　バス会社から目的地の間に１つのバス停を設けようとする。運賃の売上が最大になるようなバス停の位置はどこか。

問題 1 の場面では，売上が最大になることを最適と定めたことに注意する。問題 1 を数学的に表現しようとすると，以下のように変換できる。

問題 1′　$\mathbb{R}$ 内の線分 $[0,1]$ を考える。点 O を $x=0$ の点，点 A を $x=1$ の点とする。運賃による売上が最大になる線分 OA 上の点 $X(x)$ の座標を求めよ。

最適配置問題では，バスを運行する会社や利用者の状況を基に解決することが求められる。よって，問題 1′ を以下の仮定の下で考える。

仮定

(1) １人あたりのバスの運賃は，線分 OX の長さに比例する。
(2) 点 O に向かう線分上の人数は N 人であり，線分 OA 上に等しく分布している。但し，$N >> 1$ とする。
(3) 点 O に向かう人の移動手段は徒歩のみ，バスのみ，徒歩とバスの併用のいずれかである。そのうち，かかる移動時間が最も短い手段を選ぶとする。
(4) 徒歩の速さを v，バスの速さを V としたとき，それらの速さの割合は一定で，$0 < v < V$ である。
(5) バス停での待ち時間と，バスに乗車人数の容量は無視する。

問題 1′ の解

バス停の位置を x とおく。点 A からのバスの運賃を C とすると，仮定 (1) より 1 人当たりの運賃は Cx と表せる。

次に，バスの利用者数を求める。そのために，徒歩のみで移動する人とバスを利用する人の分布の境界 a を求める。仮定 (3) と (4) より，

$$\frac{a}{v} = \frac{x-a}{v} + \frac{x}{V}$$

を満たす。この式を a について解くと，

$$a = \frac{V+v}{2V}x$$

となる。ここで，$v < V$ より，$a < x$ を満たす。ゆえに，バスの利用者数は仮定 (2) により，

$$(1-a)N = \left(1 - \frac{V+v}{2V}x\right)N$$

である。以上より，売上 y は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} y &= Cx \cdot \left(1 - \frac{V+v}{2V}x\right)N \\ &= \frac{-CN(V+v)}{2V}\left(x - \frac{V}{V+v}\right)^2 + \frac{CNV}{2(V+v)}. \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\underline{x = \frac{V}{V+v} \text{ のとき，最大値 } \frac{CNV}{2(V+v)}}$$

である。ここで，$0 < v < V$ であることから，

$$\frac{1}{2} < \frac{V}{V+v} < 1$$

を満たす。よって，問題の解としてよい。 □

2.3. 問題の設定と仮定に関する検討

問題 1′ の解答から，バス停の配置は徒歩とバスの速度に依存して決まることと，売上は徒歩とバスの速度，及び利用者の人数に依存して決まることがわかる。但し，この結果を現実の問題の結果として読み替えたとき，現実との相違がある。そこで，設定や条件を少し一般的にした 2 つの問題を考える。

1 つ目は，バス停を 2 つ設置したときの問題である。

問題 2　問題 1 において，バス停を 2ヶ所設置する。但し，同じ場所に 2ヶ所設置しないこととする。このとき，売上が最大になるようなバス停の位置はそれぞれどこか。

問題 2 の解

バス停 1 の場所を x，バス停 2 の場所を y とする。但し，$0 < x < y \leqq 1$ と仮定する。このとき，各バス停から乗車したときの 1 人あたりの運賃は，それぞれ Cx，Cy である。

次に，各バス停の利用者数を求める。まず，徒歩のみとバス停 1 からバスを利用する人の境界 a と，バス停 1 を利用する人とバス停 2 を利用する人の境界 b の位置を求める。仮定 (3) と (4) より，位置 a は問題 1′ と同じように

$$a = \frac{V+v}{2V}x$$

と表せる。また，位置 b は

$$\frac{y-b}{v} + \frac{y-x}{V} = \frac{b-x}{v}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$b = \frac{V-v}{2V}x + \frac{V+v}{2V}y$$

と表せる。よって，仮定 (2) により，バス停 1 とバス停 2 の利用者数は，それぞれ

$$N(b-a) = \left(-\frac{v}{V}x + \frac{V+v}{2V}y\right)N$$
$$N(1-b) = \left(-\frac{V-v}{2V}x - \frac{V+v}{2V}y + 1\right)N$$

である。ゆえに，売上を表す関数 $z = f(x,y)$ は，

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (b-a)CNx + (1-b)CNy \\ &= CN\left(-\frac{v}{V}x^2 - \frac{V+v}{2V}y^2 + \frac{v}{V}xy + y\right) \\ &=: CNg(x,y) \end{aligned}$$

となる。$g(x,y)$ は 2 変数関数であることから，極値の必要条件によって，

$$\begin{aligned} g_x &= -2vx + vy = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2x \qquad (2.1) \\ g_y &= -(V+v)y + V + vx = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{v}{V+v}x + \frac{V}{V+v} \qquad (2.2) \end{aligned}$$

を満たす必要がある。ここで，(2.1) と (2.2) を連立して解くと，

$$(x,y) = \left(\frac{V}{2V+v}, \frac{2V}{2V+v}\right) =: (\alpha, \beta)$$

となる。さらに，極値の十分条件

$$(g_{xy}(\alpha,\beta))^2 - g_{xx}(\alpha,\beta)g_{yy}(\alpha,\beta) = -v^2 - 2Vv < 0$$
$$g_{xx}(\alpha,\beta) = -2v < 0$$

により，

$$\underline{(x,y) = (\alpha,\beta) \text{ で，最大値 } f(\alpha,\beta) = \frac{CNV}{2V+v}}$$

をもつことがいえる。最後に，$0 < v < V$ より，

$$0 < \alpha < \frac{1}{2},\ 0 < \alpha < 2\alpha = \beta < 1$$

であるから，問題の解としてよい。 □

問題 1′ と問題 2 の解答を比較する。問題 1′ は 2 次関数で売上を表すことができたので，最大値を求める際，極値の判定と平方完成のいずれかを選択すればよい。それに対して，問題 2 では 2 変数関数で売上が表されることから，極値を判定して最大値を求めたが，以下のように平方完成を用いて求めることもできる。

$$\begin{aligned} &-\frac{v}{V}x^2 - \frac{V+v}{2V}y^2 + \frac{v}{V}xy + y \\ &= -\frac{v}{V}\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{2V+v}{4V}\left(y - \frac{2V}{2V+v}\right)^2 \\ &\quad + \frac{V}{2V+v}. \end{aligned}$$

もし，問題 2 をさらに一般化してバス停の設置数を増やすと，設置数と同じ数の変数を必要とするため，最大値を求める問題が複雑化することが容易に予想できる。

2 つ目は，利用者の分布が均一でない場合である。簡単のために，以下の問題を考えた。

問題 3 問題 1′ の仮定 (2) を，以下のように変更する。このとき，売上が最大になるようなバス停の位置はどこか。

(2′) B を $x = \frac{1}{2}$ の点，$0 < r < 1$ とする。点 O に向かう線分上の人数は N 人であり，線分 OB と BA 上に $r : (1-r)$ の割合で分布している。また，それぞれの線分上では等しく分布しているとする。但し，$N >> 1$ とする。

問題 3 の解

バス停の位置を x とおく。問題 1′ と同様に 1 人当たりの運賃は Cx と表せる。次に，利用者数を求める。問題 1′ と同様に，徒歩のみとバスを利用する境界 a は，仮定 (3) と (4) より，

$$a = \frac{V+v}{2V}x$$

で表される。ここで，仮定 (2′) に基づき，(i) $a \geqq \frac{1}{2}$，(ii) $a < \frac{1}{2}$ の 2 通りに場合を分けて考える。

(i) $a \geqq \frac{1}{2}$，つまり $x \geq \frac{V}{V+v}$ のとき，区間 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ に $(1-r)N$ 人が等しく分布しているから，利用者数は $2(1-r)(1-a)N$ で表される。よって，売上を表す関数は

$$\begin{aligned} f(x) &= (Cx) \cdot 2(1-r)(1-a)N \\ &= CN(1-r)\left(-\frac{V+v}{V}x^2 + 2x\right) \end{aligned}$$

である。

(ii) $a < \frac{1}{2}$，つまり $x < \frac{V}{V+v}$ のとき，区間 $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ に rN 人，区間 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ に $(1-r)N$ 人がそれぞれ等しく分布していることから，利用者数は

$$2\left(\frac{1}{2} - a\right)rN + (1-r)N = (1-2ar)N$$

で表される。よって，売上を表す関数は

$$\begin{aligned} f(x) &= CNx(1-2ar) \\ &= CN\left(-\frac{(V+v)r}{V}x^2 + x\right) \end{aligned}$$

となる。

よって，(i)，(ii) より，売上を表す関数は

$$f(x) = \begin{cases} CN(1-r)\left(-\frac{V+v}{V}x^2 + 2x\right) & \left(x \geq \frac{V}{V+v}\right) \\ CN\left(-\frac{(V+v)r}{V}x^2 + x\right) & \left(x < \frac{V}{V+v}\right) \end{cases}$$

となる。ゆえに，売上の最大値とそのときのバス停の位置は，以下のように r の値によって場合分けがなされる。

(I) $r \leqq \frac{1}{2}$ の場合：

$$\underline{x = \frac{V}{V+v} \text{ のとき，最大値 } \frac{(1-r)CNV}{V+v}}$$

(II) $r > \frac{1}{2}$ の場合：

$$\underline{x = \frac{V}{2r(V+v)} \text{ のとき，最大値 } \frac{CNV}{4r(V+v)}}$$

□

問題 3 の解答について考察する。売上を表す関数は問題 1′ と同様に 2 次関数で表された。よって，極値もしくは平方完成によって最大値を求めることができる。一方，最大値となるバス停の位置は分布の比率に依存することが読み取れる。また，問題 3 では $x = \frac{1}{2}$ を境に利用者の分布が異なる状況を仮定したが，この境界を動かしたり増やしたりすると，場合分けが複雑になることが考えられる。さらには，より一般に利用者の分布を区分的に滑らかな関数で表すことも考えられる。但し，売上を表す関数は 2 次関数で表されなくなることが予想される。

2.4. 高校生を対象とした教材化に向けて

2.2 と 2.3 の考察と高等学校数学の学習状況を踏まえ，以下の問題設定を扱うこととした。

問題 バス会社（点 A）から大学（点 O）に向けて，バスを運行する。その間に，バス停を 1 つ設置したい。なお，1 人あたりの運賃は，

バス停間の距離に300円をかける設定である。一番多く売上を得るためには，どこに停留所を設置するとよいか。但し，以下を設定する。

＜数学の設定＞

- 数直線上で，点Oは$x = 0$，点Aは$x = 1$とする。
- バス停の位置を，点Pと表す。
- $0 \leqq x \leqq 1$として，1人当たりの運賃は$300x$円である。

＜利用者に関する情報＞

- 線分OA上には，長さに対して一定の割合で合計m人住んでいて，全ての人が大学に向かう。
- 徒歩のみ，またはバスを利用して移動する。
- 歩く速さは1，バスの速さは3で，それぞれ一定である。

＜バスを利用する条件＞

- 利用者は，移動時間の短い方法を選ぶ。移動時間が同じである場合，徒歩のみを優先する。
- バス停での待ち時間は無視する。
- バスにはいくらでも乗れる。

2.2で述べた問題設定との変更点は，歩く速さとバスの速さを具体的に定めた点と，運賃の比例定数を300とした点である。その意図は，問題解決の過程における式の処理の煩雑さを軽減することと，売上が最大になるバス停の位置を具体的な数値で表せることで現実との繋がりを意識しやすくするための工夫である。

3. 教材の実践について

2.4で述べた教材を，高校生を対象に以下の通りに実践を行った。

日時：令和6年6月18日（火）12時50分～13時35分

対象：岐阜県立A高等学校第2学年（理系クラス）26名

3.1. 実践のねらい

本実践のねらいを，以下の3つに定めた。

(1) 数学の学習が現実の事象に活用される場面を知るとともに，意欲的に数学の学習に取り組むことができる。

(2) 現実の事象を数学的に解決する活動を通して，数学的に考えることの良さを感じることができる。

(3) 現実の問題場面と数理的に処理するために簡素化した条件との違いを認識し，現実の事象を数学的に解決することの意味を理解する。

3.2. 実践の流れ

実際の指導案を参考資料1に掲載した。

(1) 導入

実際のバスの路線図を生徒に見せ，バス停の配置に着目させる。バス停が等しい間隔に設置されていないことから，その理由を予想させる。バス会社は人口密度や利用者の多さなど，様々な要因を予想する中で，それらはバス会社の売上に繋がっているであろうことに注目させる。現実の事象は複雑であり考えることが難しいため，本時は簡素化した問題を扱うことを伝えた上で，問題を生徒に提示する。

(2) 展開1（グループ追究・全体追究）

問題と仮定を全体で確認する。その後，売上が最大になるバス停の位置を大まかに予想させる。ここで，予想しづらいことが想定されるので，中央の位置，中央より終点寄りの位置，中央より起点寄りの位置，の3つの選択肢を生徒に与える。生徒が予想しやすいようにする配慮とともに，バス停の位置によって運賃や乗車人数が変化する関数関係に生徒が気付けるように仕組んだ問いである。その予想について交流することで，関数関係が潜んでいることを全体で確認する。

予想をもとに，バス停の位置を$x = \frac{1}{4}$（中央より終点寄り），$x = \frac{1}{2}$（中央の位置），$x = \frac{3}{4}$（中央より起点寄りの位置）に限定し，実際に売上を求める活動を行う。1人あたりの運賃を求めることは容易であるが，利用者の数を求めることが難しいと考えられる。よって，徒歩のみの人と，バスを利用する人の境目を文

字で置くことを全体で約束することで，追究が円滑に進むように配慮する。

活動後，各位置の売上を比較し，$x = \frac{3}{4}$ の場合が一番大きい値であることを確認する。

(3) 展開 2（グループ追究）

まず，以下を全体に発問する。

> 問い
>
> 売上が最大になるバス停の位置は，$x = \frac{3}{4}$ の位置であるといってよいか。

この問いは，売上を求めた過程を一般化して再度検証する活動に繋げることと，演繹的に考察する必要性を生徒が感じることをねらっている。

発問の後，バス停の位置を一般的に x と文字でおき，展開 1 と同じように考察するグループ追究を行う。追究後は全体で考察結果を確認するとともに，上記の問いが解決していることを共有する。

全体で確認後，得られた結果を元々の現実の問題に戻し，解決できたかどうかを問う。この際，生徒からは，設定した問題場面，現実の問題との相違に関する発言が予想される。その発言を踏まえ，現実場面に近づけるための更なる条件を考えさせ，本実践を閉じる。

4. 実践の様子

(1) 導入

教師から提示されたバスの路線図を見せ，特徴を生徒に質問した。生徒は，バス停間が短い箇所や長い箇所があることを述べた。その理由として予想されることを問うと，バスの利用者の利便性，利用者の多い場所に配置するなどの意見が出た。さらに，その予想をバスを運行する会社側の立場で考えたときに，会社の売上が関わっている可能性があることを生徒とともに確認したところ，全員が納得している様子であった。そこで，本時の問題を全体に提示し，売上を最大にするバス停の位置について考察することを全体で確認した。

(2) 展開 1

まず，売上が最大になるようなバス停のおおよその位置を，各グループで考えるように指示した。しかし，何を議論すればよいか戸惑う表情を見せたため，中央の位置，中央より終点寄りの位置，中央より起点寄りの位置，の 3 つの選択肢を提示したところ，グループでの話し合いが活発に進んだ。全体で予想を確認したところ，中央より起点寄りの位置と予想した生徒は 20 人で最も多く，中央より終点寄りの位置と予想した生徒は 4 人，中央の位置と予想した生徒は 2 人だった。そのように予想した理由を問うたところ，以下のように生徒が発言した。

＜中央より起点寄りの位置＞

- 一度大学から遠ざかってバスに乗る人もいるから
- 運賃が高くなるから

＜中央より終点寄りの位置＞

- 利用者の数が多いから

＜中央の位置＞

- 利用者も運賃もある程度多いから

これらの意見をもとに，売上は運賃と利用者の数で求められることと，運賃や利用者の数はバス停の位置が変わると，それに伴って変化することを確認できた。

次に，予想で提示したおおよその 3ヶ所を具体的に $x = \frac{1}{4}$，$x = \frac{1}{2}$，$x = \frac{3}{4}$ と定めて売上を求める学習活動に移った。生徒の活動を机間巡視したところ，1 人あたりの運賃はすぐに求められたものの，やはり乗車人数の求め方につまづくグループが多かった。そこで，徒歩のみの人とバスを利用する人の境目を文字 a で置き，その表し方を問うたところ，つまづいていたグループが議論を進めていた。一方で，文字が新たに追加されたために，混乱を示すグループもあった。そのグループには机間巡視で文字の扱いについて整理するように助言を行ったところ，整理できたことから議論が進んでいた。

その後，全体で 3 通りの売上の求め方を生徒に提示してもらった。また，売上が最大になる地点とともに，求め方を比べて共通する部分と異なる部分について確認した。共通点

と相違点に関して，生徒からは求め方は共通しているが，求められた関数や値が異なることを指摘する発言があった。

(3) 展開 2

展開 1 の内容を踏まえ，生徒に「売上が最大になるバス停の位置は，$x = \frac{3}{4}$ の位置であるといってよいか」を問うたところ，言い切ることはできないことを指摘する反応があった。そこで，売上が最大になるバス停の位置を明らかにする課題を全体で共有し，改めてグループ追究の時間とした。生徒は，バス停の位置を一般的に x とおき，追究を行っていた。展開 1 の終末に共通点と相違点を確認していたことから，追究はスムーズに進んでいた。多くの生徒は売上を表す関数と，その最大値を求められていた。一方，売上を表す関数を求めた段階で追究が止まる生徒もいた。そのような生徒に対し，教師から関数の特徴を生徒に問い，2 次関数であることに気付けるような手立てを講じた。2 次関数であることに気付いた生徒は，平方完成をすれば求められることを見通すことができ，追究を進めていた。その後，全体で解答を確認し，再度問いを確認したところ，生徒は言い切れたことを主張できていた。

最後に，解決した問題を振り返るとともに，現実の問題を解決できたかどうかを問うた。生徒が否定的な反応を示したため，その理由を問うたところ，速度の違いや移動手段の多様さ，人口分布の不均一性，バス停の設置数の違いなどを発言した。これらを踏まえ，条件を再検討して問題解決を繰り返していけば，現実の問題の解決につながる可能性があることを全体で確認し，授業を終了した。

5. 実践結果の考察

本実践における生徒の学習活動の様子を踏まえ，設定したねらいについて考察する。

(1) 数学の学習が現実の事象に活用される場面を知るとともに，意欲的に数学の学習に取り組むことができる。

このねらいについて，概ね達成できたと考える。その理由を，生徒の授業後の感想から説明する。26 名の生徒のうち 14 名の生徒が，ねらいに関する肯定的な記述をしていた。具体的な例は下記の通りである。

- 最大値の問題が日常と繋がっていて面白かった。
- 自分の地域のバス停や駅で考えてみると面白そうだった。
- いろいろな状況を考慮した場合もやってみたいと思った。

一方で，授業に対する興味関心の有無に関わらず，授業内容に対して困難さを感じる主旨の記述も見られた。問題を解く達成感が生徒にとって学習意欲の向上に必要な要素であると考えられる。

以上のことから，数学の学習において日常生活や現実の問題を扱うことが，数学の学習に取り組もうとする生徒の意欲の向上に繋がる可能性を明らかにできた。その一方で，生徒の学習状況を鑑みて学習内容や授業設計を行うことが課題である。

(2) 現実の事象を数学的に解決する活動を通して，数学的に考えることの良さを感じることができる。

このねらいについて，達成できたと考える。その理由を，展開 2 における生徒の姿から述べる。展開 2 のはじめに「売上が最大になるバス停の位置は，$x = \frac{3}{4}$ の位置であるといってよいか」を問うた後のグループ追究において，生徒は問いの解決に向けた見通しを考えていた。その結果，生徒は展開 1 で追究したように具体的な位置にバス停を設置した場合を考えていては埒が明かないことに気付き，バス停の位置を文字で表して追究する判断をした。これは，一度解決した内容を振り返るとともに，演繹的に考察する意味を感じながら，学習に向かっていたと考える。

以上より，展開 1 の追究内容を一般化することの意味や問いに対して演繹的に考える良さを感じて追究していた生徒の姿から，本ねらいは達成できたと判断した。また，展開 1 と

展開 2 の接続の場面において，教師の発問をきっかけに帰納的推論と演繹的推論の関係を特徴付けられたことから，数学的な考え方を生徒が働かせながら追究する指導事例を示せたと考える。

(3) 現実の問題場面と数理的に処理するために簡素化した条件との違いを認識し，現実の事象を数学的に解決することの意味を理解する。

このねらいについて，概ね達成できたと考える。まず，展開 2 の終末における生徒の姿に関して述べる。展開 2 の終末では，数学で問題解決したことを踏まえて，現実の問題が解決できたか問うたところ，生徒から否定的な反応があった。さらに，生徒から現実と数学の問題及び仮定との違いを示唆する発言があったことから，現実と数学の問題場面の相違を十分認識できていたと考える。このことは，(1) で挙げた生徒の振り返りの記述文からも読み取れる。一方，実際に実験や試行を繰り返すことなく，数学を用いて抽象的に解決することに関わって，本実践では生徒に伝えきれなかった。その理由として，本題材が生徒の実験や試行によって解決の見通しが立てられる具体性を十分に備えてなかったことが挙げられる。

以上のことから，現実の場面と数学的に考える場面の往還を生徒に伝えることができた一方，数学的に解決することの意味を伝えるための授業設計や教材研究には課題が残ったと考える。

6. さいごに

本研究では最適施設配置問題を題材に，現実と数学を行き来する問題解決学習をデザインした。その結果，本題材に関連する内容に対する生徒の興味や関心を引き出すことができた。また，数学の有用性を生徒に伝えられることができたと考える。これは，学習指導要領解説 [1] にも記載される，算数・数学の学習過程のイメージを具体化する授業提案にも繋げられたと考える。

その一方で，問題の難易度の調整と，問題解決に対する生徒の実感の持たせ方に課題が残った。特に実感の持たせ方に関して，小学校算数や中学校数学では，問題を導出する場面が具体的であり，量的な実感を児童生徒が持ちやすいと捉える。それに対して，本教材は数理的に処理することに留まり，量的な実感は得ることが難しかった。例えば，パソコンやタブレット上でバス停の位置を自由に操作して，利用者の変化や売上の変化を視覚的に感じ取る工夫をすると，良かったのではないかと考える。この点については，引き続き研究を進めていきたいと考える。

最後に，本教材の実践を行うにあたり，実践にご協力いただいた高校の生徒の皆様，教材を作成するにあたり指導と助言をいただいた皆様に感謝の意を表する。

参考文献

[1] 文部科学省，2019，高等学校学習指導要領解説（平成３０年告示）数学編.

[2] 文部科学省　国立教育政策研究所，2023，令和 5 年度全国学力・学習状況調査報告書（中学校数学）.

[3] 文部科学省　国立教育政策研究所，2019，国際数学・理科教育動向調査（TIMSS2019）のポイント（オンライン），https://www.nier.go.jp/timss/2019/point.pdf.

[4] 池田敏和，浜泰一，1992，高等学校数学科における数学的モデリングの事例的研究，日本数学教育会誌，第 74 巻，第 7 号，pp. 42–50.

[5] 伊藤杏優，柘植直樹，2019，最適配置問題を取り上げた教材開発と実践，岐阜数学教育研究，第 18 号，pp. 89–116.

[6] 伊藤杏優，柘植直樹，2019，バス停の最適配置問題，ResearchGate, preprint.

[7] 茨城俊秀，2011，共立講座２１世紀の数学　第 13 巻　最適化の数学，共立出版株式会社.

[8] 岡部篤行，鈴木敦夫，1992，シリーズ［現代人の数理］3　最適配置の数理，朝倉書店.

[9] 田中健一，2013，数理最適化入門 (4)：施設配置の数理モデル (チュートリアル)，応用数理，23(4)，pp. 178–183.

[10] 田村明久，松村正和，2002，最適化法（工学系数学講座第１７巻），共立出版株式会社.

[11] 柳本哲，2011，数学的モデリング—本当に役立つ数学の力，明治図書.

[12] 戸瀬信之，ほか 15 名，2023，高等学校数学Ⅱ（令和 3 年 3 月 1 日検定済），数研出版.

参考資料１　学習指導案

ねらい　売上が最大になるバス停の配置を考える活動を通して，社会の問題の解決に数学が活用できる場面を知り，積極的に数学の学習に取り組もうとする態度を養う。

	○学習活動，□教師の発問，☆生徒の反応	・指導上の留意点
導入 2 分	○実際のバスの路線図を提示し，バス停の位置が等間隔でに設置されていない意図を予想する。 ☆利用者が多いから，施設があるから，等 □バス会社の売上に着目した問題に取り組む。	・売上に注目して問題に取り組むことを強調する。
展開 1 20 分	○問題場面を提示し，内容を把握する。 $\boxed{\text{}}$ バス会社（点 A）から大学（点 O）に向けて，バスを運行する。その間に，バス停を１つ設置したい。なお，一人あたりの運賃は，バス停間の距離に 300 円をかける設定である。一番多く売上を得るためには，どこに停留所を設置するとよいか。 ＜数学の設定＞ ・数直線上で，点 O は X=0，点 A は X=1 とする。 ・バス停の位置を，点 P(X= x)と表す。 ・一人当たりの運賃は 300×x円である（0≦x≦1)。 ＜利用者に関する情報＞ ①線分 OA 上には，長さに対して一定の割合で合計 m 人住んでいて，全ての人が大学に向かう。 ②徒歩のみ，またはバスを利用して移動する。 ③**歩く速さは 1，バスの速さは 3** で，それぞれ一定である。	・問題場面を全体で確認する際に，現実と比べて簡素化した箇所を伝える。 ・問題解決に必要な設定や仮定であるから，１つ１つ丁寧に確認する。

	＜バスを利用する条件＞ ④利用者は，**移動時間の短い方法**を選ぶ。 　**移動時間が同じ場合**は，**徒歩のみ**で移動する。 ⑤バス停での待ち時間は無視する。 ⑥バスにはいくらでも乗れる。	・「移動時間が同じ場合は徒歩のみで移動する。」を強調して伝え，問題解決の際の視点をおさえる。
	○線分上のどのあたりバス停を設置するとよいか，予想を立てる。予想が立てづらそうな場合は，（１）中央より学校側，（２）中央，（３）中央よりバス会社側の選択を提示する。また，そのように予想した理由を明らかにする。 ☆予想とその理由 （１）バスの利用者が多いから。 （２）利用者と運賃のバランスを考えた。 （３）バスの運賃が高いから。	・予想を通して，売上を求めるための見通しを持たせる。
	○具体的な場所を定めて，問題を解く。 ・xの値を下から１つ選び，売上yを求めてみよう。 $x=\frac{1}{4}\ ,\frac{1}{2}\ ,\frac{3}{4}$ ☆解答の例 　$x=\frac{1}{2}$の時一人当たりの運賃は，$300\times\frac{1}{2}$で 150 円です。徒歩のみと，バスを利用する人の境をaとします。この境では，学校へ行くのにかかる時間が等しいです。だから，③と④から，$a=\frac{1}{3}$です。バスを利用する人数は，数直線上の $(\frac{1}{3},1]$の位置にいる人だから，$\frac{2}{3}\times m$人です。だから，求める売上は 100m円です。	・人数を求める方法を見いだせない生徒には，バスを利用する人と徒歩のみで移動する人の分布を問い，その境は速さと時間に注目して立式すればよいことに気付かせるように支援する。

	○解決の流れを確認し，共通点と相違点を明らかにする。 □他グループが追究した，売上を求める過程と比べて，同じところや違うところを見つけよう。 ☆売上を求める流れは同じです。 ☆徒歩とバスを利用する人が住む境を求めていることが同じです。 ☆バス停の位置が違うから，関数も値も違います。	・他グループの解法を見て，自分の解法とそれぞれの場合を比べる。
展開２ 20分	○売上が最大になるバス停の位置を求める。 □売上が最大になるバス停の位置は，$x=\frac{3}{4}$の位置であるといってよいか。 ☆３ヶ所で一番売上が高かったから，いえると思います。 ☆そうとはいえないと思います。他にもっと高い位置があるかもしれません。 □売上が最大になるバス停の位置を明らかにしよう。 ☆解答の例 　バス停が位置xにあるとき，一人当たりの運賃は 300x円です。また，徒歩のみと，バスを利用する人の住む境をaとして，求めます。すると，③と④から，$a=\frac{2}{3}x$であることがわかります。だから，利用者の人数は，$\left(1-\frac{2}{3}x\right)m$人です。これらのことから，売上は$y=300x\times m\left(1-\frac{2}{3}x\right)$と表せます。これは２次関数だから，最大値を求めると，$x=\frac{3}{4}$で最大値$\frac{225m}{2}$となるので，売上の最大値は$\frac{225m}{2}$円で，その時	・売上が最大になるバス停の位置を問うことで，生徒に具体的な場合しか解決していないことに気付かせるとともに，バス停の位置を文字で表して問題解決する必要があることに気付かせる。 ・関数を求めたが，最大値を求める方法に気づけない生徒には，関数の種類を教師から問い，２次関数であることに気付かせる。

	のバス停は$x=\frac{3}{4}$の位置です。 ○全体で売上が最大になるバス停の位置とそのときの値を確認する。 □問題を解くことができました。これで，本当にバス停を設置できる？ ☆できないと思います。 ☆実際にバス停は１つじゃないから，できないと思います。 ☆利用する人はバラバラに住んでいるから，できないと思います。 □では，皆さんであれば，どのような条件を加えたり減らしたりして，考えますか？	・問題を現実に戻すことを考えさせることで，現実の問題を数学的に解決したことを生徒に気付かせるとともに，現実に対応するには，さらに条件を考える必要があることを実感させる。
まとめ 3分	○本時の振り返りを書く。	

参考資料２　学習プリント

バス停配置の最適化　　　　組　名前

問題

図のように，バス会社（点 A）から大学（点 O）に向けて，バスを運行する。その間に，バス停を１つ設置したい。なお，一人あたりの運賃は，バス停間の距離に 300 円をかける設定である。
一番多く売上を得るためには，どこに停留所を設置するとよいか。

＜数学の設定＞

・数直線上で，点 O は X=0，点 A は X=1 とする。

・バス停の位置を，点 P(X= x)と表す。

・**一人当たりの運賃は 300×x円**である（0≦x≦1）。

＜利用者に関する情報＞

① 線分 OA 上には，**長さに対して一定の割合で合計 m 人**住んでいて，全ての人が大学に向かう。

② 徒歩のみ，またはバスを利用して移動する。

③ **歩く速さは 1，バスの速さは 3** で，それぞれ一定である。

＜バスを利用する条件＞

④ 利用者は，**移動時間の短い方法**を選ぶ。
　移動時間が同じである場合，**徒歩のみ**を優先する。

⑤ バス停での待ち時間は無視する。

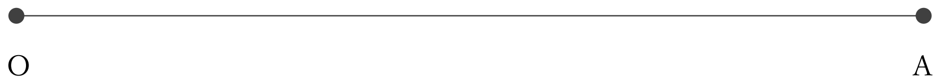
⑥ バスにはいくらでも乗れる。

予想！ どこにバス停を置くと売上が最大になるだろうか？

＜追究＞

＜1＞下記の中で，最も売上が高いと思うxの値を１つ選んで売上yを求めてみよう！

$x=\frac{1}{4}$　　　　$x=\frac{1}{2}$　　　　$x=\frac{3}{4}$



$x=$＿＿＿＿　とします。

よって，バス会社の売上は，＿＿＿＿＿＿円です。

＜2＞他グループが追究した売上を求める過程と比べて，同じところや違うところを見つけよう！

＜3＞バス停の位置をx，売上をyとする。yの最大値を求めよう。

また，その時のxを求めよう。

ヒント：＜1＞では，売上をどのように求めていたかな？

よって，売上の最大は________円で，その時のバス停は________の位置です。

<4>この問題を解決したら，本当にバス停を設置できるか？

本時の感想　　　　　組　名前