岐阜数学教育研究
2016, Vol. 15, 56-101

球面幾何を用いた教材の開発と実践

辻一輝[1]，菱川洋介[2]，山田雅博[2]

数学が日常生活のどの場面で扱われているのかを知ることのできる，高校生を対象とした教材の開発を試みた。題材として，地球上の２点間の距離や面積を，球面幾何の知識を用いて測定する内容を取り上げた。本教材の実践を通して，高校数学の発展的内容を扱いながら身近に起こる事象を考察することで，数学を学ぶことに対する興味や関心，意欲の向上を目指した。本論文は，教材の内容，実践の結果，及びその考察について報告する。

〈キーワード〉球面幾何，測地線，球面円

1.はじめに

文部科学省中央教育審議会の第２０回教育課程企画特別部会における「次期学習指導要領に向けたこれまでの審議のまとめ（案）」[1]によると，現行の学習指導要領における高校数学の課題に，「数学の学習に対する意欲が高くないこと」や「事象を式で数学的に表現したり論理的に説明したりすること」を挙げている。また，課題を踏まえた数学科の目標の在り方として，実社会との関わりを意識した数学的活動の充実を図っていくことが求められている。具体的には，数学的に問題解決する過程において,「日常生活や社会の事象を数理的に捉え，数学的に表現・処理し，問題を解決し，解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する」というサイクルを意識した学びを改善事項として求めている。ゆえに，我々はこのまとめを受け，数学がどのように身近な事象と関わっているのかを知る機会を設け，学習意欲の向上につなげることのできる高校生向けの教材開発に取り組むこととした。この教材のねらいは，高校数学の活用が実感できる活動を通して，生徒が数学を学ぶ必要性を感じ，学習への関心や意欲の向上を図ることである。

本教材では，３次元球面（以下，「球面」と記す）上の２点間の距離や面積といった数量を，高校数学の学習とその発展学習である球面幾何学の知識を用いて求める内容を扱う。実践は２日間に分けて行う。本論文では，開発した教材の内容と授業実践の結果について報告する。

2.教材について

2.1 教材の概要

本教材について説明する。本教材では，球面幾何学の初等的内容を用いて，球面上における２点間の距離や図形の面積を求める内容を取り上げ，その題材に地球上の距離や面積を選んだ。我々がよく目にする地球全体を表した地図とは，メルカトル図法で表された平面地図である。メルカトル図法とは，球面を円筒に射影して平面に描く図法であり，任意の２点を結ぶ線分と赤道が等角に射影されている。一方，メルカトル図法によって描かれた平面地図では，正確な距離や面積が求められないこともよく知られている。正確な距離を求めることに関しては，正距方位図法で描かれた平面地図を用いればよい。しかし，正距方位図法は地図上のある一点を固定した場合の距離と方位を正しく記した地図であることから，基準点ごとに地図を記さなければならないという点で利便性に欠ける。そこで，地球上のどんな２点間の距離や面積でも求められる手法が必然的に要求される。本教材では，この問題が身近なものであることを生徒が自発的に感じることで，問題解決への興味

[1] 岐阜大学大学院教育学研究科
[2] 岐阜大学教育学部

と関心を持つことをねらいとし，解決手段として球面幾何学を学ぶ動機とする。

2.2 本教材における球面幾何学の基礎知識

①球面上における線分と直線

まずいくつかの用語を定義しておく。

定義 1　球面とその中心を通る平面が交わってできる円周を**大円**という。また，この円周上の 2 点で切り取られた部分を**大円弧**という。さらに，球の中心と大円上の 2 点を結ぶ線分がなす角を**中心角**という。

定義 2　3 次元空間で中心が原点である球について，以下の用語をそれぞれ定義する。

・**北（南）極** ⇔ z 座標が最大（小）となる点。

・**赤道** ⇔ 球面と xy 平面との交わりとして得られる大円

・**北（南）半球** ⇔ z 座標が正（負）の部分全体の半球面

・**緯線** ⇔ 球面と xy 平面に平行な平面との交わりとして得られる円周

・**緯度** ⇔ 緯線上の任意の 1 点と，その点を通る大円と赤道の交点によって与えられる中心角

・**経線** ⇔ 北極と南極を結ぶ大円弧

・**経度** ⇔ 経線と x y平面の交点と，球面と x 軸の交点のうち，x座標の値が正となる点によって与えられる中心角

・緯度及び経度に関する注意

緯線が北（南）半球にある場合，緯度は正（負）の値，南半球にある場合は負の値とする。また，経線と x y平面の交点のy座標が正（負）の場合，経度は正（負）の値とする。

球面上の北極，南極以外の任意の点は，緯度経度を用いて一意に表すことができる。また，この緯度経度を用いることで 3 次元空間座標も一意に表すことができる。

定義 3　球の半径が 1 である球面を**単位球面**とよぶ。

定義 4　曲面や曲空間などにおいて, 2 点間の最小の長さ（距離）を表す線を**測地線**という。

幾何学では，この測地線を 2 次元平面や 3 次元空間での線分と同質のものと捉えて扱っている。また，この測地線を無限に伸ばしてできる線を，その世界での直線として扱っている。

次に今回扱う定理や性質について述べる。

定理　球面上の 2 点を結ぶ短い方の大円弧は，球面上の測地線となる。

（証明の概要）球面上の曲線を 3 次元空間での曲線と捉え，空間内の曲線の長さの公式を用いることで示すことができる。球面上の 2 点を結ぶ任意の曲線に対して最小値を求め，この値を示す曲線が大円弧であることを示す。

定義で説明したように，球面上の測地線である大円弧を，球面での線分として扱うこととする。また，大円は大円弧を無限に伸ばした線として捉えることができるので，大円を球面上での直線として扱うこととする。

②球面上における図形

球面上の図形の定義は，2 次元平面上での定義をそのまま用いる。そのうえで多角形を描くためには，球面上での線分が必要となる。そこで①でも説明したように，大円弧を線分として扱う。さらに，球面上の直角については，2 次元平面での定義をそのまま用いて定義することができる。しかし，平行線については 2 次元平面や 3 次元空間での定義を用いると存在しないことがわかる。このことから，平行線を用いて定義される平行四辺形や，対辺が平行であるという性質を持つ長方形や正方形などは球面上では描くことができない。ただし，長方形や正方形に関しては，定義の仕方

を変えることで，平行に関する性質以外は満たすように球面上で描くことはできる。

球面には，２次元平面や３次元空間では描くことのできない図形を描くことができる。例えば，2本の線分だけで囲まれる図形（二角形）や，２つの直角を持つ三角形（二直角三角形），3つの角全てが直角である三角形（三直角三角形）である。

③球面円の面積

球面上の円（以下，球面円とよぶ。これに対し平面上の円は平面円とよぶ。）は，3次元空間内で捉えると曲面となっているため，その面積は通常の円の面積の公式では求めることはできない。そこで，球面円を円弧の回転面として捉えることで，二重積分を用いた回転面の曲面積の公式を用いることができ，これによって面積の公式を表すことができる。

単位球面円の面積の公式

球の中心とそれぞれ球面円の中心及び球面円の円周上の1点を結んだ2線分のなす角をθとする。このとき，その単位球面円の面積は次の式で得られる。

$$2\pi(1-\cos\theta)$$

この公式は高校数学の内容だけで証明を考えることが難しい。その理由は，球面を２変数関数と捉え，曲面積を求める積分をしなければならないからである。これらは大学において解析学の重積分法で学ぶ知識に相当する。そこで，円弧をいくつかの線分に分割し，同じく回転面として得られる図形を球面円の近似として捉えることで，区分求積法を用いて証明を行う。ただし，これは数学的に厳密ではないため，単位球面以外の球面では正しい公式を得ることはできないことに注意しなければならない。この方法で証明した場合，単位球面以外での公式は，相似を用いることで得ることができる。

球面円の面積の公式の幾何的意味について解説する。この式は，球の大円の長さ2πと球面円の高さ$1-\cos\theta$（すなわち，球面円の中心から円周に接する平面への垂線の長さ）の積の形で表されているとみることができる。これは，大円の長さと周の長さが等しく，球面円の高さと等しい円柱の側面積と等積であることを表している。実際，球面全体の面積は，この球が内接する円柱の側面積と等しいという定理があり，この証明の過程で，球面の一部の面積が円柱の高さが等しい部分の面積と等しいということが用いられている。

2.3 球面幾何学と高校数学の関連

2.2 で述べた内容を教材化する前提として必要となる高校数学の内容について記す。

①球面上における線分と直線

2.2 で述べた定理の証明に関して，必要となる内容が多岐にわたるため，以下のようにいくつかの場面に区切って述べていく。

（a）球面上の曲線

…曲線のパラメーター表示

（b）曲線の長さ

…曲線の長さの公式

（c）緯度経度を用いた球面上の座標表示

…三角関数，極座標

（d）曲線の長さの公式

…三角関数の微分，関数の積の微分，合成関数の微分，三角関数の相互関係，また関数表示されている変数の微分にも注意が必要

（e）曲線の長さの最小値

…定積分と不等式，平方根の性質，定積分

（f）大円弧が曲線の長さの最小値であること

…扇形の弧の長さ，関数の値の変化

特に，（a）と（b）について，高校数学では平面上のものしか取り扱っていないため，発展内容として空間内のものを導入する必要がある。

②球面上における図形

ここで必要となる高校数学の内容はない。図形

の定義は，小学校算数や中学数学で取り扱われているものを使う。ただし，線分や直線に関しては明確な定義や説明がされてないため，2.2①で記述したように測地線の性質を踏まえた定義の説明が必要となる。

③球面円の面積

面積の公式を求める上で以下の内容を必要とする。

・区分求積法
・三角関数およびその積分

面積の求め方を考える際には，区分求積法と近似の考え方が重要になる。ただし，区分求積法を用いるにあたって，区分求積する関数を明確にすることができない。そこで 1 変数関数のグラフとx軸，x＝a，x＝bで囲まれた領域の面積を区分求積法で求めるとき，分割の幅を 0 に近づけた際に，ひとつひとつの分割で考える長方形の高さがそこでの関数での値に近づくことから，球面円を分割し近似することを用いて，区分求積について説明を行う（活動プリント１４参照）。

3.授業実践の概要

3.1 授業のねらい

授業のねらいを以下の２つに設定した。

①球面上での距離や面積の求め方を考える活動を通して，高校数学で学んだ曲線のパラメーター表示や微分，積分などの内容の発展的な活用の仕方を知り，理解を深めることができる。
②球面円と平面円の面積を比較し許せる誤差を判断する活動を通して，適した比較の仕方を考え根拠を明らかにして主体的に判断しようとすることができる。

また，上記のねらいを通して，高校数学までで学んだことのない球面幾何を扱うことで，球面幾何の学問としての面白さや，数学の新たな楽しさを感じてほしいと考えている。

3.2 課題設定

本実践では，主に 6 つの課題を設定し，2 日間に分けて行う。

（1 日目）
課題①：様々な地図で 2 点間の距離を求めてみよう。
課題②：球面上の距離の求め方を考えてみよう。
課題③：球面上に図形を描いてみよう。
（2 日目）
課題④：球面上の円の面積の求め方を考えてみよう。
課題⑤：球面円と平面円の面積ではどれだけ誤差があるか調べてみよう。
課題⑥：単位球面以外の球面で，球面円と平面円の面積について調べてみよう。

以下，各課題ついて，詳しく述べる。

（1）課題①

球面幾何という高校数学では未習の数学の分野への導入として行う。本実践では岐阜県の地図，日本地図，世界地図の 3 種類のメルカトル図法で描かれた地図を用意する。これらの地図を用いて，それぞれの地図上のある 2 点間の実際の距離を求める活動を行う。

小問①　岐阜県の地図
岐阜－高山間の距離を求めなさい。
小問②　日本地図
札幌－鹿児島間の距離を求めなさい。
小問③　世界地図
東京－ワシントン D.C.間の距離を求めなさい。

小問①と②は地図の縮尺を与えることで，その地図の縮尺と地図上の距離を用いて求めることができる。求めた距離と実際の距離には誤差が発生するが，問題のない誤差として認めることとする。ただし，小問①の誤差と小問②の誤差では小問②の誤差のほうが割合的に大きくなることに気付く

生徒がいれば，全体交流の場で紹介し，課題⑤への誘導とする。

小問③の世界地図に関しては適切な縮尺を与えることができないため，赤道一周の距離を与えておく。小問①と②の経験から，赤道一周の距離と地図上の赤道の距離からこの地図の縮尺を求め，実際の距離を求めようとすると予想される。ここで, 赤道から求めた縮尺と, 東京－ワシントンD.C.間を結んだ直線のある緯度約 37.5° での縮尺が異なるため，求めた距離と実際の距離では大きな誤差が発生する。生徒には，誤差が発生した原因を考察する時間を設け，再度この緯度での縮尺を用いて距離を求めさせる。しかし，この縮尺を用いて求めた距離でも，実際の距離とは大きな誤差が発生してしまう。ここで，再度この誤差の原因を考察する時間を設ける。この２段階の考察によって，平面上で 2 点間を結んだ線分では，実際には球面上にある 2 点間の距離を表す線とはならないため，平面を用いて球面上の 2 点間の距離を求めることはできないということに気付かせたい。課題①の考察を経て，球面上の 2 点間の距離を求めるためには球面を用いて考えなければならないということに気付き，問題を解決しようとする動機とする。

（2）課題②

球面を用いた球面上の 2 点間の距離の求め方を全体追究する。まず，課題①を踏まえて，直径１０cm 程度のゴムボールを用いて, 球面上の 2 点間の距離を求めるための線が大円弧であることを直感的に予想する活動を行う。次に，球面幾何に関する用語を定義し，授業者から全体に向けて次の命題を提示する。

命題：大円弧は球面上の 2 点を最小の長さで結ぶ線となる。

最後に，命題が真であることを証明する全体活動を行う。また, 証明の過程で得られた式により，球面上の 2 点間の距離を求めることができることをおさえる。なお，証明では幅広くかつ多くの高校数学の内容を扱うため，証明内でいくつかの小問を設定し，必要であれば適宜復習を行いながら進めることで生徒の理解を促す。

また，今回は空間内にある曲線に関して考えるため, 高校数学では平面上でしか扱わなかった「曲線のパラメーター表示」,「曲線の長さの公式」に対して，その発展として空間内のものを導入しておく。

（3）課題③

より球面幾何に関する理解を深め，興味を高めるために，ゴムボールを用いて球面上に図形を描く活動を設定する。ここで，太い輪ゴムを用いて描かせることで，ペンで描いて消す手間を省く。

まず，多角形などの図形を描くためには線分が必要となることをおさえ，球面上の線分とはどのような線かを考えさせる。このなかで線分として重要な性質をおさえ，その性質を球面上で持ち合わせている線が大円弧であることに気付かせる。この大円弧を線分として用いることで，球面上に図形を描かせる活動を，次のように小問を設定し行わせる。

小問

次の図形を球面上に描きなさい。

①三角形　②正三角形
③直角三角形　④長方形
⑤ひし形　⑥円

①三角形は，球面上で描けるもっとも簡単な既知の多角形である。そのため最初に描く図形として描かせる。

②正三角形は，課題②で球面上の距離の表し方を学んだため, この確認として描かせる。ただし, 課題②で求めた距離の式を用いて等しい距離を求めて描くことは困難であるため，紐などを用

いることでおおよそ等しくなるように描けていればよいものとする。

③直角三角形は，直角の定義の確認と球面上への拡張を目的としている。平面であれば直角は90° であるといえるが，今回の活動では球面上に角度の概念を導入していないため，これを用いることができない。そこで平面上における直角の正しい定義に立ち戻り，これを球面上に拡張して定義できることを理解させる。具体的には，２つの交わる大円弧のなす球面上の４つの角が全て等しいとき，その１つの角を直角と呼ぶこととする。これは平面における直角の定義の拡張となっている。

④長方形は，2.2②でも述べたように球面上には描けない図形である。この事実を活動から体感させることで，球面上の幾何は平行線の存在しない世界であることを感得させる。

⑤ひし形は，球面上に四角形が描けるということと，②と同様に距離に注意するということをおさえるために描かせる。出題の意図は,「長方形を描くことはできなかったので，全ての四角形は球面上に描くことができない」という誤解を避けるためである。

⑥円は，課題④への足掛かりとして，また多角形以外の図形も描けるということを認識させるために描かせる。

この活動後，チャレンジ問題として以下を提示する。

チャレンジ問題

次の図形を球面上に描きなさい。

二角形　二直角三角形　三直角三角形

これらの平面上には描くことができないが，球面上であれば描くことができる図形を紹介することで, 生徒の球面幾何に対する興味をさらに高め, 理解を深めさせる目的で出題する。

（4）課題④

課題⑤⑥のために，球面円の面積を求める活動を行う。実際には円だけでなく，三角形などの多角形の面積も求めることはできる。しかし，多角形の面積を求める際には，球面上の角度の導入や平面上の多角形との面積の比較が困難である。一方，球面円の面積は，2.3③で示したように高校数学の内容を用いることで求算でき，また半径に着目することで平面円の面積との比較も容易にできるという理由から球面円を選択した。

導入として，授業者が課題①小問③で用いた世界地図を再度提示し，実際に地球上に描いた円をこの地図上に平面図形としてうまく描くことができるかという問いかけをする。これに対し，課題①の距離を表す線の結果から，生徒はきれいな円ではなく歪んだ図形になるということに納得するだろうと想定される。これとあわせてゴムボールと紙を切り取って作った平面円を用意し，この平面円をゴムボールにぴったり重ねて貼れるかどうかを実演して見せることで，球面円と半径の等しい平面円でも面積は異なることに気付かせる。これらによって，球面円を平面上に描き表して面積を求めることが困難であり，また半径の等しい平面円の面積とでも誤差が生まれるということを理解させる。このような事実から，球面上の図形の面積を求めるためには，距離と同様に面積を球面上で考えなければならないということに気付かせる。

球面円の面積の求め方を考える活動は，区分求積の捉え方が 2.3③で述べたように特別であるため，今回は指導者が大筋を説明して行う。生徒には途中で得られる式を計算することで，球面円の面積の公式を求めてもらう。公式を求めた後，具体的に球面円の面積を求める活動を演習として行う。そのときに，この演習で，球の直径に沿って垂直に 4 等分した時に得られる球面円の面積が，球面全体の面積を 4 等分したものと等しいという事実を得ることができる。これとあわせて 2.2③で

述べた公式の幾何的意味を説明することで，球面幾何に関してより興味を高め理解を深めさせる。

（5）課題⑤

課題④の導入で，球面円と平面円の面積には誤差があるということを実感させ，球面円の面積を誤差なく求めるためにその公式を考えた。しかし，例えば球面円の面積を求めるためには，実際に得られた公式を用いるために球面円の中心及び球面円の円周上の 1 点を結んだ 2 線分のなす角を求めなければならず，平面円の面積として求めることと比べて手間がかかる。そこで，課題①の活動で距離を求めた際に，小問①②では誤差は許せるほど小さいと判断したことを思い出させる。これにより，面積も許せるほど小さい誤差になるのではないかということに気付かせ，球面円と平面円の面積の比較しどれだけ誤差があるかを考えさせる。

まずこの面積を比較するにあたって，ふたつの円の半径を等しくすることに注意し，その面積をそれぞれ球面円の中心角を用いた式で表す活動をさせる。この式を用いることで，様々な比較の方法を行うことができる。例えば，具体的な数値を代入して求めた値を比較する，それぞれ関数としてグラフに表し比較する，差の量や割合を式のままで用いて表しその式について調べる，などの方法がある。こうした様々な方法が選択できるように，表やグラフ用紙などを用意しておく

この活動を個人やグループで行わせた後，全体での交流を行う。これにより，個人ではすべての方法を行えなかった生徒に対して，こうした様々な比較の方法があるということを認識させる。

また課題⑥のために，この誤差の性質として，円の半径が小さくなるほど誤差の量も割合も小さくなるということをおさえておく。

（6）課題⑥

ここまでの活動は，半径 1 の単位球面を用いて球面円の面積の公式などを求めてきた。しかし，具体例として提示してきたゴムボールや地球のように，実際には半径 1 でない球面について考える場合が多い。そこで，ゴムボールや地球上の円の面積を比較するために，半径 1 でない球面について球面円の面積の公式を考え直さなければならないことに気付かせ，これを求める活動をさせる。この結果から，球面円の中心角が等しくても差の量は球の半径によって異なるが，差の割合はこれによらないという性質に気付かせる。

球面円と平面円の面積の許せる誤差を判断するために，以下の調べる内容を提示しておく。

調べる内容

①球面円の面積　②平面円の面積

③面積の差の量　④面積の差の割合

⑤許せる誤差か(理由も)

これらについて，まずゴムボールと地球の例を用いて小問を設定し，全体で求め方などを確認しておく。 ここで設定する小問は，各球面に対して中心角の等しい２つの球面円について平面円と面積を比較する問題とする。中心角を等しくすることで，ゴムボールと地球で差の量は異なるが，差の割合は等しいという結果となる。これにより，割合で許せる誤差を判断するのであれば，各球面について両方許せるか両方許せないかのどちらかしかない。しかし量に着目すると，両方許せると判断しても，感覚的に地球の面積の差の量は許せないほど大きいと判断する生徒が現れると考えられる。これによって，許せる誤差を判断するためには割合だけでは判断できず，扱う球面によって割合と量のどちらで判断するか，またどのくらいの値で判断するかを考えなければならないということに気付かせる。このことから，個人追及活動として以下を提示する。

研究題目：球面円と平面円の許せる誤差を考えてみよう。

この活動後，全体での意見交流を行うこととする。その際には，許せる誤差がいくらかということだけでなく，なぜそのように判断したのかという理由もあわせて言わせるようにする。ただ今回は，例えば土地の調査や利用等といった面積を求める目的を用意していないため，この段階の根拠としては自分が許せると感じた誤差という程度でもよいものとする。その場合，根拠を明確にしなければいけないということをより強く感じさせるため，全体交流後に例として土地の利用や調査等の話題や，実際に誤差を許容して求められている実態などを提示する。

4.実践結果と考察

場所：岐阜大学教育学部 A 棟 426 教室

日程：平成 28 年 11 月 11 日（金），120 分

25 日（金），120 分

対象：岐阜大学教育学部数学教育講座

4 年生

この教材は高校生を対象として開発したが，今回の実践では大学 4 年生を対象として行った。その理由は，高校 3 年生が受験期であるため実践を見送ったことと，大学 4 年生が教員採用試験を経て，高校数学を復習しなおしているためである。また，本実践は高校数学の内容から発展させた内容も含んでいるので，高校数学の高い学力を持っている大学 4 年生を対象に実践を行うことで，教材として実際に扱うことができるのか判断したいと考えた。ここで，実践対象の集団は「学生」であるが,「生徒」と表すこととする。

4.1 活動の様子と考察

概ねの活動において，積極的に学習を進める生徒の姿が見られた。また，各課題場面における学習内容については，グループ活動や指導補助による配慮によって生徒の理解を促すことができた。一方，個人活動などに大きく時間を割いたため，いくつかの活動は省略，もしくは指導者の講義形式で進めた。以下，各課題の場面について詳細を記す。なお, 各課題における小問や演習問題等は，本論文の最後に配布した資料として載せておくので，そちらを参考にされたい。

（1）課題①

地図と縮尺を用いた距離の求め方がわからない生徒も散見されたが，グループでの教え合いを通して理解することができていた。世界地図の問題について，多くの生徒が赤道一周の距離から縮尺を求めたり，経度 1°あたりの距離を求めたりなど，各々の考えから実際の距離を求めていた。さらに，地球が球であることから緯度による違いを考慮しなくてはいけないことに気付き，三角比を用いて縮尺を求める生徒もいた。グループ交流では，球であることに気付いた生徒と同グループの生徒も緯度による縮尺の違いに気付き，球であることに着目した解答を与えていた。しかし，どの生徒も求める 2 点を線分で結んで距離を求めていたため，実際の距離を表す線が平面地図上では線分とはならないということに気付くことはなかった。その後の解答確認の場面において，緯度による縮尺の違いに気付かなかった生徒は，地球が球であることから縮尺が異なるという事実に驚いていた。また，実際の距離を表す線が線分とはならないという事実を説明すると，縮尺の違いに気付いていた生徒もその事実に驚嘆していた。

（2）課題②

球面上における最短距離を表す線分を予想する場面では，どのように考えればよいか見当のつかない生徒もいたが，ゴムボールを用いて考察を促すことで，全員が大円弧であると予想していた。

球面幾何の用語の定義及び，必要な知識を確認する場面では，ほとんどが地理などで扱ったことのある用語だったため，説明をしなくても学習プリントの空欄を埋めていく姿が多くみられた。緯

度経度の説明についても，通常の 3 次元空間や三角比で用いた考えと差異のないものとしたことで，直ちに理解できていた。平面における「曲線のパラメーター表示」と「曲線の長さの公式」を 3 次元に拡張する場面では，平面における既習内容の習熟が非常に低く，復習で説明した平面の内容に対して腑に落ちない様子がみられた。その一方で，平面から空間への拡張に関しては概ね理解できていた。

課題解決の場面では，考察に苦労する生徒が大半を占めていた。小問①で躓く生徒には，Grapes3D を用いて視点を変えて球面全体を見せながら個々に指導の配慮をした。小問②～④では，三角関数の積について導関数を求める場面で最も多くの躓きがみられた。詳しく述べると，関数の積に関する微分は計算できるが，合成関数の微分に気付かずに誤答を与えていた。そのため，机間巡視にて個々に指摘することで，正答にたどり着くよう配慮した。小問⑤は，本実践では授業時間の都合上，指導者から説明する程度に留めた。そのため，生徒の力でこの問題が解答可能かどうかという点について結果を得られなかったが，生徒の理解を促すことができた。

（3）課題③

授業時間の都合上，必要な知識の説明と問題提示をするのみの活動に留めた。授業後，自主的にこの活動に参加してくれた 2 名の生徒については，ゴムボールと輪ゴムを用いて試行錯誤しながら図形を描こうとする様子がみられた。特に，長方形を描くことができないということや，球面上でなら描くことができる図形に関して強い興味を示し，その事実に驚嘆していた。後述する事後アンケートの感想に，「この課題が一番面白かったです」と記述する生徒がいた。

（4）課題④

公式の求め方は指導者による説明が大半を占めたため，生徒は十分理解できていた。また，平易な計算であったため，非常に興味を持って取り組む生徒の姿がみられた。具体的数値を扱った演習においても，指導補助の必要はなく，個人やグループで進めることができた。

演習に取り組む中で，球の直径で縦に 4 等分した時に，そのひとつの面積が球面全体の面積を 4 等分したものと等しくなるという事実に興味を持った生徒がいた。そこで，公式の幾何的意味に関する説明を行ったところ，大多数の生徒が驚嘆していた。この姿から，数学的に厳密な証明のない内容ではあるが，紹介程度に留めて説明することで，より球面幾何や高校数学の幾何などへの興味関心を高めるための手立てになるのではないかと感じた。

（5）課題⑤

小問①は，様々な戸惑いを示す生徒の姿がみられた。例えば，与えられている文字を変数として扱うのか定数として扱うのか，半径が等しいとはどういうことか，球面円の半径とはどのように表すのか，等である。この問題は，机間指導によって個々に説明することで解決に至った。小問②は，生徒にとってほぼ未経験の活動だったため，何をどのようにしてよいのかわからない様子だった。そこで，具体的に誤差を調べるためのいくつかの手法を，早い段階で指導者から提示した。また，指定した時間では個人活動の完結に至らなかったため，いくつかの結果を指導者から提示した。この内容に関しても，生徒の理解が得られていた。

（6）課題⑥

小問①及び②は，課題⑤の拡張でもあったため，小問①は生徒の活動で，小問②は指導者が説明する流れで進めた。こちらも小問②の誤差についての理解は十分得られたと感じた。しかし，小問①の文字を用いて面積を表すことについて，生徒は課題④と同様にして式を表そうとしていたが，こ

の方法では正しい式を表すことができないため，指導者が正しい考え方を指導する必要が生じた。

具体的数値による演習場面では，式を正しく用いて進めることができていた。ゴムボールを用いた演習では，ほとんどの生徒が誤差を許せると判断した。しかし，図を用いて様々な表し方によって視覚的に差の割合を示したところ，許せないと意見を変えた生徒はいなかったが，意外と大きい誤差かもしれないと何人かは感じていたようであった。地球を用いた演習では，差の割合はゴムボールの演習と等しくなるように設定していたため，差の量と割合を求めた時点では，割合から許せると判断した生徒が 4 分の 3 ほどいた。しかし，差の量が具体的にどの程度の規模の土地に相当するかを提示したところ，生徒らは非常に驚いた様子をみせ，ほとんどの生徒が許せないと意見を変えていた。

研究題目では，想定していた方法とは異なり，個々人で許せる誤差を先に定め，この誤差に収まる円を求める方法をとっている生徒がほとんどであった。そのため，今回は生徒らが選んだ方法を尊重して活動を進めた。この方法で進めた生徒は，具体的に数値を代入していき誤差が収まる値を探す方法と，不等式を用いてこれを満たす範囲を求める方法のどちらかの求め方をしていた。しかし，後者の場合は高校数学では扱ったことのない不等式になるため，この方法をとった生徒は結果にたどり着くことができていなかった。また，許せる誤差を割合で判断する生徒が多く，その割合も想定よりも大きな誤差であった。

4.2 アンケートの結果

生徒には事前及び事後にアンケートを実施した。その項目内容と回答をいくつか述べる。選択式の設問に関しては，5，はい，4，どちらかというとはい，2，どちらかというといいえ，1，いいえの 4 つの選択肢を用意した。

授業前回答者数　23 名

授業後回答者数　21 名（内 1 名は 1 日目欠席）

前後比較可能者数　20 名

（1）事前アンケートの結果

今回は教育学部 4 年生を対象としたため，希望する大学や職業に関する回答は有効でないと判断し割愛する。

事前 1.数学は好きですか。

回答　5，12 名　4，10 名　2，1 名　1，0 名

事前 2.高校数学を学ぶ必要はあると思いますか。

回答　5，8 名　4，15 名　2，0 名　1，0 名

事前 3.高校数学は生活や社会に使われていると思いますか。

回答　5，7 名　4，13 名　2，3 名　1，0 名

事前 7.高校数学が生活や社会のなかで使われている場面を知りたいですか。

回答　5，15 名　4，4 名　2，3 名　1，0 名

事前 8.生活や社会のなかの問題に，高校数学を用いて解決できるものがあると思いますか。

回答　5，10 名　4，9 名　2，3 名　1，0 名

事前 9.生活や社会のなかの問題を，高校数学を用いて解決したいと思いますか。

回答　5，8 名　4，8 名　2，4 名　1，2 名

事前 10. 三角比・三角関数，微分，積分について，生活や社会のなかで使われている場面を知っていれば，その場面を答えてください。

具体的な場面を回答した人数　12 名

事前 11. あなたはなぜ高校数学を学んでいますか。

回答

・好きだから，面白いから，楽しいからなどの好意的理由から　6 名
・受験，進学，就職に必要だからなどの，自分にとって必要なものだから　6 名
・授業にあるから，やらされているからなどの義務感から　2 名
・考える力を伸ばすため，思考力を高めるためなど，自己の能力を高めるため　3 名
・無記入　6 名

（2）事後アンケートの結果

関連する事前アンケートと比較し，2 または 1 という回答から 5 または 4 へ変化した場合を肯定的に変化した， 5 または 4 という回答から 2 または 1 へ変化した場合を否定的に変化したとしている。

事後 1.高校数学を学ぶ必要性を感じましたか。

回答　5，11 名　4，8 名　2，1 名　1，1 名

事前 2.との比較

肯定的に変化　0 名　　否定的に変化　2 名

事後 2.高校数学を学ぶ意欲は高まりましたか。

回答　5，7 名　4，11 名　2，1 名　1，2 名

事後 3.高校数学が生活や社会のなかで使われていると感じましたか。

回答　5，7 名　4，13 名　2，0 名　1，1 名

事前 3.との比較

肯定的に変化　3 名　　否定的に変化　1 名

事後 4.生活や社会のなかの問題に，高校数学を用いて解決してみたいと思いましたか。

回答　5，6 名　4，11 名　2，3 名　1，1 名

事前 9.との比較

肯定的に変化　3 名　　否定的に変化　1 名

事後 5.生活や社会のなかの問題を，高校数学を用いて解決できそうだと感じましたか。

回答　5，3 名　4，15 名　2，2 名　1，1 名

事後 6.球面幾何の内容は面白いと思いましたか。

回答　5，10 名　4，6 名　2，3 名　1，2 名

事後 7.球面幾何の内容をもっと知りたいと思いましたか。

回答　5，5 名　4，9 名　2，5 名　1，2 名

事後 8.許せる誤差を判断することは難しかったですか。

回答　5，12 名　4，5 名　2，3 名　1，1 名

事後 9.自分なりに考えた結論を出すことは重要だと思いましたか。

回答　5，12 名　4，8 名　2，1 名　1，0 名

事後 10.自分で考えた結論について理由を明らかにすることは重要だと思いましたか。

回答　5，12 名　4，8 名　2，0 名　1，1 名

事後 11.授業などで，許せる誤差を判断するような，自分で考えて自分なりの結論を出す活動をもっとしてみたいですか。

回答　5，4 名　4，13 名　2，3 名　1，1 名

事後 12.次のものについて，理解が深まったと思いますか。

12.1 三角関数

回答　5，7 名　4，12 名　2，1 名　1，1 名

12.2 微分

回答　5，3 名　4，15 名　2，2 名　1，1 名

12.3 積分

回答　5，3 名　4，16 名　2，1 名　1，1 名

12.4 曲線のパラメーター表示

回答　5，5 名　4，12 名　2，2 名　1，2 名

12.5 区分求積法

回答　5，6 名　4，12 名　2，1 名　1，2 名

（3）各課題と全体を通しての感想

以下では各課題と全体を通しての感想をいくつか抜粋して紹介する。

課題①について

・小問③についてもう少しじっくり考えたかった。
・最短距離が曲線だったことに驚いた。
・地球規模の地図だと直線ではだめなのはおもしろい。
・ひっかかって，そっか！という気付きがあってよかった。楽しかった。

課題②について

・大円弧を考えればよいのではないかと予想できたことが楽しかった。
・どれだけ誤差が生まれるか考えたことがなかった！
・最初何していいか分からなかった。
・ボールを使うとわかりやすかった。
・難しい考え方だった。

課題③について

・この課題が一番面白かったです。
・なぜ長方形はつくれないのだろう？球面だからかな？と疑問に思った。
・平面と違うことが興味深い。

課題④について
・球面円の面積は区分求積法の考え方を使えば求められると分かり，すごいなと思った。
・線分のときより難しかった。
・高校の範囲で分かりやすかった。
・区分求積からの流れで分かりやすく納得できた。
・高校までの知識で十分解けたために，すんなり理解できた。
・球面上の円の面積をどのように求めるのかも時間があれば自分で考えたかった。

課題⑤について
・具体的な球で考えることで，誤差のイメージがつきやすかった。
・計算が大変だった。誤差をどのようにとらえて考えればよいかが分からなかった。
・割合や数値で見ても判断できなかったけど，実際に地球上だとどうなんだろうと考えてみたら許せるか許せないか判断できた。
・どれだけの誤差なら許せるかを考えるのが面白かった。
・許せる誤差と許せない誤差が人によって基準が違っていておもしろかったです。
・%の大きさと実際の数値による大きさを見比べたり，面積で比較することで受ける印象は全く異なるのだと分かった。

課題⑥について
・球の半径が大きくなるほど誤差が許せなくて，どこなら許せるだろう？と未知で面白かった。
・うまく計算できませんでしたが，地球などの大きい規模の球だと判断が難しかったです。
・（ゴムボールで）許していた誤差で（地球だと）日本 2 つ分も違いが出てくるのには驚いた。
・2.26%は日本 2 個分ぐらいと考えると決して軽視できないと思った。
・地球でいうと 1%が日本 1 個分であることに驚いた。
・単位球とほとんど同じだったので，全然抵抗なく考えることができた。

授業全体について
・内容はとても面白かったです。最後は少し疲れました。
・図形等が苦手なので考えるのに少し時間はかかったが，色々な場面で具体的な図等がでてきたので想像しやすかった。
・最初は球面上の面積を求めたり，平面上との誤差を調べることは難しいと思っていたけれど，求め方が分かるとおもしろいなと思い，日常生活と高校数学とのつながりが感じられた。
・幾何学が苦手な身でも分かりやすかった。考えていろんなことが分かっていくのが楽しかった。
・地図という具体物にリンクさせて数学が学べるのはとても良いと思った。
・ゆるせるかゆるせないかを考えるのは自分なりの答えが出るので良いと思った。
・全体を通して発展で難しいのかな？と感じましたが高校数学の範囲で考えることができるものだったので楽しくできました。
・実際に誤差をだしてみて，許せる誤差が変わるのを感じたので，差の量と割合の二つの方法で誤差を考える良さに気付けた。
・高校数学の必要性を授業全体を通して強く感じた。
・高校数学の内容を最大限活かしての内容でかなり難しかったです。
・緯度や経度など今までに習った知識を扱い，定義などを定めていて，数学と現実でどのように伝えるのかなど知れて楽しかったです。

4.3 分析と考察

4.1，4.2 より分析した結果とその考察について述べる。活動の様子やアンケート結果について，詳しくは 4.1，4.2 を参照していただきたい

（1）対象者について

事前 1.より，今回の実践の対象集団は，数学に対して非常に好意的に考えていることがわかる。また事前 11.より，4 分の 1 の生徒は高校数学を学ぶ理由として，好きだから，面白いから等と回答し，特に好意的に捉えていると考えられる。しかし，これと同程度の人数が受験や就職で必要だから学んでいると考えていた。今回は数学教育専攻の学生を対象にしているため，実際の高校生よりも，好意的に考えている割合が高くなっていると考えられる。

事前 2.より，高校数学を学ぶことの必要性に関して，全員が肯定的に考えていることがわかる。また事前 3.より 8 割以上の生徒が生活や社会の中で使われている，問題を解決できると思っている。しかし，事前 3.で 5 または 4 と回答した 20 名のうち，事前 10.で具体的な場面を回答した生徒は 9 名だけであった。これは事前 8.と事前 10.でも同様の関係がみられた。このことから，約半数の生徒に関して，生活や社会のなかで高校数学が使われており，また解決できる問題があると思っているが，その具体的な場面について，すぐに思いついて回答できるほどの知識は定着していないということが考えられる。

事前 7.より，8 割以上の生徒が，高校数学が使われている場面について興味を持っていることがわかる。しかし，自身で解決することに関して肯定的に考えている生徒は 7 割ほどになっている。また，5 と回答した生徒に関して，事前 7.では 6 割以上だが，事前 9. では 4 割未満であることからも，自身で解決しようという意欲は低くなっていると考える。

以上の結果により，今回の対象集団は，数学そのものや高校数学を学習することに関して好意的に捉えており，その利用や問題解決への応用に関しても肯定的であり興味も持っていると考える。一方，実際に利用されている場面はあまり知らず，解決しようという意欲は低いと考える。今回は教育学部数学教育講座の学生を対象としているため，高校生を対象として実践を行った場合，今回得られた結果よりも肯定的な割合が低いと予想される。

（2）教材・授業について

活動全体を通して，興味関心を持って積極的に取り組む様子がみられた。事後アンケートの感想からも，楽しかった，面白かった等の記述が多くみられた。特に，課題①小問③や課題②演習②，課題⑤演習②において，生徒にとって想像もしていなかったであろう事実などに驚嘆する様子が顕著にみられた。これらのことから，生徒にとって興味関心を掻き立て積極的に取り組ませられるような教材であったと考える。

事前・事後調査の比較より，高校数学自体や生活や社会のなかの問題への応用等の有用性について，その必要性や学ぶ意欲等がわずかであるが肯定的に変化しているといえる。しかし，今回の対象集団はもともとこうした必要性や意欲に関して肯定的である割合が非常に高かった。これらのことから，高校数学の必要性や意欲等を十分与えることができる教材であったかは判断しきれないと考える。

高校数学の内容の扱いについて，公式や数値を用いた計算はよくできていたが，課題②小問①②や課題⑤小問①②などの数学的な考え方を必要とする問題では，驚きや戸惑いのある生徒が多くいた。しかし，これらの小問や区分求積法の考え方について，図や具体物を用いて説明をすることで，多くの生徒が理解し納得して取り組む様子がみられた。事後 12.からも，8 割以上の生徒が，理解が深まったと感じていることが分かった。自由記述の感想でも，高校数学の内容で考えることができたという記述が多くあり，特に区分求積法についての記述が多くみられ，その利用法がより理解できたと考えられる。しかし，内容や考え方が難しいという記述もあり，実際の活動でも終止つまずき気味の生徒もいた。これらのことから，高校数

学の内容のみで扱うことができ，また理解を深めさせることができる教材であるが，扱ううえでは対象者の習熟度に合わせた十分な補助が必要であると考える。

課題②始めの予想や，課題⑥研究題目については，何をしてよいのかわからない様子の生徒が多くいたが，これについても個別に補助をすることで活動に取り組むことができ，ある程度結論を出すことができていた。このことから，生徒がすぐに理解し活動に取り組めるような，全体での指示や説明が必要であると考える。

許せる誤差を判断することについて，事後アンケートではその重要性や意欲に関して肯定的な回答をしている割合が高かった。感想でも，面白かった等の肯定的な記述が多くみられた。活動でも，グループで意見を交わしている生徒もいたが，最終的には全員が各自で許せる誤差に見当をつけ，研究題目で追及できていた。また，活動に取り組む様子も，興味や意欲を持ち積極的に調べようとしていたようにみられた。しかし，その追及の結果や，課題⑥感想での「地球でいうと 1%が日本 1 個分であることに驚いた。」等といった記述から，差の量と割合について十分な理解ができていないことが考えられる。この原因として，以下の 2 点が挙げられる。1 点目は活動時間が十分でなく，中心角ごとの差の割合を求めるだけで終わってしまい，その中心角での差の量を求めることができなかったことである。中心角ごとの差の量と割合を求めることができていれば，ゴムボールと地球で許せる誤差の割合は異なるという結果も生まれたのではないかと考える。2 点目は割合に関する理解が十分でないことである。実際，割合が等しくても基準量が異なれば比較量も異なるという性質に気付かず考えている生徒がいたため，上記のような「地球全体の 1%が日本 1 個分である」という勘違いが生まれたのだと考える。

自分なりに判断した許せる誤差について，これを他者に伝える活動も今回は行うことができなかった。そのため，適した比較方法で根拠を明確にすることができていたかどうかを判断することはできなかった。しかし，前述したとおり，割合についての理解が不十分であった生徒は，適した比較方法についても十分考えることはできていなかったのではないかと予想される。

球面幾何への興味や関心については，事後 6.事後 7.より，約 7 割の生徒が肯定的に捉えていることが分かる。感想でも肯定的な記述をみることができた。しかし，ほかの事項と比べ否定的な回答の割合が高くなっていることもわかる。その原因として，時間の都合上課題③を行うことができなかったため，生徒らにとって体感した球面幾何の性質が，平面上とは距離や面積の求め方が異なり，誤差が発生するということだけであることが考えられる。

全体を通して，生徒らにとって難しく扱ったことのない内容もあったが，補助等によってほとんどの内容は十分な理解が得られた。また，興味関心を持って積極的に取り組む生徒の様子がみられた。ただし，今回の対象集団は非常に数学に肯定的であり，学力も高かった。そのため，高校生対象として本教材を扱う際には，さらに綿密な援助が必要になると考える。

今回は 2 日間を通して活動時間を十分に与えることができなかった。そのため，課題②小問⑤や課題③，課題⑤小問①②，課題⑥研究題目について，生徒ら自身が納得ゆくまでの個人追及をさせることができなかった。この活動時間を十分確保することができれば，特に，課題③を行うことで球面幾何への興味関心を高めたり，研究題目で差の量と割合に関する事実についてより理解を深めさせたり，根拠を明確にして他者に伝えようとさせたりすることができたと考える。

4.4 ねらいの達成度

(a)について

4.3 授業・教材についてより，ねらいが達成でき

たと判断する。

(b)について

4.3 授業・教材についてより，「主体的に判断しようとすることができる」という部分については達成できたが，「適した比較の仕方を考え根拠を明確にして」という部分については十分な達成はできなかったと考える。

球面幾何について

4.3 授業・教材についてより，球面幾何の面白さや楽しさを感じさせることはできたと考える。しかし，実践時間の不足により，球面上で描くことができるが平面では描くことのできない図形や，その逆を満たす図形が存在する事実を生徒に紹介したのみで，図形を描く活動を通して生徒に図形の存在を実感させることができなかった。ゆえに，授業者が伝えたいと考えていた球面幾何の面白さや楽しさについて，生徒に十分感じさせることはできなかったと考える。

5.今後の課題

4.3，4.4 より今後の課題として以下の 2 点を挙げる。

1 点目は，より容易に理解できるような図や具体物を用いた説明・補助の仕方を考えること。

2 点目は，授業対象者の習熟度に合わせた題材の設定と，適切な活動時間の確保ができる授業展開案を作成すること。

今回の実践で，高校数学の内容で十分に活動を行うことは確認できた。しかし，ひとつひとつの計算や考え方には生徒にとって不慣れなものもあり，特に数Ⅲまでの内容を十分習得できていない生徒には難しすぎるということも確認できた。また，両日で授業時間が足りず，非常に興味を持った，一番面白かったという感想のあった課題③や，課題⑥研究題目について十分な活動を行うことができなかった。これができていれば，球面幾何への興味や理解をさらに深めたり，ねらい(b)の未達成部分を解決することができたりしたのではないかと考える。このことから今後の課題として，上記に挙げた 2 点についてさらなる改良が必要であると考える。

6.終わりに

今回は球面上の距離の求め方について考える活動はしたが，実際にこの距離を求めることはしなかった。この距離を求める際には，今回扱うことのなかった別の高校数学の内容を用いる必要がある。また，角度やベクトルを用いることでさらに興味深い定理などを証明することができる。このように，球面幾何は高校数学の内容だけで様々な扱い方ができ，その扱い方によって育むことのできる能力なども多様に増えるのではないかと考えている。また実践でも，生徒にとって今まで扱ったことのない内容であることや，実生活とつながりのある内容であることから，非常に興味を持って積極的に考え取り組もうとする姿がみられた。許せる誤差を判断するということに関しても，後日何人かの生徒に個別に話を聞いたところ，今までやったことのないことだったが，とても面白くためになる活動であったという感想が聞けた。これらのことから，球面幾何は高校数学の発展教材として非常に有用であり，高校生にとっても数学に対しての意欲や興味の持てる内容であるのではないか，という確かな手ごたえを感じた。

引用・参考文献

[1]文部科学省，2016，教育課程企画特別部会（第 20 回）
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/053/siryo/1376199.htm
[2]見城尚志，佐野茂，2006，ピタゴラスの定理でわかる相対性理論―時空の謎を解く双曲幾何―，技術評論社

[3]P.M.H. Wilson，小島定吉（訳），2009，曲空間の幾何学，朝倉書店
[4]前原潤，1998，入門　有限・離散の数学 5 と球面の幾何学，朝倉書店
[5]中井三留，1989，微分法と積分法，学術図書出版社
[6]大島利雄ほか 13 名，2011，数学Ⅰ，数研出版
[7]川中宣明ほか 13 名，2011，数学Ⅱ，数研出版
[8]大島利雄ほか 14 名，2012，数学Ⅲ，数研出版
[9]坪井俊ほか 13 名，2011，数学 A，数研出版
[10]坪井俊ほか 13 名，2012，数学 B，数研出版
[11]球面三角形の角度 [物理のかぎしっぽ], http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/SphereTriangle/
[12]球面幾何学 - SSH 数学図形ゼミ, http://sshmathgeom.private.coocan.jp/geometryonsphere.pdf
[13]球面三角法, http://www.astro.sci.yamaguchi-u.ac.jp/~kenta/eclipse/SphericalTriangle081106.pdf

画像引用
・岐阜県 – Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%B2%90%E9%98%9C%E7%9C%8C
・少年野球 BLOG：地球を使え, http://metoo.seesaa.net/article/410772755.html
・球面 – Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%90%83%E9%9D%A2
・ユーラシア – Wikipedia, https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%A6%E3%83%BC%E3%83%A9%E3%82%B7%E3%82%A2
・地理院地図 - GSI HOME PAGE - 国土地理院, http://maps.gsi.go.jp/#5/35.362222/138.731389/&base=std&ls=std&disp=1&vs=c1j0l0u0f0
・世界地図 http://www.lc.osakafu-u.ac.jp/staff/zhang/worldLan/lin_worldMap.htm

球面幾何指導案 1 日目

過程	ねらい	学習活動	指導援助
課題①	・小中高で習ってきた世界(平面や空間)の図形と，これから考える球面上の図形では，距離とそれを表す線について異なる性質があることに気づかせる。 （・縮尺の大きな地図になるほど誤差の割合も大きくなることに気付かせる） ・平面地図では地球上の距離を求めにくいことに気付かせ，球面を用いて考えることの必要性に気付かせる。	○地図を使って 2 点間の実際の距離を求めてみよう。 課題① 様々な地図で 2 点間の距離を求めてみよう。 小問①　（岐阜県の地図） 岐阜－高山間の距離を求めなさい。 小問②　（日本地図） 札幌－鹿児島間の距離を求めなさい。 小問③　（世界地図） 東京－ワシントン D.C.間の距離を求めなさい。 ・小問①②は地図上の距離と縮尺を用いて実際の距離を求めることができた。 ・小問③は赤道一周の距離から求めた縮尺を使って実際に距離を求めたが大きな誤差が出てしまう。 →実際の地球は平面ではなく球の形をしている。 だから赤道部分の縮尺と東京－ワシントン D.C.間部分の縮尺が異なる。そのせいで誤差が生まれる。 △東京－ワシントン D.C.間部分の縮尺を使ってもう一度実際の距離を求めてみよう。 ・それでもまだ誤差が生まれてしまう。 →縮尺以外にも問題があるのでは。 △実は平面上で 2 点を結んだ線分は，実際の地球上では遠回りの線になっている。 △世界地図規模で距離を求めるには地球の形，つまり球面を用いて考えなければならない。 →球面上の距離を求めるにはどうすればいいのか。 →球面上で直線や図形を考えることは，今まで習ってきたことと同じようにようにはいかない。新しく球面上で考えなければならない。 △図形の大きさや性質などについて考える数学の分野を「幾何」という。 球の表面で考える幾何を「球面幾何」という。	・小問①で縮尺と地図上の距離を用いた実際の距離の求め方を確認しておく。 ・求め方は赤道一周の距離を用いた時と同様なので個人活動では行わず，指導者が説明して進める。 ・図に示して見せながら説明する。
課題②		○球面上の距離について考えてみよう。 課題② 球面上の距離の求め方を考えてみよう。	・ゴムボールを配布し適当に決めた 2 点

課題②		△2 点間の距離を表す線とは，どのような線だろうか。 ・球を縦に半分に分けるような線。 △球面幾何ではそのような線に特別に名前がついています。 △今後の学習のために，球面幾何で扱う言葉を定義しておきます。	について，予想させる。

定義　大円

球面とその中心を通る平面が交わってできる円周を**大円**という。また，この円周上の 2 点で切り取られた部分を**大円弧**という。

定義　球面

3 次元空間で中心が原点である球について考える。

この球面上の点で，z 座標が最大の点を**北極**，最小の点を**南極**という。

球面と xy 平面との交わりとして得られる大円を**赤道**という。

球面上で，z 座標が正の部分全体の半球面を**北半球**，負の部分全体の半球面を**南半球**という。

球面と xy 平面に平行な平面との交わりとして得られる円周を**緯線**という。

緯線と xy 平面によって決まる角度を**緯度**といい $\boldsymbol{\theta}$ で表す。

北極と南極を結ぶ大円弧を**経線**という。

経線と x 軸の正の部分によって決まる角度を**経度**といい $\boldsymbol{\varphi}$ で表す。

緯度について

緯線が赤道と重なっているときの緯度を 0 とする。

また，緯線が北半球上にあるときの緯度を正，南半球上にあるときの緯度を負とする。

緯度 θ の範囲は，$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}}$ とする。

経度について

経線が x 軸の正の部分を通るときの経度を 0 とする。

また，経線が y 座標正の部分にあるときの経度を正，負の部分にあるときの経度を負とする。

経度 φ の範囲は，$\boldsymbol{-\pi < \varphi \leq \pi}$ とする。

△先程の予想が正しいか考えてみよう。

問題

大円弧は球面上の 2 点を最小の長さで結ぶ線となるか

△これを考えるために必要な高校数学の復習と，発展内容を学習しましょう。

課題②

高校数学の復習と発展①　曲線のパラメーター表示

復習　平面上の曲線のパラメーター表示

平面上の曲線 γ をパラメーター t を用いて次のように表すことができる。

$$x = x(t),\ y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

$$A = \gamma(a) = \bigl(x(a),\ y(a)\bigr) \qquad B = \gamma(b) = \bigl(x(b),\ y(b)\bigr)$$

発展　空間内の曲線のパラメーター表示

空間内の曲線 γ をパラメーター t を用いて次のように表すことができる。

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

$$A = \gamma(a) = \bigl(x(a),\ y(a),\ z(a)\bigr) \qquad B = \gamma(b) = \bigl(x(b),\ y(b),\ z(b)\bigr)$$

高校数学の復習と発展②　曲線の長さの公式

復習　平面上の曲線の長さ L

パラメーター t を用いて表された曲線について，この長さ L は次のように表される。

$$L = \int_a^b \sqrt{\bigl(x'(t)\bigr)^2 + \bigl(y'(t)\bigr)^2}\,dt$$

発展　空間内の曲線の長さ L

パラメーター t を用いて表された曲線について，この長さ L は次のように表される。

$$L = \int_a^b \sqrt{\bigl(x'(t)\bigr)^2 + \bigl(y'(t)\bigr)^2 + \bigl(z'(t)\bigr)^2}\,dt$$

・三角比を用いることで緯度経度から 3 次元空間座標を表すことができることを体感させる。

利用する高校数学の知識

・三角関数・関数の積・合成関数・パラメーター表示された関数の微分

・二次式の展開の公式

・三角関数の定理 $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

○問題を証明しよう。

小問①

曲線上の点 $\gamma(t)$ の座標 $x = x(t)$，$y = y(t)$，$z = z(t)$を，その緯度 $\theta(t)$，経度 $\varphi(t)$ を用いて表しなさい。

空間の曲線の公式

$$L = \int_a^b \sqrt{\bigl(x'(t)\bigr)^2 + \bigl(y'(t)\bigr)^2 + \bigl(z'(t)\bigr)^2}\,dt$$

より，長さ L を $\theta(t)$，$\varphi(t)$ を用いて表す。

小問②

$x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$ をそれぞれ求めなさい。

小問③

$\bigl(x'(t)\bigr)^2$，$\bigl(y'(t)\bigr)^2$，$\bigl(z'(t)\bigr)^2$ をそれぞれ求めなさい。

小問④

$\bigl(x'(t)\bigr)^2 + \bigl(y'(t)\bigr)^2 + \bigl(z'(t)\bigr)^2$ を求めなさい。

・特定の具体的な曲線ではなく，任意の曲線について学習を進めていくことについて注意する。

・球面上の点は緯度経度を用いて表されるため，曲線の長さの公式を利用するためには空間座標に表し直す必要があることを理解させる。

・実際に球面の見取り図を用いて、確認させながら考える。

つまずきのある生徒には段階的にヒントを与えて援助する。

・円上の点の座標の表し方

・球面上の点の高さ(z 座標)の表し方。

・点の位置で切り取られる緯線の存在とその半径。

・三角関数，積，合成関数，パラメーター表示された関数などの微分という数Ⅲでの内容が多く使われているため，正しく計算できるように必要に応じて復習をいれる。

<table>
<tr>
<td>課
題
②</td>
<td>

利用する高校数学の知識
・定積分
・平方根の性質
・関数の関係と積分の性質

利用する知識
・扇形の弧の長さと中心角の関係</td>
<td>以上より,
$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\theta'(t)\right)^2+\left(\varphi'(t)\right)^2\cos^2\theta(t)}\,dt$$
となり, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ を用いて, 2 点 A , B を結ぶ曲線の長さ L を表すことができた。
次に，この長さ L の最小値を考える。

小問⑤
　次の式が成り立つようにⅡ，Ⅳに式をあてはめなさい。
また，Ⅰ，Ⅲの不等号が成り立つことを示しなさい。
$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\theta'(t)\right)^2+\left(\varphi'(t)\right)^2\cos^2\theta(t)}\,dt$$
$$\int_a^b \sqrt{\left(\theta'(t)\right)^2}dt$$
$$=\int_a^b \qquad\qquad\qquad dt$$
$$\left|\int_a^b \theta'(t)dt\right|$$
$$=$$

ここで，$|\theta(b)-\theta(a)|$ について考えてみる。
（説明略）
最後に，Ⅰ，Ⅲについて等号成立
（証明略）

問題の結論
　大円弧は球面上の 2 点を最小の長さ，つまり距離を表す線となる。

ここで，$|\theta(b)-\theta(a)|$ についてもう一度考えてみる。

課題②の結論
　球面上の 2 点間の距離を求めるときには，その 2 点と中心のなす角 θ_0 を求めればよい。</td>
<td>

・ⅠⅢに関して
　不等号の判断に困るようであれば解答を早めに提示し，この不等号の成立について考える時間を与える。
・不等号の成立に関して
　数学的に厳密な証明を今回は求めず，グラフなどを用いて感覚的に納得のできる説明ができればよいものとする。</td>
</tr>
<tr>
<td>課
題
③</td>
<td>・大円弧を線分として扱うことを経験させる。
・球面の幾何的特徴を体感させる。
　・直角が存在すること</td>
<td>○球面上の図形について考えてみよう。

課題③
　球面上に図形を描いてみよう。

△多角形を描くためには線分が必要。球面上の線分とはどのような線だろうか。
△線分として重要な 2 つの性質
　・2 点間の距離，つまり最小の長さを表すことができる。</td>
<td></td>
</tr>
</table>

課題③	・平行線が存在しないこと 　・球面の幾何的特徴を利用して描ける図形があること。 　・2本の線分で囲まれる図形 　・2つ以上の直角をもつ三角形 　（➝三角形の内角の和がπ以上である） ・円を描かせることで2日目の導入への足掛かりとする。	△球面上でこの2つの性質を満たしている線とは。 　➝大円弧 △大円弧を線分として使って，球面上に図形を描いてみよう。 小問 　次の図形を球面上に描きなさい。 　　①　三角形　　②　正三角形 　　③　直角三角形　　④　長方形 　　⑤　ひし形　　⑥　円 ・④は描けなかった。 　➝球面上には描けない図形もある。 △逆に球面上でなら描くことができる図形もある。 チャレンジ問題 　次の図形を球面上に描きなさい。 　　二角形　二直角三角形　三直角三角形	・②④⑤で等距離を表すことが必要となるが，今回は座標を与えていないため。適当な長さに切ったひもを用いて等距離を表すようにする。

指導案 2 日目

過程	ねらい	学習活動	指導援助
課題④	・球面上の図形の面積は球面上で考える必要があることを確認する。	○球面上の円の面積 △世界地図（平面）上に描かれた円は，地球上に描かれた円の面積と等しくなるだろうか。 ・球面上の円を平面上にうまく描き表すことができないから面積を求めることはできない。 ➝球面上での円の面積を求め方が必要になる。 課題④ 球面上の円の面積の求め方を考えてみよう。	・ゴムボールに紙を切り取って作った平面円をぴったり貼り合わすことができるかを実演して見せる。
	利用する高校数学の知識 ・区分求積法 ・三角関数の積分 ・半角の公式	○区分求積法の復習 ○区分求積法を用いた考え方の説明 小問① 実際にこの式 $\int_0^{\theta} 2\pi \sin x \, dx$ を計算して，単位球面円の面積の式を求めなさい。	・スライドを用いて，球面円がいくつかの線分の回転面の近似によって得られることを確認する。 ・線分の無限分割によって得られる回転面の和により，積分で球面円の面積を求めることができることを確認する。
	・求めた公式が正しいことを実際に計算させることで納得させる。	○求めた公式を使って球面円の面積を計算してみよう。 演習① 球面円の面積の公式を用いて，単位球の半球の面積が 2π となることを確かめなさい。 演習② 単位球を縦に 4 等分した球面円の面積を求めなさい。 ・縦に 4 等分した球面円の面積は，球面全体の面積を 4 等分したものと等しくなる。 ➝公式の幾何的意味について説明する。	・半球， 4 等分した球面円を表す球面円の中心角に着目させる。
課題⑤		○平面円との比較 △球面円の面積の公式は求められたが，いちいちこれを使って考えるのは面倒。 △課題①小問①②のように誤差が許せるのであれば平面円の公式を使った方が簡単。 △球面円と平面円の面積の誤差について調べてみよう。 課題⑤ 球面円と平面円の面積ではどれだけ誤差があるか調べてみよう。 △中心角 θ の球面円をもとにして，これと半径の等しい平面円について考える。	

課題⑤

小問①
このときの球面円と平面円の半径，面積を表しなさい。

単位球面	中心角 θ の球面円 S_S	平面円 $\mathbb{R}^2{}_S$
半径 r	θ	θ
面積	$2\pi(1-\cos\theta)=4\pi\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$	$\pi\theta^2=4\pi\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$

・平面円はその半径を用いて面積を表すことができることから，2つの円の半径を一致させて面積を比べればよいことを確認させる。

・中心角と差の量と割合の関係に気付かせる。

小問②
このときの球面円と平面円の面積の誤差について調べなさい。

△いろいろな比較の仕方がある。
・面積の差の量で　・面積の差の割合で
・文字式を使って　・具体的な数値を使って
・表を使って　・グラフを使って

・表やグラフを用いて考えられるようにこれらの用紙を用意しておく。

課題⑥

○単位球面以外の球面円について

・単位球面以外の場合について考える必要性を感じさせる。

課題⑥
単位球面以外の球面で，球面円と平面円の面積について調べてみよう。

小問①
半径 R の球面の球面円と平面円の半径，面積を表しなさい。

・表し方に困っている生徒がいれば，相似を用いて考えれば用意ことを指導する。

半径 R の球面	中心角 θ の球面円 S_S	平面円 $\mathbb{R}^2{}_S$
円の半径 r	Rθ	Rθ
面積	$2\pi R^2(1-\cos\theta)=4\pi R^2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$	$\pi R^2\theta^2=4\pi R^2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$

小問②
このときの球面円と平面円の面積の誤差について調べなさい。

・課題⑤小問②と比較することで，中心角が等しければ，差の量は球の半径によって異なるが，差の割合は球の半径によらないことに気付かせる。

○実際の球面で，球面円と平面円の面積を比べてみよう。

球面円と平面円について，調べる内容。
①　球面円の面積　　②　平面円の面積
③　面積の差　　④差の割合
⑤　許せる誤差か

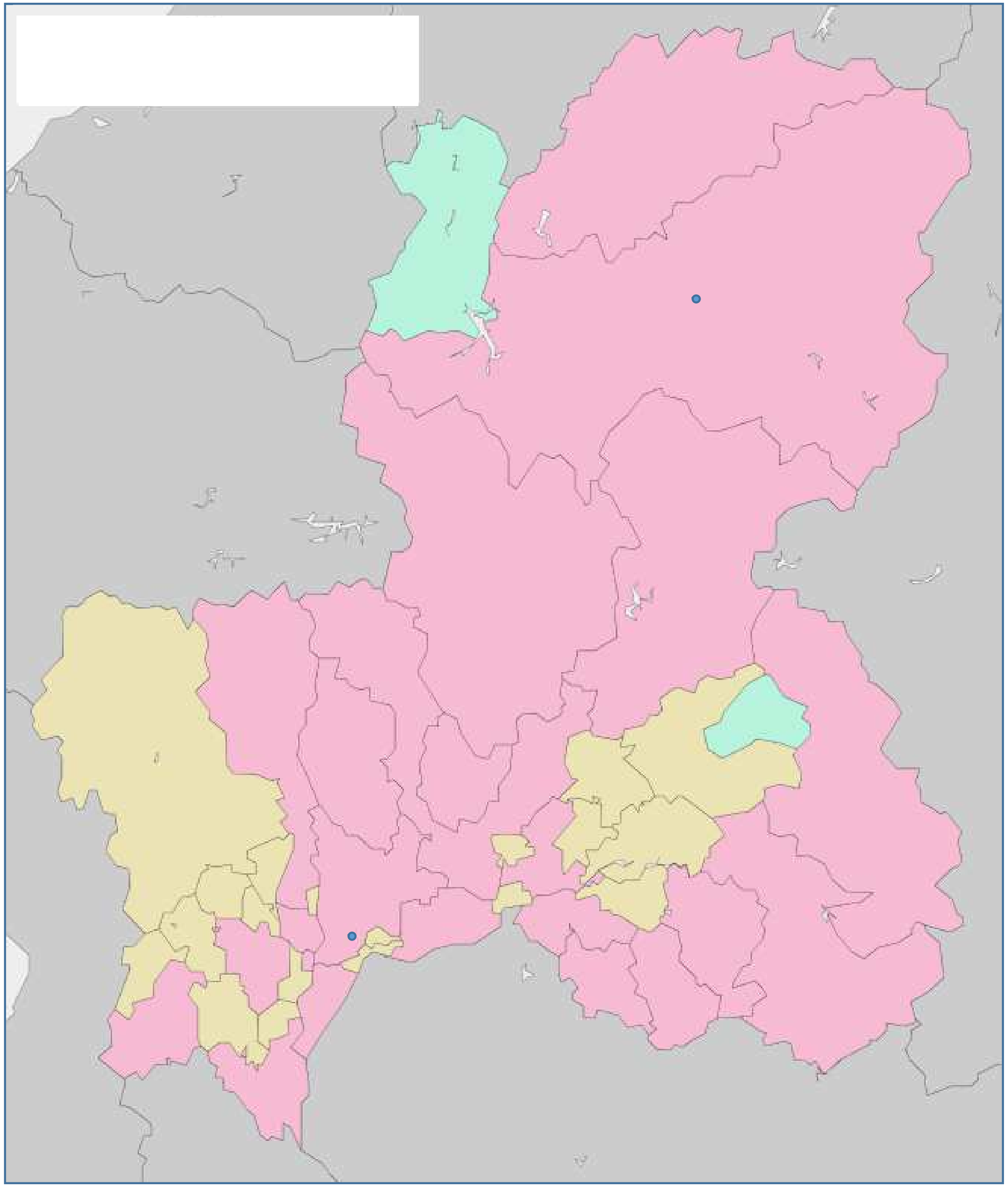
課題⑥	・差の割合だけで許せる誤差を判断することはできないことに気付かせる。 ・主体的に許せる誤差を判断させる。 ・根拠を明確にしようとさせる。	演習① 半径 $R=10cm$ の球面（ゴムボール）上で中心角 $\theta=\frac{\pi}{6}$ の球面円と，これと半径の等しい平面円について①～⑤を求めなさい。 ・差の量と割合のどちらで考えても誤差は許すことができる △差の割合を図示して見せる。 →もしかしたら許せないかもしれない。 演習② 半径 $R=6371km$ の球面（地球）上で中心角 $\theta=\frac{\pi}{6}$ の球面円と，これと半径の等しい平面円について①～⑤を求めなさい。 ・演習①と同じ割合だから許せる。 ・差の量が大きいだから許せない。 △差の量がどれだけの規模かを説明する。 →差の割合は変わらないが差の量が大きいから許せない。 △球の半径によって，許せる誤差の量や割合は異なってくる。 △自分なりに許せる誤差を考えてみよう。 研究題目 球面円と平面円の許せる誤差を考えてみよう。 〇自分なりに判断した許せる誤差を伝えよう。 △相手に伝えるためにはどうしてその誤差を許せると判断したのかを伝えなければならない。	・求めた差の割合を視覚的に様々な表し方をすることで，本当に許せる誤差なのかという葛藤を持たせる。 ・差の量が感覚的に許せないほど大きなものであることに気付かせ，割合だけでは判断できないという感覚を持たせる。

活動プリント　１

○岐阜県の地図を使って２点間の距離を求めてみよう。

小問①

岐阜－高山間の距離を求めなさい。



縮尺　約 75 万分の一

活動プリント　２

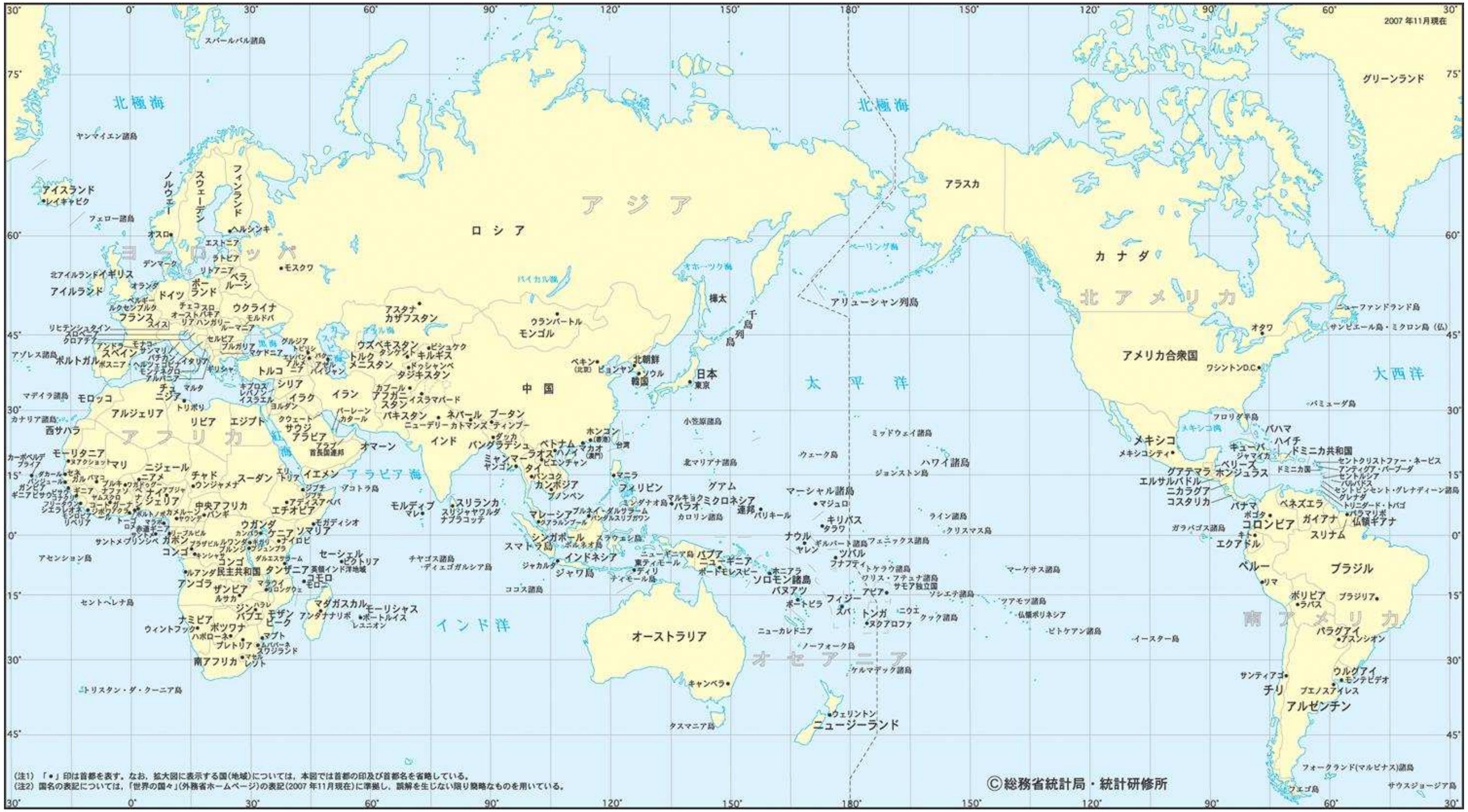
○日本地図を使って２点間の距離を求めてみよう。

小問②
　札幌－鹿児島間の距離を求めなさい。

縮尺　約 820 万分の一

活動プリント　３

○世界地図を使って 2 点間の距離を求めてみよう。



赤道一周の距離は 40,075km

小問③

東京－ワシントン D.C.間の距離を求めなさい。

活動プリント　４

○球面幾何に関する用語を確認しよう。

定義　大円

球面とその中心を通る平面が交わってできる円周を　　　　という。また，この円周上の２点で切り取られた部分を　　　　という。

定義　球面

３次元空間で中心が原点である球について考える。

この球面上の点で，ｚ座標が最大の点を　　　　，最小の点を　　　　という。

球面とｘｙ平面との交わりとして得られる大円を　　　　という。

球面上で，z 座標が正の部分全体の半球面を　　　　，負の部分全体の半球面を　　　　という。

球面とｘｙ平面に平行な平面との交わりとして得られる円周を　　　　という。緯線とｘｙ平面によって決まる角度を　　　　といい　　で表す。

北極と南極を結ぶ大円弧を　　　　という。経線とｘ軸の正の部分によって決まる角度を　　　　といい　　で表す。

緯度について

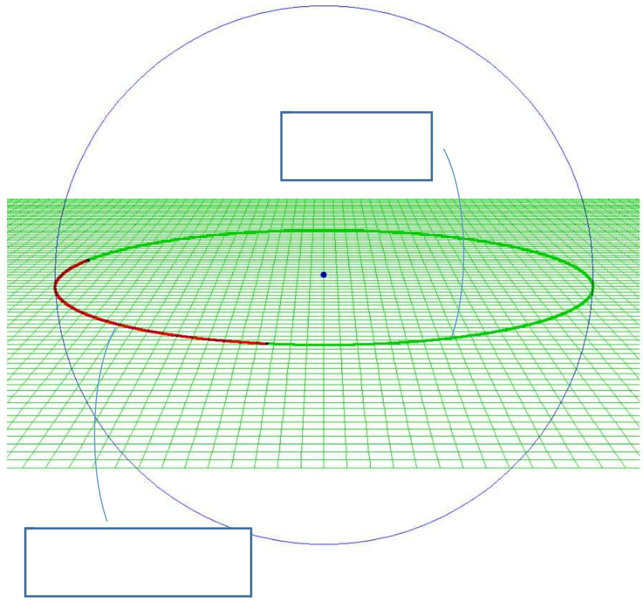
緯線が赤道と重なっているときの緯度を０とする。また，緯線が北半球上にあるときの緯度を正，南半球上にあるときの緯度を負とする。緯度 θ の範囲は，

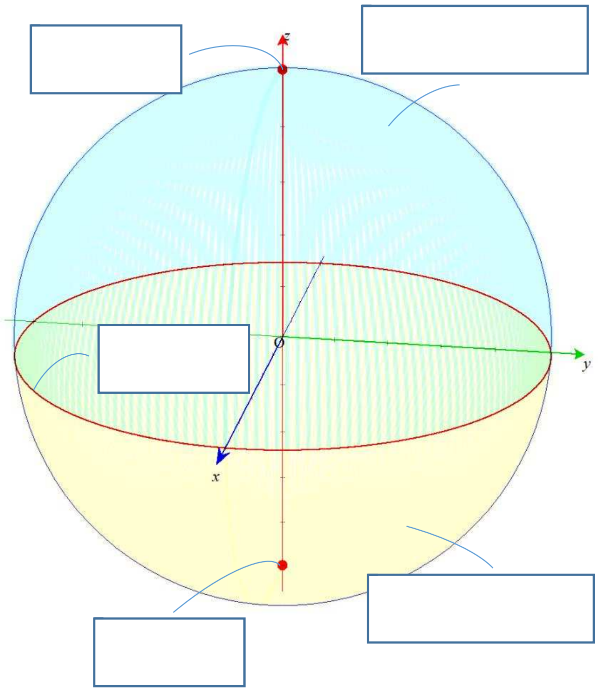
とする。

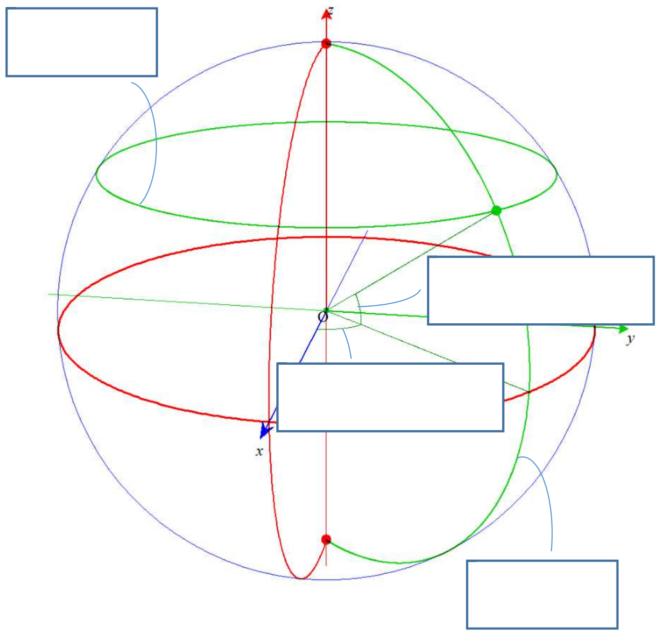
経度について

経線が x 軸の正の部分を通るときの経度を０とする。また，経線が y 座標正の部分にあるときの経度を正，負の部分にあるときの経度を負とする。 経度 φ の範囲は，

とする。







活動プリント　５

〇高校数学で習った内容の復習と，これからの学習のために発展させた内容を確認しよう。

〇曲線のパラメーター表示

復習　平面上の曲線のパラメーター表示

平面上の曲線をパラメーター t を用いて次のように表すことができる。

発展　空間内の曲線のパラメーター表示

空間内の曲線をパラメーター t を用いて次のように表すことができる。

〇曲線の長さの公式

復習　平面上の曲線の長さ L

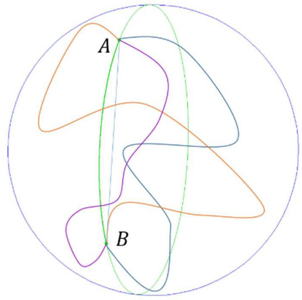
パラメーター t を用いて表された曲線について、この長さ L は次のように表される。

発展　空間内の曲線の長さ L

パラメーター t を用いて表された曲線について、この長さ L は次のように表される。

活動プリント　６

○球面上で距離を表す線について考えてみよう。

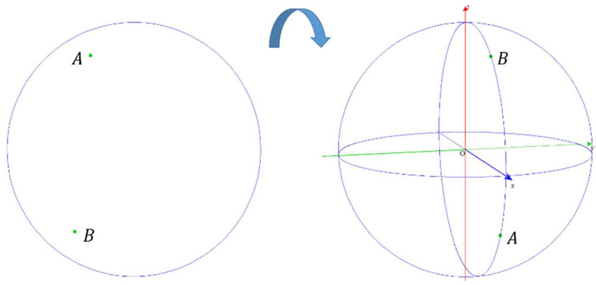


問題　大円弧は球面上の２点を最小の長さで結ぶ線となるか。

証明の方針

　単位球面上の２点Ａ，Ｂとする。この２点を結ぶ様々な曲線γを考え，その長さを求める。次に，その長さの中で最小のものを考え，それが大円弧となることを示す。

証明



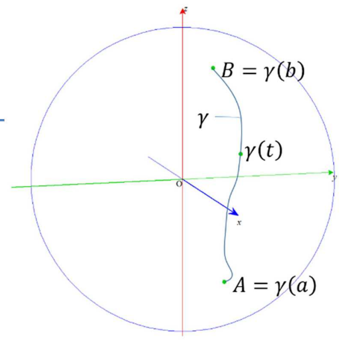
　まず考えやすくするために，２点Ａ，Ｂの経度が０になり，点Ａのほうが点Ｂより緯度が小さくなるように球面全体を回転させておく。

　次に，この２点Ａ，Ｂを結ぶ曲線γを，パラメーターtを用いて次のように表す。

$$\mathrm{x}=\mathrm{x}(t),\ \mathrm{y}=\mathrm{y}(t),\ \mathrm{z}=\mathrm{z}(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

$$\mathrm{A}=\big(x(a),\, y(a),\, z(a)\big) \qquad \mathrm{B}=\big(x(b),\, y(b),\, z(b)\big)$$

　さらに，時刻tにおける曲線上の点の緯度，経度をそれぞれ $\theta(t)$，$\varphi(t)$ とする。



小問①

　時刻tにおける曲線上の点の座標 $\mathrm{x}=\mathrm{x}(t)$，$\mathrm{y}=\mathrm{y}(t)$，$\mathrm{z}=\mathrm{z}(t)$ を，その緯度$\theta(t)$，経度$\varphi(t)$を用いて表しなさい。

活動プリント　7

〇証明つづき　曲線γの長さLについて考えてみよう。

次に，$a \leq t \leq b$ で曲線γの長さLを考える。空間内の曲線の公式より，$\mathrm{L} = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt$ を用いて長さLを$\theta(t)$，$\varphi(t)$を用いて表す。この計算を順番に進めていく。

小問②

$\mathrm{x}'(t)$，$\mathrm{y}'(t)$，$\mathrm{z}'(t)$ をそれぞれ求めなさい。

小問③

$\left(\mathrm{x}'(t)\right)^2$，$\left(\mathrm{y}'(t)\right)^2$，$\left(\mathrm{z}'(t)\right)^2$ をそれぞれ求めなさい。

活動プリント　８

○証明つづき　曲線γの長さLについて考えてみよう。

小問④

$\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2$ を求めなさい。

よって，

L＝

以上より，θ(t)，φ(t)を用いて，２点A，Bを結ぶ曲線の長さLを表すことができた。

活動プリント　９

〇証明つづき　長さＬの最小値について考えてみよう。
　次に，この長さＬの最小値を考える。

小問⑤

　次の式が成り立つようにⅡ，Ⅳに式をあてはめなさい。またⅠ，Ⅲの不等号が成り立つことを示しなさい。

$$\mathrm{L} = \int_a^b \sqrt{\left(\theta'(t)\right)^2 + \left(\varphi'(t)\right)^2 cos^2\theta(t)}dt$$

$$\boxed{\mathrm{I} \quad \geq} \int_a^b \sqrt{\left(\theta'(t)\right)^2}dt$$

$$= \int_a^b \boxed{\mathrm{II} \qquad\qquad} dt$$

$$\boxed{\mathrm{III} \quad \geq} \left|\int_a^b \theta'(t)dt\right|$$

$$= \boxed{\mathrm{IV} \qquad\qquad}$$

　このことから，２点Ａ，Ｂを結ぶ曲線の長さＬについて

$$\mathrm{L} \geq \boxed{\qquad\qquad}$$

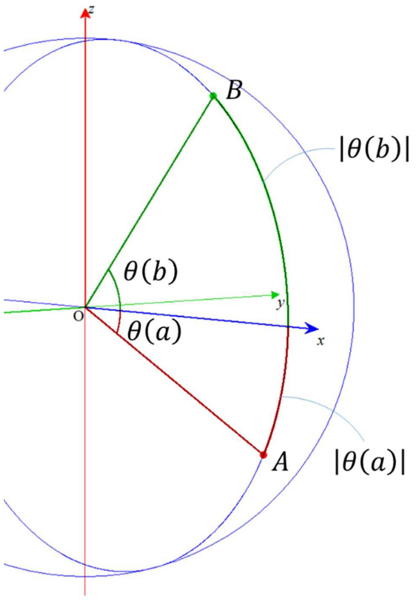
が成り立つことが分かった。

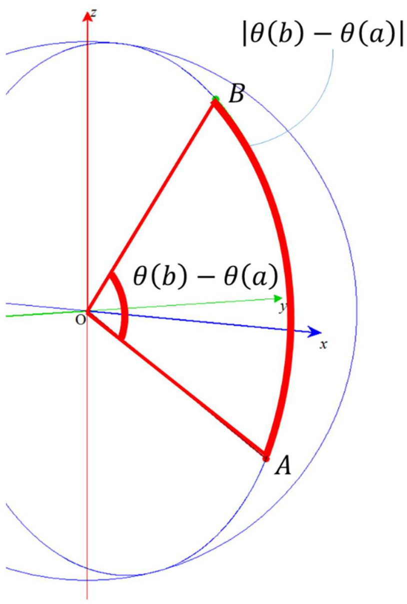
活動プリント　１０

〇証明つづき　$|\theta(b)-\theta(a)|$ について考えてみよう。
　ここで，$|\theta(b)-\theta(a)|$ の意味について考えてみる。

　まず，$\theta(a)$ は点 A の緯度，$\theta(b)$ は点 B の緯度を表している。
　このとき，$|\theta(a)|$，$|\theta(b)|$ によって x 軸から各点 A，B までの弧の長さを表すことができる。
（弧の長さは半径×中心角で求めることができ，今回は単位球面なので半径が 1 であるため）

　また，$\theta(b)-\theta(a)$ によって点 A から点 B までの角度を表すことができる。
　よって先程と同様に，$|\theta(b)-\theta(a)|$ は点 A から点 B までの弧の長さを表していることがわかる。
　また，この xz 平面上にある円は大円となるため，点 A から点 B までの弧は大円弧となっていることがわかる。





　最後に，Ⅰ，Ⅲについて等号成立し，$L=|\theta(b)-\theta(a)|$ となること、つまり，2 点 A，B を結ぶ大円弧の長さが，曲線の長さ L の最小値となることを示す。

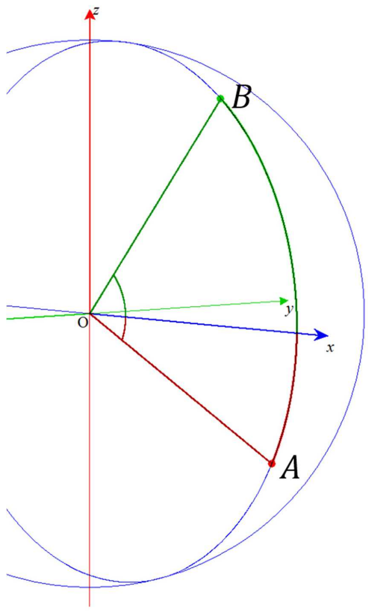
$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\theta'(t)\right)^2+\left(\varphi'(t)\right)^2\cos^2\theta(t)}\,dt$$

$$\boxed{\mathrm{I}\ =}\ \int_a^b \sqrt{\left(\theta'(t)\right)^2}dt$$

$$=\int_a^b |\theta'(t)|dt$$

$$\boxed{\mathrm{III}\ =}\ \left|\int_a^b \theta'(t)dt\right|$$

$$=|\theta(b)-\theta(a)|$$



活動プリント　１１

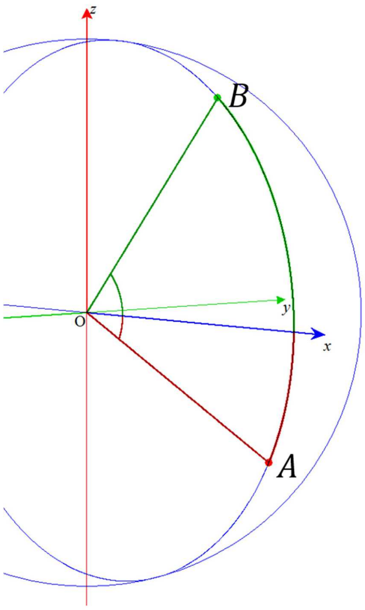
〇証明つづき　等号成立について考えてみよう。

Ⅰについて

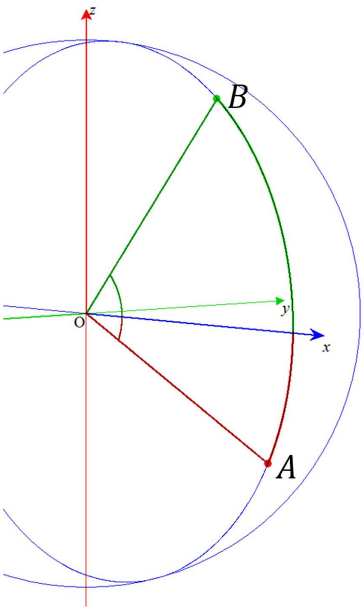
等号成立は，$\left(\varphi'(t)\right)^2\cos^2\theta(t)=0$ となるとき。つまり，　$\varphi'(t)=0$ または $\cos\theta(t)=0$ となるとき。

順に $\cos\theta(t)=0$ と $\varphi'(t)=0$ について考えてみる。

$\cos\theta(t)=0$ となるとき



$\varphi'(t)=0$ となるとき



よって，

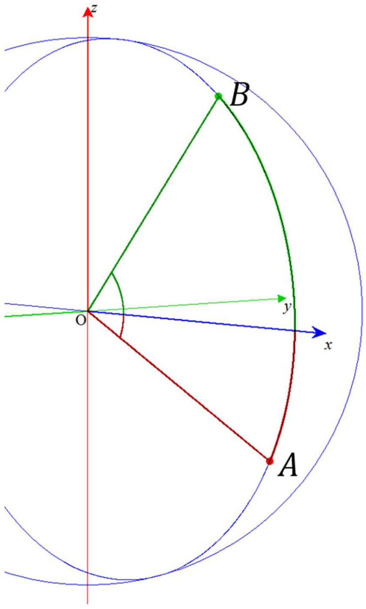
活動プリント　１２

○証明つづき　等号成立について考えてみよう。

Ⅲについて

　等号成立は，$\theta'(t) \geq 0$ または $\theta'(t) \leq 0$ のとき。

$\theta'(t) \geq 0$ についてのみ考えてみる。$\theta'(t) \leq 0$ については同様に示せる。



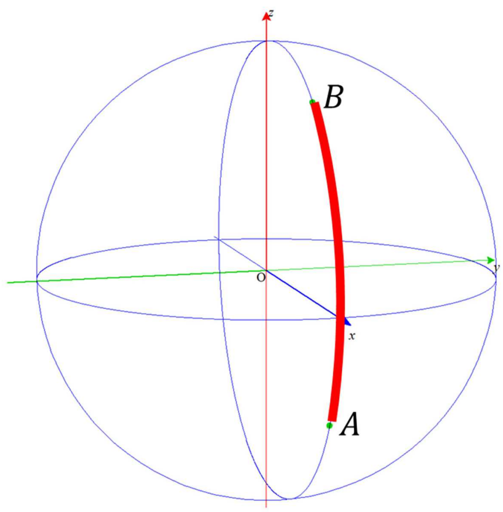
よって，

　以上で，Ⅰ，Ⅲについて等号成立，すなわち曲線の長さの最小値が $L = |\theta(b) - \theta(a)|$ となり，また 2 点 A，B を結ぶ曲線は大円弧のみであることが示せた。

問題

　大円弧は球面上の 2 点を最小の長さで結ぶ線となるか。

結論



活動プリント　１３

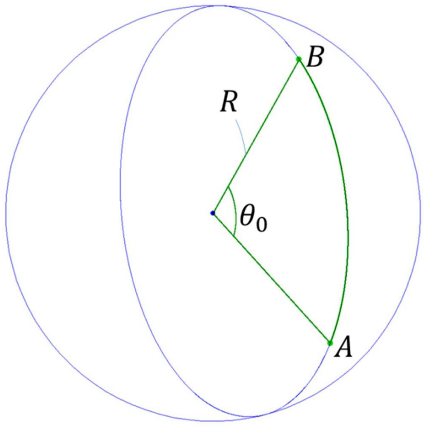
〇球面上で距離を表す線について考えてみよう。

課題②

球面上の距離の求め方を考えてみよう。

問題の結論から，2 点 A，B を結ぶ大円弧の長さを求めればよいことがわかった。
つまり，中心と 2 点 A，B によってできる扇形の弧の長さを求めればよい。
扇形の弧の長さは半径×中心角によって求めることができる。
このことから，球の半径 $R(=1)$ と，中心と 2 点 A，B のなす角 $\theta_0\left(=\theta(b)-\theta(a)\right)$ を求めれば，その 2 点間の距離 $L(=1\times|\theta_0|)$ を求めることができる。

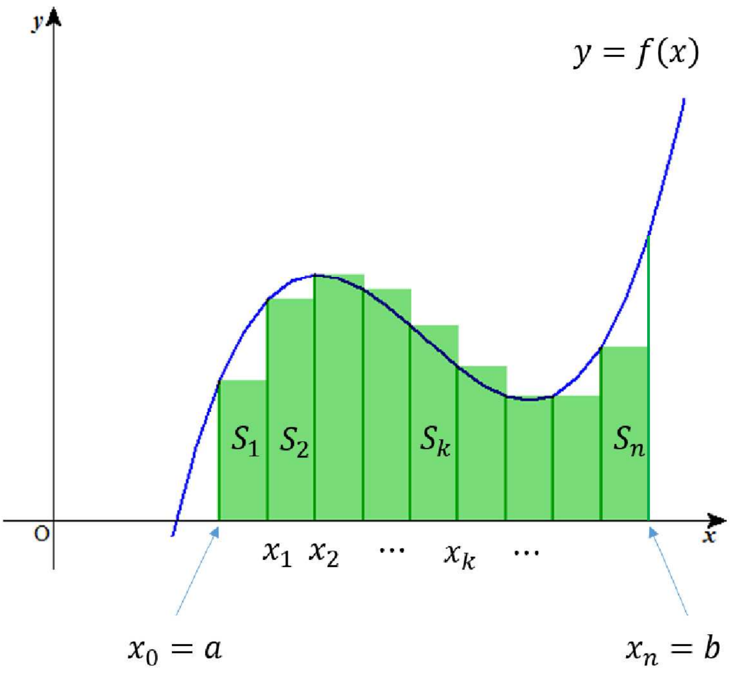
結論



活動プリント　１４

〇高校数学で習った内容の復習をしよう。

〇定積分の区分求積法



　$y=f(x)$ のグラフと x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を S とする。

　区間 $[a,b]$ を n 等分して，その両端と分点を順に，

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n=b$$

とする。さらに，右図のようにしてできる各帯の面積を

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n$$

とする。これらの帯を足し合わせてできる図形の面積を S' とすると，

$$S'=\sum_{k=1}^{n}S_k$$

となる。

　ここで $n\to\infty$ とすると，S' は S に限りなく近づく。つまり，

$$\lim_{n\to\infty}S'=S$$

といえる。このとき，帯の幅が限りなく 0 に近づくことから，

$$\lim_{n\to\infty}S_k=f(x_k)$$

である。また，$S=\int_a^b f(x)dx$ であったことから，

$$\lim_{n\to\infty}S'=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\int_a^b f(x)dx$$

がわかる。

　このように和の極限として定積分を求めることを，定積分の区分求積法という。

〇区分求積法のポイント

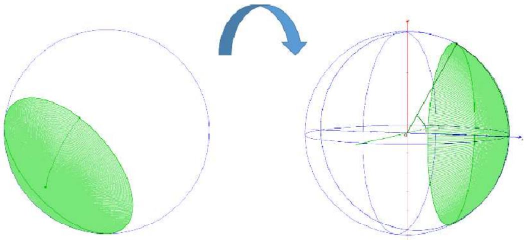
・求めたい範囲に沿って領域を分割し，それらを足し合わせることで求めたい面積を近似する。
・分割を無限に増やすことで，足し合わせてできる図形が求めたい図形に限りなく近づいていく。
・分割を無限にすると，分割された k 番目の図形の大きさは $f(x_k)$ で表される。

　このポイントに注意して，これから球面円について考えていく。

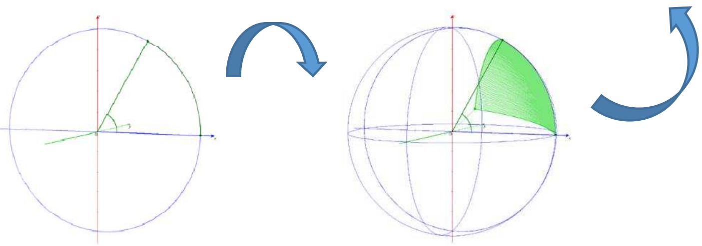
活動プリント　１５

○球面上の図形の面積について考えてみよう。

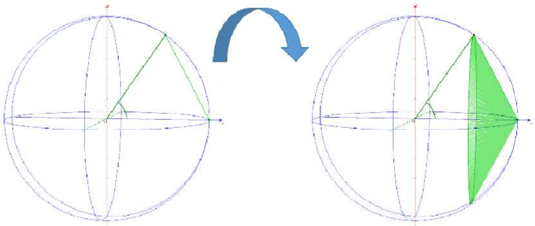
課題④　球面上の円の面積の求め方を考えてみよう。



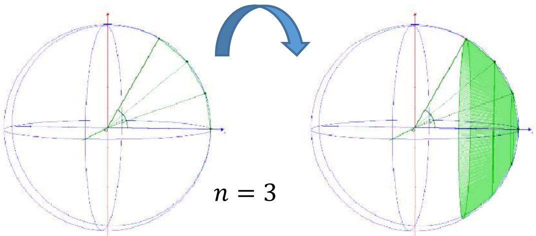
まず，単位球面円の中心が空間座標上の $(1,\ 0,\ 0)$ になるように，球面全体を適当に回転させる。



この球面を xz 平面で切り取った円弧を用いて考える。求めたい球面円は，この円の中心角 θ の弧を，x 軸について回転させることで得ることができる。

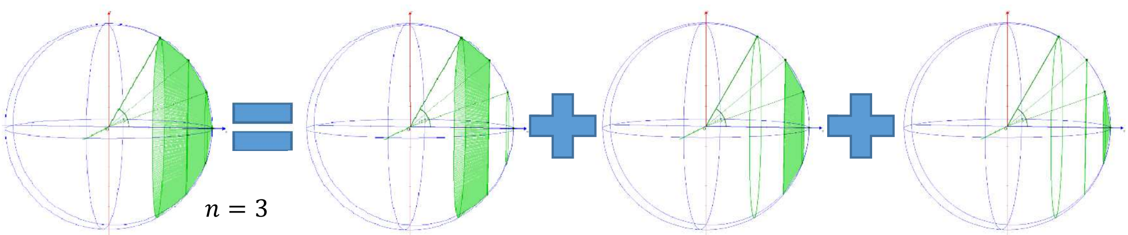


しかし，この弧を曲線のまま回転させても，うまく面積を求めることはできない。そこで弧の両端の点を線分で結び，その線分を回転させる。すると円錐の側面ができあがる。しかし，この円錐の側面の面積では，求めたい球面円の面積とはならない。

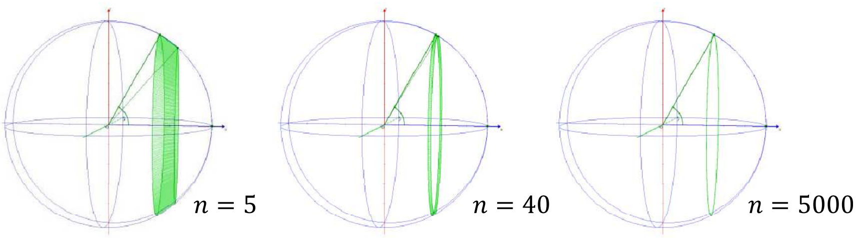


そこで，この弧の中心角を分割していき，同様に端点を結んだ線分を回転させていく。すると分割 n の個数を増やしていくほど，回転させてできる図形は球面円へと近づいていく。

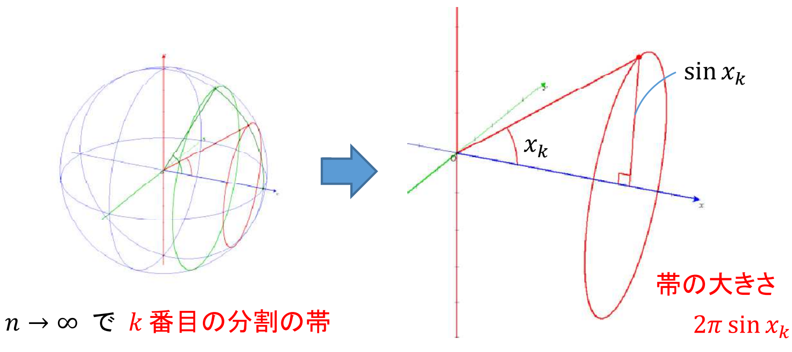
つまり，球面円の面積は，分割したひとつひとつの帯の面積を足し合わせることで，近似することができる。



また，この分割 n の個数を増やしていくほどひとつひとつの帯は細くなっていき，この帯を足し合わせてできる図形はより球面円に近づいていく。



弧の中心角の分割 n を無限大に飛ばしたとき，その k 番目の分割での中心角を x_k とすると，ひとつひとつの帯の大きさは $\sin x_k$ を半径とする円の円周として求めることができる。



活動プリント　１６

〇球面上の図形の面積について考えてみよう。つづき

ここまででわかったことをまとめると，

・中心角 θ の弧を回転させることで，球面円を作ることができる。

・中心角 θ を分割して，その各線分を回転させて足し合わせることで，球面円の面積を近似することができる。

・分割を無限に増やすと，足し合わせてできる図形は球面円に限りなく近づいていく。

・分割を無限にしたとき， k 番目の分割で中心角 x_k のひとつひとつの帯の大きさは， $\sin x_k$ を半径とする円の円周 $2\pi \sin x_k$ となる。

$f(x_k) = 2\pi \sin x_k$ とすると区分求積法のポイントを満たしている。

このことから，球面円の面積は $0 \le x \le \theta$ の範囲で $2\pi \sin x$ の和の極限として定積分で求めることができる。

以上のことから，中心角 θ の単位球面円の面積 S は

$$S = \int_0^{\theta} 2\pi \sin x \, dx$$

によって求めることができる。

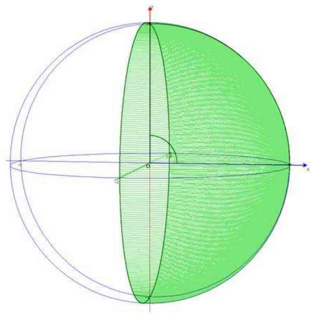
小問①

実際にこの式 $\int_0^{\theta} 2\pi \sin x \, dx$ を計算して，単位球面円の面積の式を求めなさい。

活動プリント　１７

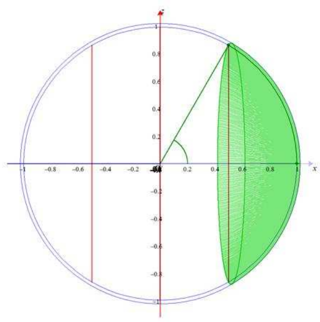
○単位球面円の面積の公式を使って，実際に面積を求めてみよう。

演習①



球面円の面積の公式を用いて，単位球の半球の面積が2πとなることを確かめなさい。

演習②



単位球を縦に 4 等分した球面円の面積を求めなさい。

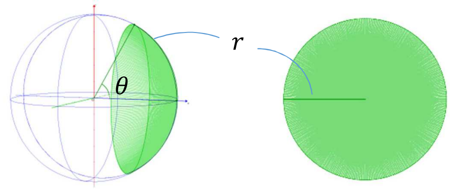
活動プリント　１８

○球面円と平面円の面積を比べてみよう。

課題⑤　球面円と平面円の面積ではどれだけ誤差があるか調べてみよう。

以後，球面円とその面積を S_S，平面円とその面積を $S_{\mathbb{R}^2}$ とする。

球面円 S_S　　　平面円 $S_{\mathbb{R}^2}$



まずは球面円と平面円を，それぞれ文字を用いて表してみる。

中心角 θ の球面円をもとに考える。この球面円と比べるために，これと半径の等しい平面円を考える。

小問①

このときの球面円と平面円の半径，面積を表しなさい。

単位球面	中心角 θ の球面円 S_S	平面円 $S_{\mathbb{R}^2}$
半径 r		
面積		

小問②

このときの球面円と平面円の面積の誤差について調べなさい。

活動プリント　１９

○球面円と平面円の面積を比べてみよう。

課題⑥　単位球面以外の球面で，球面円と平面円の面積について調べてみよう。

球面の半径を R，球面円と平面円の半径を r とする。
単位球面は球面の半径 $R=1$ の球面であった。この単位球面以外の球面，つまり $R>0$ の球面を考えたい。

あらためて，半径 $R>0$ の球面での中心角 θ の球面円と平面円の面積を，文字を用いて表してみよう。

小問①

半径 R の球面の球面円と平面円の半径，面積を表しなさい。

半径 R の球面	中心角 θ の球面円 S_S	平面円 $S_{\mathbb{R}^2}$
円の半径 r		
面積		

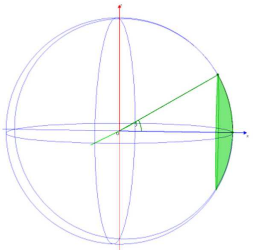
小問②

このときの球面円と平面円の面積の誤差について調べなさい。

活動プリント　２０

〇実際の球面で，球面円と平面円の面積を比べてみよう。
球面円と平面円について，調べる内容。
　①　球面円の面積　　②　平面円の面積　　③　面積の差　　④差の割合　　⑤　許せる誤差か

演習①



　半径 $R = 10cm$ の球面（ゴムボール）上で中心角 $\theta = \frac{\pi}{6}$ の球面円と，これと半径の等しい平面円について①～⑤を求めなさい。

活動プリント　２１

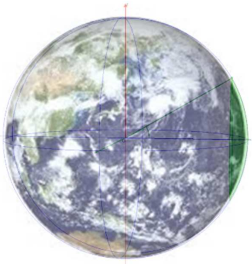
〇実際の球面で，球面円と平面円の面積を比べてみよう。

球面円と平面円について，調べる内容。

①　球面円の面積　　　②　平面円の面積　　　③　面積の差　　　④差の割合　　　⑤　許せる誤差か

演習②

半径 $R=6371km$ の球面（地球）上で中心角 $\theta=\frac{\pi}{6}$ の球面円と，これと半径の等しい平面円について①～⑤を求めなさい。



活動プリント　２２

〇実際の球面で，球面円と平面円の面積を比べてみよう。

研究　球面円と平面円の許せる誤差を考えてみよう。

結論