

背理法との対比で検定の理解を深める授業実践

赤堀 克己¹

検定の原理は、推測統計学において最も重要な概念である。その論理構造の大枠は、背理法のそれと同じである。しかしながら、検定は検定として、背理法とは全く関係なく教授されることが多い。そこで、本実践では、検定と背理法を対比させることにより、より効果的に検定の理解を深める教材を用意し、大学1年生を対象として実践を行った。本稿では、授業前後のアンケートから本実践の学習効果についての考察も述べる。

<キーワード> 推測統計学, 検定, 背理法

1. はじめに

1. 1. 「検定」について

「検定」の原理は、推測統計学において重要な学習項目である。大学生・社会人用のテキストにおいても、t検定を1つのゴールとしているものが多いが、「検定」の原理の十分な理解が必須である。現行の高等学校学習指導要領数学科([1])において、「検定」は範囲外ではあるが、平成元年の改訂以前は、学習内容の一つとして学習指導要領に明確に記載されていた。

また、多くの情報で溢れかえる現代社会において、以前にも増して統計的素養が様々な場面で求められるようになってきた。これを受けて、平成21年度の高等学校学習指導要領数学科の改訂([1]を参照)において、「数学I」の「データの分析」が必須になった。この潮流を鑑みるに、今後の学習指導要領の改訂において、「検定」が再び取り上げられる可能性は非常に高いと思われる。

1. 2. 「数学」との関係性

「検定」を学習するとき、「帰無仮説」、

「対立仮説」、「棄却域」、「有意水準」など、統計独特の用語を学ぶ。ゆえに、「検定」は「数学」と直接関係がなく別物という印象を学習者に与えてしまう。しかし、要約でも述べたように、その論理構造の大枠は、「背理法」のそれと同じである。「背理法」は、現行の学習指導要領における「数学I」で、ほとんどの高校生が履修する。学習者が既に持っている「数学」の知識を基礎にして、「検定」を学習した方がより効果的ではないだろうか？本実践は、この提言を授業前後に実施したアンケートにより検証したものである。

2. 研究のねらい

2. 1. 統計ソフトによる「統計学」のブラックボックス化

巷には数多くの統計ソフトがあり、データを入力するだけで結果を得ることが出来る。「統計学」を理解した後に、便利な計算ソフトを利用するのは問題ないと思われるが、逆の場合は、時には大きな過ちにつながる場合もある。筆者は長年、大学でExcelを用いて実習を行う「情報処理科」を担

¹岐阜薬科大学

当してきた。Excelにも、「検定」を行う関数が予め用意されており、データを入力するだけで簡単に結論に至る。しかし、この利便性が逆に、学習者の論理思考の過程を奪い、「統計学」の理解の助けになっていないのでは？と筆者は感じている。ゆえに、「検定」のExcel実習の場合も、実習に先立ち「検定」の原理を復習する時間を設けている。その実践内容が本稿である。

2. 2. 「数学」の学習過程と「統計学」の特性

本実践のねらいは、高等学校の「数学」の学習過程で学んだ「背理法」の知識の「検定」での利用である。先にも述べたように、「背理法」と「検定」の類似点の考察を通じて、「検定」の理解を効果的に深めることができる考えた。

さらに、類似点の考察だけではなく、相違点の考察にも力点を置いた。相違点の考察を通じて目指したものは、「数学」とは異なる「統計学」の特性を理解して、「統計学」を学習する際の最適な学習スタンスを感じ取ってもらうことである。高等学校において、「統計学」は「数学」の授業の中で学習するがゆえ、自然と「数学」と同様の学習スタンスで学習者は「統計学」に臨んでしまう。しかし、「統計学」を学習する際、「数学」とは大きく異なる点が存在する。それは、「(推測)統計学」の“推測”の要素である。たとえば、標本平均の授業実践報告の[2]において、定義から演繹的論理展開を学習する数学の学習スタンスに慣れた学習者は、サンプリングによる帰納的な理解では違和感を抱き、数学的な理解を強く求めることを報告している。これの対応策として、

標本平均が不偏性を満たすことを数式で証明することが考えられる。その際に、標本平均も母平均の推定量のひとつにすぎないことを強調することが肝要であると筆者は感じている。「(推測)統計学」は、推測の要素を含んでいることを強調することにより、学習者に「数学」とは異なる学習スタンスを促すのである。同様のことが、「検定」においても言える。一般に、有意水準は1%や5%に設定されている。しかし、それらはひとつの目安にすぎず、「検定」の結果にも推測の要素を含んでいる。この推測の要素の認識が、母集団、標本、サンプリング等の深い理解につながると筆者は感じている。

2. 3. 学習効果の検証

我々は、「背理法」と「検定」の対比を問う教材を用意し、受講者に解いてもらった。受講の前後の受講者の理解度の変化を調べるため、受講前後にアンケートを実施し、本実践の効果を検証した。

3. 実践内容

講義名：「情報処理科学」

実践日：平成28年1月21日(木)

場所：岐阜薬科大学三田洞学舎村山情報処理センター

対象：大学1年生（有効回答数40名）

3. 1. 教材における工夫

まず、「背理法」の問題は極力簡単なものを選んだ。設問によって、命題を構成する(仮定)と(結論)が明確に認識できるようにした。また、「背理法」と「検定」の対比を行うために、「背理法」のどのステップが「検

定」のどのステップに対応するかを問う設問を用意した。さらに、「検定」の確認問題として、手計算で解ける母平均の検定の例題も用意した。例題作成の際、「背理法」と「検定」の対比が容易になるような視覚的効果もねらった。「背理法」の問題において、(結論)の否定から導かれる不等式の表す範囲が数直線上で左側にくることを考慮して、棄却域が左側にくる左片側検定の問題を意図的に用意した(補足のための板書)を参照。

まず、「背理法」の簡単な問題を受講者各自解いてもらい、「背理法」の確認をしてもらった。その後、「背理法」のどのステップが「検定」のどのステップに対応するかを問う問題(配布プリントその1)に取り組んでもらった。続いて、標本平均が従う分布を確認してもらうため、(配布プリントその2)を解いてもらった。最後に、まとめとして、母平均の検定の例題(配布プリントその3)を解いてもらった。ほとんどの受講者が一応解き終えた後、解説を行った。

3. 2. 実践の流れ

[受講者への配布プリントその1]

背理法と検定の比較

(問) 次の空欄①から⑩を埋めよ。

命題 a, b は実数とする。

「 $a + b > 0$ ならば, $a > 0$ または $b > 0$ 」

[背理法]

証明)

(注) 命題は「(仮定) \rightarrow (結論)」である。

この命題の (仮定) は

(① $a + b > 0$) で

(結論)は

(② $a > 0$ または $b > 0$)である。

背理法は(結論)の否定を仮定するので、今は

(③ $a \leq 0$ かつ $b \leq 0$)を仮定する。

③より

$a + b \leq$ (④ 0) + (⑤ 0) = (⑥ 0) \cdots (*)

(*)は,

(仮定) (① $a + b > 0$)

[検定]

\Leftrightarrow 「(⑦ 対立) 仮説」に対応。

\Leftrightarrow 「(⑧ 帰無) 仮説」を仮定する。

\Leftrightarrow 「(⑨ 有意水準(危険率))」による

棄却域の設定

に矛盾する。 ⇔ 「実現値が棄却域に(⑩入る)」に対応
よって、
(結論)(② $a > 0$ または $b > 0$)である。 ⇔ 「(⑧ 帰無) 仮説」を(⑨棄却)して、
「(⑦ 対立) 仮説」を(⑩採択)する。

[受講者への配布プリントその2]

(問) 次の空欄を埋めよ。

(中心極限定理)

互いに独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が平均 μ , 分散 σ^2 の (同一) の確率分布に従うとき, n 個の平均 $Y=(X_1+X_2+\dots+X_n)/n$ は, n が (大きい) とき, 平均 μ , 分散(σ^2/n)の正規分布に従う。

(正規分布の定理)

互いに独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が平均 μ , 分散 σ^2 の (正規) 分布に従うとき, n 個の平均 $Y=(X_1+X_2+\dots+X_n)/n$ は, 平均 μ , 分散(σ^2/n)の正規分布に従う。

[受講者への配布プリントその3]

(母平均の検定(母分散が既知))

(例題) 20歳から24歳の女性の最高血圧(単位mm Hg)は, 平均 121, 分散 144 の正規分布に従うことがわかっている。いま, 9人の女性を無作為抽出して, 血圧を下げるとされるサプリメントを1週間服用して最高血圧を調べたところ, 9人の平均は 113 であった。このサプリメントは血圧降下作用があるか有意水準5%で検定せよ。

問 以下の空欄を埋めて, 検定を完成させよ。

[検定の手順]

(step0)仮説の大まかな設定(結論の予想): 9人の平均から, 「サプリメントは血圧降下に効果が (ある)」という仮説が妥当である。よって, その反対の「サプリメントは血圧降下に効果が (ない)」という仮説 H_0 (帰無仮説)を仮定する。

(step1)統計量とそれが従う分布の把握: 抽出した標本を X_1, X_2, \dots, X_9 とすると, $X_i(i = 1, 2, \dots, 9)$ は正規分布に従い,その母分散は (144) とするのが妥当である。

一方,母平均は分からないので μ とする。

ゆえに, 標本平均 \bar{x} は, 平均 (μ), 分散 ($144/9$) の (正規) 分布に従う。
よって, 標準化した

$$z = (\bar{x} - \mu) / \left(\sqrt{\frac{144}{9}} \right) = (\bar{x} - \mu) / (4) \cdots (1)$$

は, 平均 (0), 分散 (1) の (標準正規) 分布に従う。

(step2)仮説の具体的な設定:

$$\text{帰無仮説 } H_0: \mu = (121)$$

$$\text{対立仮説 } H_1: \mu (<) (121)$$

(step3)実現値の算出: 仮説 (H_0) より, $\mu = (121)$ を(1)に代入すると

$$z = (\bar{x} - 121) / 4$$

は, 平均 (0), 分散 (1) の (標準正規) 分布に従っている。

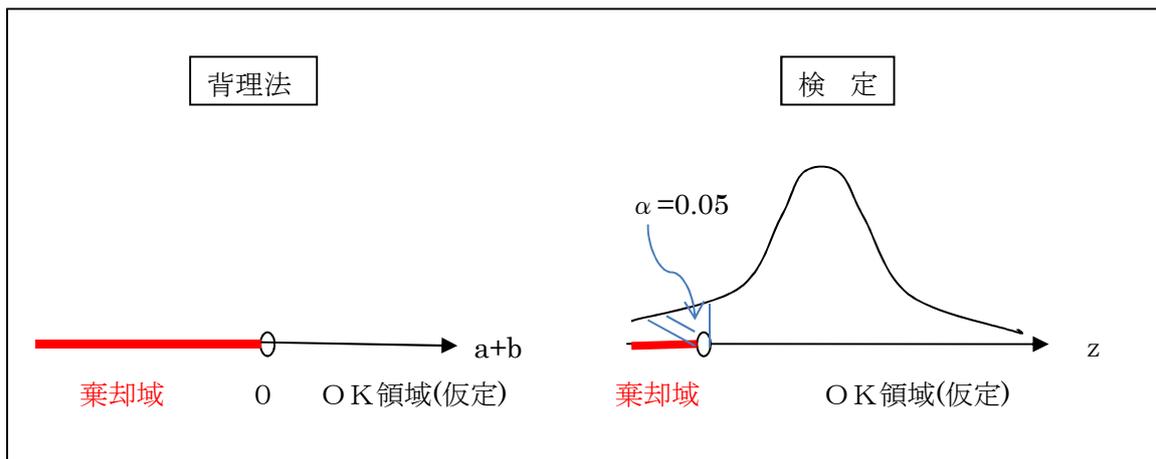
いま, 標本平均 $\bar{x} = (113)$ であるから, 実現値は $z = (-2)$ となる。

(step4)判定: 有意水準 α (危険率) を $0.05(5\%)$ とすると, 正規分布表から求めた値より, 棄却域は

$$z (\leq) -1.645$$

(step3)で求めた実現値は棄却域に入る(る)ので, H_0 は棄却(される)。よって, 「このサプリメントは血圧降下作用がある」と(いってよい)。

[補足のための板書]



- 10%以上40%未満)。
 3. 半分ぐらいは理解している(理解度40%以上60%未満)。
 4. 大体理解している(理解度60%以上90%未満)。
 5. 完璧に理解している(理解度90%以上)。

5	1人	1人	1人
合計	40人	40人	40人

[表1]

Q4. 受講後、「検定」の原理と「背理法」の類似点の理解は、

1. 全然変わらない。
2. 少し理解が深まった。
3. 大変深まった。

回答番号	Q4	Q5	Q6
1	1人	1人	1人
2	16人	19人	17人
3	23人	20人	22人
合計	40人	40人	40人

[表2]

Q5. 受講後、「検定」の原理と「背理法」の相違点の理解は、

1. 全然変わらない。
2. 少し理解が深まった。
3. 大変深まった。

Q6. 受講後、統計学の「検定」についての理解は、

1. 全然変わらない。
2. 少し理解が深まった。
3. 大変深まった。

Q7. 今日の感想を御願ひします。

アンケートに対する回答の集計結果が[表1]と[表2]である。

回答番号	Q1	Q2	Q3
1	9人	20人	22人
2	14人	11人	9人
3	7人	6人	7人
4	9人	2人	1人

受講前、約6割の受講者が、理解度40%未満と回答している。しかし、一方で25%の受講者は、理解度60%以上と回答しており、受講者の「検定」に関する理解度については、ばらつきがみられた。

このように、ある程度「検定」を理解している受講者がいるにもかかわらず、「背理法」と「検定」の類似点と相違点の理解については、約8割の受講者が理解度40%未満と回答している([表1]を参照)。

受講後のアンケート結果は、学習効果を感じなかった受講者は1人だけであった。一方、半数以上の受講者が「大変深まった」と回答しており([表2]を参照)、本実践の効果を確認することが出来た。

また、Q1からQ6のアンケート結果以上に、Q7の感想から本実践の効果を感じることが出来る。以下、受講者の感想の中から際立ったものを、そのままの文面で紹介する。

[受講者の感想]

- ① 検定と背理法に関連があると気付かなかったもので、検定と背理法の類似点と

相違点の話は感動しました。

- ② 背理法と検定に関係があることさえ思いつかなかったの、こうした関係を知れて検定のことを少し理解できるようになりました。
- ③ 背理法と検定って関係あったんですね。
- ④ 今まで検定を難しく考えていたけど、背理法と比較すると意外にもやっていることは単純だったので、苦手意識がなくなった。とても有意義だった。
- ⑤ 背理法との比較による説明はなるほどと思いました。
- ⑥ 背理法と関連づけたのは、とてもわかりやすかったです。
- ⑦ めっちゃわかったー。
- ⑧ OK領域、しっくりきました！
- ⑨ 母集団、標本で混乱があったが少し分かった気がした。

①から⑦の感想から、受講者の感動を強く感じることが出来る。

また、(配布プリントその1)の解説において、「棄却域」の反対語として「OK領域」というくだけた表現を用いた。表現の是非はともかく、⑧の感想から、受講者の理解の大きな助けになったと考えられる。

最後に、⑨の感想を書いた受講者は、「検定」以前に、標本から母集団の統計量を推測するということがわかっていなかったようである。

5. おわりに

本実践は、「背理法」と「検定」の対比を通じて「検定」の原理の理解を促すものだった。この対比で取り上げた類似点と相違点が暗に示すものは、「検定」だけの話に留まらず、「数学」と「統計学」の類似点と相

違点を象徴しており、「統計学」の学習における鍵ではないかと筆者は感じている。

引用・参考文献

- [1] 文部科学省, 2009, 高等学校学習指導要領解説 数学編
- [2] 山路健祐, 2013, 確率の考えを活用して標本調査のしくみの理解を促す指導, 岐阜数学教育研究, Vol. 12, 42-51